



Решење задатка 2: Термодиначки поглед на срећу

- (а) Како је систем изолован, укупна енергија система је константна и износи $\alpha N E_0$. Следи да има α људи у стању среће па је $p(S) = \alpha$ и $p(T) = 1 - \alpha$.
- (б) Уколико човек у стању туге има енергију ϵ тада за укупну енергију система важи $n_s E_0 + n_t \epsilon = \alpha N E_0$. Мора важити да је $n_s + n_t = N$, где је n_s, n_t број људи у стању среће односно туге. Решавањем система добијамо $n_s = \frac{N(\alpha E_0 - \epsilon)}{E_0 - \epsilon}$ и $n_t = \frac{(1 - \alpha) N E_0}{E_0 - \epsilon}$. У овом случају је $p(S) = \frac{\alpha E_0 - \epsilon}{E_0 - \epsilon}$ и $p(T) = \frac{(1 - \alpha) E_0}{E_0 - \epsilon}$.
- (в) Статистичка дефиниција ентропије је $S = k_b \ln \Omega$, где је Ω статистичка тежина, односно број микро стања који одговара истом макро стању. У овом случају $\Omega = \frac{N!}{(\alpha N)!((1 - \alpha)N)!}$ број начина како можемо од N људи одабрати αN срећних и $(1 - \alpha)N$ тужних. Користећи Стирлингову апроксимацију:

$$\ln \Omega \approx N \ln N - (\alpha N) \ln(\alpha N) - (1 - \alpha) N \ln((1 - \alpha) N).$$

Одавде је ентропија система:

$$S = N k_b \left(\alpha \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \right).$$

- (г) При $\alpha \rightarrow \alpha + d\alpha$ имамо $dQ = N E_0 d\alpha$ и $dS = \frac{dS}{d\alpha} d\alpha$. Рачунањем првог извода S по α и заменом у релацију $T = \frac{dQ}{dS}$ добијамо:

$$T = \frac{E_0}{k_b} \frac{1}{\ln(1 - \alpha) - \ln \alpha}.$$

- (д) Да би сваки човек био тужан мора бити $\alpha = 0$ односно $\alpha \rightarrow 0$, одакле заменом у израз за температуру добијамо $T \rightarrow 0$. Да би сваки други човек био тужан мора бити $\alpha = \frac{1}{2}$ одакле $T \rightarrow \infty$. Када би сваки четврти човек био срећан, $\alpha = \frac{1}{4}$ па изражавањем E_0 из израза за температуру и заменом бројних вредности добијамо: $E_0 = 4,4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

- (ђ) У претходном делу видели смо да $T \rightarrow 0$ када $\alpha \rightarrow 0$. Трећи закон термодинамике налаже

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0,$$

одакле:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha) = 0$$

коришћењем Лопиталовог правила на чланове облика $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\alpha^2}{\alpha} = 0$.

- (е) У првом делу задатка показали смо да је $\frac{p(s)}{p(t)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$. Експоненцирањем израза за температуру и сређивањем добијамо $\frac{\alpha}{1 - \alpha} = e^{\frac{-E_0}{k_b T}}$. На основу облика, однос задовољава такозвану *Болцманову расподелу*.