

Решење задатка 3

- (а) Први део задатка ћемо решавати у референтном систему тачке P . Уколико су t_{1P} и t_{2P} тренуци када сигнали дођу до тачке P , тада је $\Delta t_P = t_{2P} - t_{1P} = \Delta t_A + \frac{d_1 - v_1 \Delta t_A}{u} - \frac{d_1}{u}$. Одавде је: $\Delta t_P = \Delta t_A (1 - \frac{v_1}{u})$. Надаље, задатак ћемо решавати у референтном систему везаном за Бранка, постављајући x осу у правцу брзине v_2 . Користећи закон слагања брзина, можемо одредити релативну брзину Алексе у односу на Бранка: $v_r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta}$. Ако са t_{1B} и t_{2B} обележимо тренутке када сигнали дођу до Бранка, а са D почетну удаљеност између њих, тада је $\Delta t_B = t_{2B} - t_{1B} = \Delta t_A + \frac{D - v_r \Delta t_A \cos \phi}{u} - \frac{D}{u}$, где је ϕ угао између вектора релативног положаја Алексе у односу на Бранка и релативне брзине Алексе у односу на Бранка, односно: $\cos \phi = \frac{(v_1 + v_2) \sin \frac{\theta}{2}}{v_r}$. Коначно је: $\Delta t_B = \Delta t_A \left(1 - \frac{(v_1 + v_2) \sin \frac{\theta}{2}}{u}\right)$.
- (б) Како је фреквенција инверзно пропорционална времену $f \sim \frac{1}{\Delta t}$, користећи резултат из претходног дела задатка, закључујемо да је: $f_P = f_A \frac{1}{(1 - \frac{v_1}{u})}$, односно $f_B = f_A \frac{1}{(1 - \frac{(v_1 + v_2) \sin \frac{\theta}{2}}{u})}$.
- (в) Користећи израз за дилатацију времена, у систему S , везаном за тачку P , разлика између тренутака емисије је $\Delta t_e = \Delta t' \gamma_1$, где је $\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta_1^2}}$, и $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Како се Алекса кретао између емитовања, други сигнал ће прећи пут за $\Delta l = v_1 \Delta t_e$ мањи од пређеног пута првог сигнала. Разлика између тренутака детекције је $\Delta t = \Delta t_e - \frac{\Delta l}{c}$. Сређивањем, коначно решење је: $\Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}}$.
- (г) Уколико поставимо референтни систем S у тачку P , а S' у аутомобил којим се креће Алекса и S'' у аутомобил којим се креће Бранко, коришћењем закона о релативистичком слагању брзина, можемо одредити брзину којом се Алекса креће, у референтном систему S'' , v''_1 . Време које протекне између емисије два сигнала, у Бранковом референтном систему: $\Delta t''_e = \Delta t'_e \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v''_1{}^2}{c^2}}}$. Уколико дуж правца који спаја Бранка и тачку P поставимо x осу, тада су компоненте Алексине брзине у S : $v_{1x} = v_1 \cos \theta$ и $v_{1y} = -v_1 \sin \theta$. Како се у односу на S , S'' креће брзином $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_x$, то је брзина Алексе у S'' : $v''_{1x} = \frac{v_1 \cos \theta - v_2}{1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta}$ и $v''_{1y} = -\frac{v_1 \sin \theta}{\gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)}$, и важи: $v''_1 = \frac{1}{(1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta - (\beta_1 \beta_2 c \sin \theta)^2}$, где је $\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta_2^2}}$, и $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$. Аналогним приступом као у првом делу овог задатка, можемо закључити да је: $\Delta t'' = t''_{2B} - t''_{1B} = \Delta t''_e + \frac{L - v''_1 \Delta t''_e \cos \psi}{c} - \frac{L}{c}$, где је L поново почетна удаљеност између Алексе и Бранка, а ψ угао између вектора положаја Алексе и вектора његове брзине. Сигнал који Алекса емитује, у систему S , се креће тако да су компоненте брзине: $c_x = -c \sin(\theta/2)$, $c_y = -c \cos(\theta/2)$. Коришћењем релативистичког закона слагања брзина, компоненте брзине светлости у систему S'' су: $c''_x = \frac{c_x - v_2}{1 - \frac{v_2 c_x}{c^2}}$ и $c''_y = \frac{c_y}{\gamma_2 (1 - \frac{v_2 c_x}{c^2})}$. Надаље је: $v''_1 \cos \psi = \vec{v''_1} \cdot \vec{c''} \frac{1}{c}$. Коначно, долазимо до решења да је:
- $$\Delta t'' = \Delta t' \left(1 - \frac{v''_1 \cos \psi}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v''_1{}^2}{c^2}}} = \Delta t' \left(1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2) \sin(\theta/2) - \beta_1 \beta_2 \cos \theta + \beta_2^2 (1 - \beta_1 \sin \theta \cos(\theta/2))}{(1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)(1 + \beta_2 \sin(\theta/2))}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v''_1{}^2}{c^2}}}.$$
- (д) Аналогно као у нерелативистичком случају, одређујемо да је: $f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_1}{c}}{1 - \frac{v_1}{c}}}$, док је фреквенција коју региструје Бранков аутомобил: $f_1 = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v''_1 \cos \psi}{c}} \sqrt{1 - \frac{v''_1{}^2}{c^2}}$.