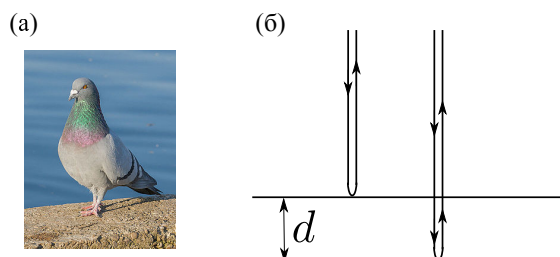




Задатак 1: Боје голубова и лептирова (10 поена)

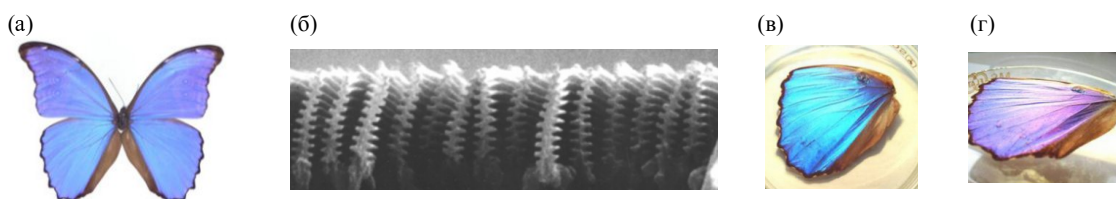
Боје многих лептирова и птица су последица ефеката интерференције и дифракције светлости на структурама које се налазе на њиховој површини. Као последица тих ефеката, рефлектована светлост неке таласне дужине је знатно интензивнија, па посматрач види боју која одговара тој таласној дужини. У овом задатку можете сматрати да је опсег таласних дужина видљиве светлости од 400 до 700 nm, при чему љубичастој боји одговара опсег од 400 до 450 nm, плавој од 450 до 510 nm, зеленој од 510 до 560 nm, жутој од 560 до 620 nm и црвеној од 620 до 700 nm.

- (а) (2 поена) Вероватно сте некад приметили да врат голуба садржи области зелене и љубичасте боје, а ако нисте то можете видети на слици 1(а). У тој области голуб на површини тела има веома танке љуспице које се могу моделовати планпаралелном плочом дебљине $d = 650$ nm и индекса преламања $n = 1,50$ приказаном на слици 1(б). Размотрити равански монохроматски електромагнетски талас који је усмерен нормално на површину љуспице. За које вредности таласне дужине ће доћи до конструктивне интерференције зрака рефлектованог од горње површине љуспице и зрака рефлектованог од доње површине љуспице приказаних на слици 1(б)? Користећи добијени резултат прокоментарисати зашто видимо зелену и љубичасту боју на врату голуба.



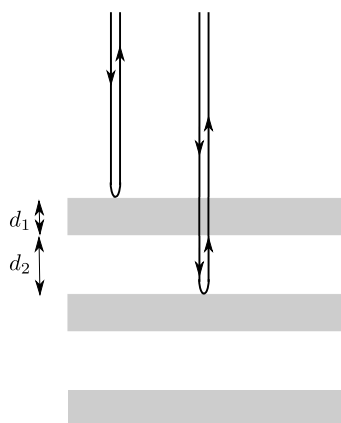
Слика 1: (а) Голуб; (б) шематски приказ зрака рефлектованог од горње површине љуспице и зрака рефлектованог од доње површине љуспице.

Један од најпроучаванијих лептирова је морфо лептир, приказан на слици 2(а). Љуспице на крилима овог лептира садрже сложене структуре приказане на слици 2(б) које подсећају на полице са књигама у библиотеци. Последица такве структуре љуспица је да кад се крила посматрају нормално на површину види се плава боја [слика 2(в)], а кад се посматрају под углом од око 45° , види се љубичаста боја [слика 2(г)].

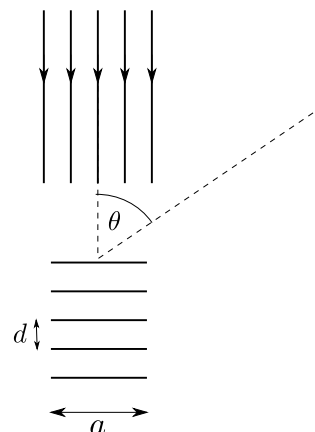


Слика 2: (а) Морфо лептир; (б) структура љуспица морфо лептира; (в) изглед крила посматраних нормално на њихову површину; (г) изглед крила посматраних под углом од око 45° .

- (б) (2 поена) У овом делу задатка ћемо апроксимирати сложену структуру љуспице лептира периодичним низом слојева материјала индекса преламања $n_1 = 1,53$ и ваздуха, приказаним на слици 3. Дебљина слоја материјала је $d_1 = 65,0$ nm, а дебљина слоја ваздуха је $d_2 = 130$ nm. Размотрити равански монохроматски електромагнетски талас који је усмерен нормално на површину љуспице. За које вредности таласне дужине ће доћи до конструктивне интерференције таласа рефлектованог од горње површине првог слоја материјала и горње површине другог слоја материјала, приказаних на слици 3? Користећи добијени резултат прокоментарисати зашто видимо да је лептир плаве боје кад се посматра нормално на површину љуспице.



Слика 3: Модел љуспице по коме се она састоји од периодичног низа слојева материјала индекса преламања n_1 и ваздуха.



Слика 4: Сложенији модел љуспице.

- (в) **(4,5 поена)** Иако модел разматран у делу под (б) може да објасни зашто је лептир плаве боје кад се посматра нормално на површину крила, такав модел не може у потпуности да објасни ефекте промене боје са променом угла посматрања. Надаље ћемо размотрити сложенији модел љуспице лептира приказан на слици 4, по коме се љуспица састоји од низа танких паралелних плочица ширине a . Растојање између суседних плочица је d . Број плочица је M . Према љуспици је усмерен равански монохроматски електромагнетски талас таласне дужине λ_0 нормално на њену површину, видети слику 4. Дужина плочице у правцу нормалном на раван слике 4 је знатно већа од a , d и λ_0 . Сматрати да се интензитет светлости при проласку кроз једну плочицу мења занемарљиво, тј. да је коефицијент трансмисије кроз плочицу близак јединици и много већи од коефицијената рефлексије и апсорпције. Удаљени посматрач чији је положај такав да је угао између правца упадног и рефлектованог таласа θ мери интензитет таласа $I(\theta) = c_0 f(\theta)$, где је c_0 константа, а $f(\theta)$ је функција која у себи садржи и константе a , d , λ_0 и M , чије типичне вредности су дате у делу задатка (г). Одредити функцију $f(\theta)$.
- (г) **(1,5 поена)** Параметри структуре су $a = 300 \text{ nm}$, $d = 235 \text{ nm}$, $M = 9$. Скицирати графике зависности $f(\theta)$ за $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ (у потпуности ће бити признато решење у коме се ова функција израчуна за неколико репрезентативних вредности θ и на основу тога скицира график). Користећи те графике прокоментарисати зашто се види плава боја кад се крило лептира посматра нормално на површину, а зашто љубичаста кад се посматра под углом од око 45° .

Математички подсетник

Приликом решавања задатка могу вам бити корисне неке од следећих формула:

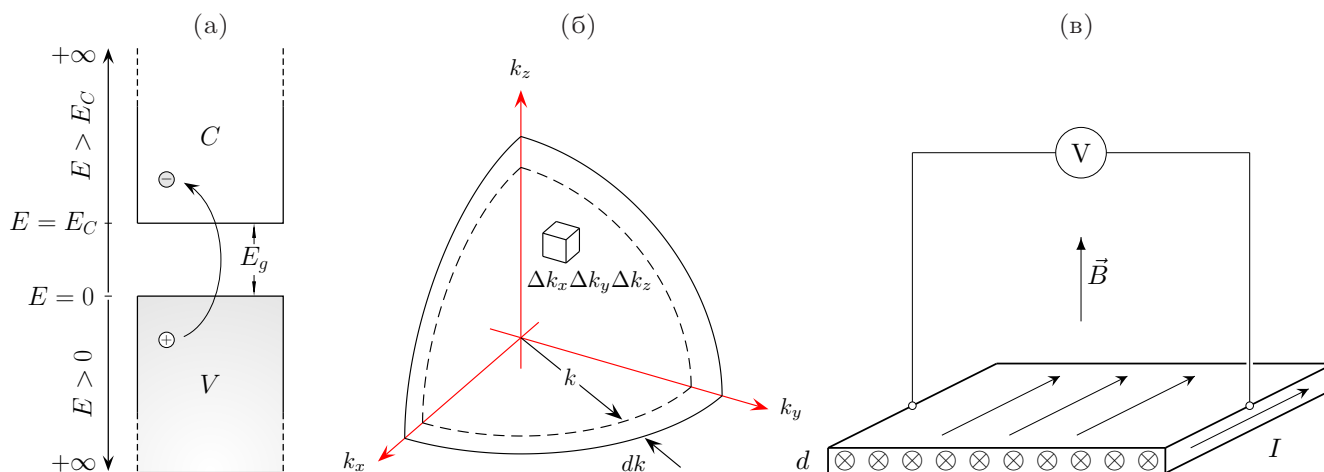
$$\sum_{i=0}^N \cos(\alpha + i\beta) = \frac{\sin \frac{(N+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \left(\alpha + \frac{N\beta}{2} \right),$$
$$\sum_{i=0}^N \sin(\alpha + i\beta) = \frac{\sin \frac{(N+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\alpha + \frac{N\beta}{2} \right).$$



Задатак 2: Холов коефицијент полупроводника (10 поена)

У овом задатку помоћи ћемо малој Ради да теоријски предвиди резултате мерења Холовог коефицијента чистог силицијумског полупроводника на собној температури. Прво ћемо се подсетити основа физике полупроводника и описати расподелу електрона и шупљина у овим материјалима. Потом ћемо увести концепт густине стања и применити га на силицијумски полупроводник. Тек онда смо спремни да размотримо плочицу силицијума у магнетном пољу, као реалистичан и мерљив пример Холовог ефекта – наше главне теме.

Полупроводник је материјал код којег су валентна и проводна зона одвојене енергијским процепом $E_g = E_C - E_V$, где је E_C најнижа енергија проводне зоне, а E_V највиша енергија валентне зоне. Једноставности ради узмемо да је $E_V = 0$. На температури апсолутне нуле сви електрони се налазе у валентној зони и материјал је изолатор. Приликом повећавања температуре долази до преласка неких електрона из валентне у проводну зону и материјал постаје проводник. Прелазак електрона из стања валентне зоне са енергијом $E_n < 0$ у проводну зону оставља шупљину у валентној зони која се третира као честица наелектрисања $(+e > 0)$ супротног од електрона $(-e < 0)$ са енергијом $E_p = -E_n > 0$. Енергије шупљина (које постоје само у валентној зони) су ненегативне са смером пораста енергија од $E = E_V = 0$ (врх валентне зоне) до $E = +\infty$ (дубоко у валентној зони), док су енергије електрона у проводној зони позитивно растуће од $E = E_C$ (дно проводне зоне) до $E = +\infty$ (врх проводне зоне). Видети слику 5(а). Разматрањем шупљина у потпуности је узет у обзир ефекат свих електрона из валентне зоне, тако да је за опис електричних особина материјала довољно разматрати електроне из проводне и шупљине из валентне зоне. У овој слици се шупљине енергија $E \geq 0$ могу у целости разматрати као слободне честице, док се сви електрони налазе у константном ефективном потенцијалу кристалне решетке енергије E_C , па су њихове енергије $E \geq E_C$. Електроне и шупљине у полупроводнику можемо моделовати неинтерагујућим фермионским честицама спина $1/2$ и масе m_n за електроне, тј. m_p за шупљине, у тродимензионалној потенцијалној јами облика квадра велике запремине V , таквој да је потенцијална енергија унутар јаме једнака 0 за шупљине и E_C за електроне, а бесконачна је ван ње. Честице ће се у овој јами распоређивати по нивоима енергија E . Сваки ниво представља орбитално стање које описујемо јединственом уређеном тројком таласних бројева (k_x, k_y, k_z) , чију укупну квантовану енергију налазимо као збир енергија квантованих дуж сваког правца понаособ, а дозвољене вредности таласног броја за дати правец налазимо независно од два преостала правца. Под квантованом енергијом подразумевамо разлику енергије неког стања честице и константне потенцијалне енергије унутар јаме.



Слика 5: (а) Валентна зона (V) и проводна зона (C) у полупроводнику у којем је шупљина (+) настала екситацијом електрона (-). (б) Једно орбитално стање запремине $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ унутар осмине сферне љуске дебљине dk и радијуса k . (в) Део Si плочице дебљине d у магнетном пољу $\vec{B}$ кроз коју тече струја јачине I , са идеалним волтметром V који мери трансверзални напон.

Желимо да одредимо густину стања $D(E)$ ових честица у зависности од њихове енергије E . $D(E)$ је дефинисано као $D(E) \equiv \frac{1}{V} \frac{dN}{dE}$, где dN представља број свих (орбиталних и спинских) стања честице у уском интервалу енергија



$(E, E + dE)$, а V је запремина јаме. Густину стања оваквог система честица можемо одредити пребројавањем орбиталних стања у првом октанту k -простора, фокусирајући се на стања са $k_x > 0, k_y > 0, k_z > 0$. Видети слику 5(б) на којој у првом октанту посматрамо $1/8$ танке сферне љуске полупречника k и дебљине dk , при чему је $k \leq \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \leq k + dk$. Орбитална стања одређена са (k_x, k_y, k_z) нису строго тачкаста, већ заузимају малу, али коначну запремину у k -простору која износи $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, где је $\Delta k_i, i \in \{x, y, z\}$ најмањи корак добијен квантовањем таласног броја k_i дуж i -осе. Дебљина љуске dk је мала, али довољно велика да се у тој љусци нађе велики број тројки таласних бројева (k_x, k_y, k_z) .

- (i) **(2 поена)** Одредити како густине стања за електроне $D_n(E)$ и шупљине $D_p(E)$ зависе од њихових енергија пребројавањем стања унутар поменуте осмине сферне љуске. У добијеним изразима могу да фигуришу и величине m_n, m_p, E_g , и универзалне физичке константе.

Сад када имамо изразе за густине стања електрона и шупљина, можемо одредити њихове концентрације, n за електроне и p за шупљине. Расподела фермиона по енергијама на температури T је Ферми-Диракова (ФД) и дата је изразом $f(E, T) = \frac{1}{\exp(\frac{E - E_F}{k_B T}) + 1}$, где је k_B Болцманова константа, E_F енергија Фермијевог нивоа. Како $D(E)dE$ представља број стања по јединици запремине на енергијама $(E, E + dE)$, а $f(E, T)$ даје вероватноћу да су стања са том енергијом на температури T попуњена, следи да $D(E)f(E, T)dE$ представља концентрацију фермиона са енергијама између $(E, E + dE)$.

- (ii) **(1 поен)** Расподела електрона по енергијским нивоима је $f_n(E, T) = f(E, T)$. Расподелу шупљина по енергијским нивоима на температури T , $f_p(E, T)$ налазимо тако што присуство једне шупљине енергије $E > 0$ посматрамо као одсуство једног електрона енергије $-E < 0$. Одредити зависност $f_p(E, T)$. У добијеном изразу може да фигурише и величина E_F и универзалне физичке константе.

- (iii) **(2 поена)** У функцији од T, m_n, m_p , и E_g одредити концентрације електрона n и шупљина p чистог силицијума, користећи изразе за густине стања из дела (i), као и добијене изразе за расподелу по енергијама. На собној температури ($k_B T$ врло мало наспрам карактеристичних енергија) се може користити апроксимација $\frac{1}{\exp(\frac{E \pm E_F}{k_B T}) + 1} \approx \exp(-\frac{E \pm E_F}{k_B T})$. Ако је потребно, користити да је одређени интеграл $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2$. У добијеном изразу могу да фигуришу и универзалне физичке константе.

- (iv) **(1 поен)** Масе електрона и шупљина, m_n и m_p , су у литератури познате под именом *ефективне масе*. Оне су код чистог силицијума на собној температури ($T = 300$ К) приближно једнаке, тј. $m_n \approx m_p \approx m_e$, где је m_e маса слободног електрона. Користећи ову чињеницу одредити енергију Фермијевог нивоа E_F у функцији од E_g .

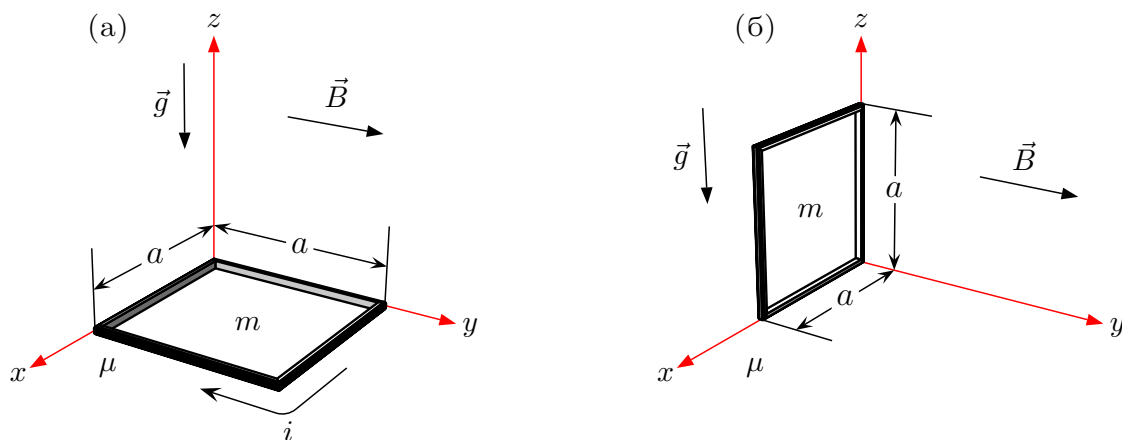
Сада смо извели све потребне састојке да проучимо Холов ефекат. Дефинишимо шта то тачно Рада жели да израчуна. На слици 5(в) је приказан део полупроводничке плочице силицијума дебљине d кроз коју протиче једносмерна струја сталне јачине I у приказаном смеру. Плочица се налази у стационарном хомогеном магнетном пољу индукције B које делује нормално на плочицу у смеру датом на слици. Идеалан волтметар V на слици мери трансверзални напон U . Магнетно поље делује на слободне електроне и шупљине тако што доводи до нагомилавања наелектрисања на једној страни плочице и наелектрисања супротног знака на другој. Ово доводи до стварања трансверзалног напона U чије електростатичко поље се супроставља даљем нагомилавању. У стационарном режиму, утицаји индукованог електричног поља и магнетног поља на носиоце наелектрисања се изједначавају. У даљем тексту претпостављамо да се ради о стационарном режиму. Холов коефицијент се дефинише као $R_H \equiv \frac{Ud}{BI}$.

- (v) **(3 поена)** Извести израз за Холов коефицијент R_H полупроводничке плочице са слике 5(в) у функцији од n, p, μ_n, μ_p , и универзалних физичких константи, где су редом μ_n и μ_p покретљивости електрона и шупљина у материјалу. Покретљивост ($\mu \geq 0$) носиоца наелектрисања q даје везу између његове успостављене брзине $\vec{v}$ у смеру укупне спољашње електромагнетне силе $\vec{F}_{em}$ која делује на наелектрисање, тј. $|q| \vec{v} = \mu \vec{F}_{em}$. Занемарити квантне ефекте електричног и магнетног поља на електроне и шупљине.

- (vi) **(1 поен)** Израчунати вредност Холовог коефицијента на собној температури $T = 300$ К користећи податке за чист силицијум: $E_g = 1,124$ eV, $\mu_n = 1350 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, $\mu_p = 450 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, $\hbar \equiv h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J·s, где је $\hbar$ редукована Планкова константа h .



Задатак 3: (Супер)проводни рам у магнетном пољу (10 поена)



Слика 6: (а) Проводни квадратни рам у магнетном пољу положен на хоризонталној подлози. (б) Суперпроводни рам у магнетном пољу постављен усправно на хоризонталној подлози.

- (а) Проводни квадратни рам димензија $a \times a$ и масе m направљен је од хомогене ваљкасте жице занемарљиве дебљине. Рам се држи водоравно на хоризонталној подлози (xy -раван) у гравитационом пољу убрзања $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, $g > 0$. Кроз рам тече стална електрична струја јачине $i > 0$ у смеру датом на слици 6(а), која се одржава минијатурним струјним генератором у раму. У простору делује хомогено стационарно магнетно поље индукције $\vec{B} = B\vec{e}_y$, $B > 0$. Анализирајмо обртање рама око x -осе по отпуштању, при чему страница рама која се подудара са x -осом све време не проклизавајући остаје на подлози. Коефицијент самоиндукције рама је занемарљив, као и отпор ваздуха.
- (0,5 поена)** Одредити момент инерције рама I у односу на x -осу као осу ротације која пролази кроз његову страну у функцији од m и a .
 - (0,5 поена)** Нека је ϵ бездимензиони параметар дефинисан као $\epsilon \equiv Bai/(mg) > 0$. За које вредности параметра ϵ рам остаје непомичан на хоризонталној подлози по отпуштању?
 - (2,5 поена)** Размотримо сада ситуацију у којој је ϵ такво да долази до ротације рама око x -осе, чија страница остаје у контакту са подлогом током обртања. Коефицијент трења клизања између подлоге и рама је такав да се проклизавање рама може занемарити. Нека је θ тренутни угао који раван рама заклапа са xy -равни током ротације, при чему се у анализи кретања у најширем опсегу углова ограничавамо на $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Одредити при ком углу θ ће доћи до потпуног одвајања рама од подлоге током ротације у зависности од вредности параметра ϵ . Кретање рама од тренутка потпуног одвајања не разматрати.
 - (1,5 поена)** Нека је у овом случају коефицијент трења клизања између рама и подлоге познат и износи μ . Одредити при ком углу θ ће ипак доћи до проклизавања рама по подлози у функцији од μ и параметра ϵ који доводи до ротације рама око своје стране која пролази кроз x -осу. Кретање рама од тренутка проклизавања не разматрати.
- (б) У овом делу задатка размотрићемо суперпроводни квадратни рам без струјног генератора идентичне масе, геометрије и димензија као у делу задатка под (а). Материјал од којег је рам направљен је суперпроводан, што значи да је електрични отпор рама егзактно једнак нули, тј. $R = 0 \Omega$. Рам, у којем нема почетне јачине струје, се држи усправно (xz -раван) додирујући својом доњом страницом хоризонталну подлогу (xy -раван) и налази се у пољу Земљине теже и у идентичном магнетном пољу као у случају под (а), видети слику 6(б). Коефицијент самоиндукције рама је коначан. Ако би се рам принудно окренуо за 90° и положио на хоризонталну подлогу у њему би се индуковала електрична струја јачине i_s .



- (i) **(0,5 поена)** Одредити коефицијент самоиндукције L овог суперпроводног рама у функцији од датих вредности i_s , a , и B .

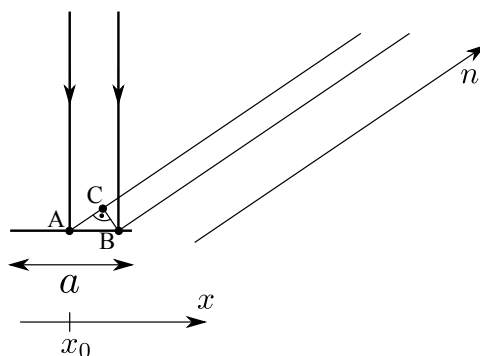
Анализирајмо сада ротационо кретање оваквог рама око x -осе по ослобађању из усправног положаја без почетне јачине струје у њему, при чему страница рама која се поклапа са x -осом све време не проклизавајући остаје на подлози огромног коефицијента трења клизања, тј. $\mu \rightarrow \infty$. По ослобађању из усправног положаја рам спонтано започне своју ротацију у првом октанту око x -осе према xy -равни. Отпор ваздуха је занемарљив.

- (ii) **(2 поена)** Нека је ϵ бездимензиони параметар дефинисан као $\epsilon \equiv Bai_s/(mg) > 0$ и нека је $\vartheta \geq 0^\circ$ тренутни угао који раван рама заклапа са xz -равни током ротације. Одредити силу нормалне реакције подлоге N у функцији од ϑ и ϵ . Такође, показати да се страница рама око које он ротира неће одвојити од подлоге ни за једну вредност параметра ϵ .
- (iii) **(1,5 поена)** Одредити силу трења F_{tr} између рама и подлоге у функцији од ϑ и ϵ . Нека је $\vartheta^{(c)}$ угао при којем ће сила трења променити свој смер. У зависности од параметра ϵ наћи $\vartheta^{(c)}$.
- (iv) **(1 поен)** У зависности од параметра ϵ одредити: угао $\vartheta^{(fin)}$ за који се рам максимално отклони у односу на вертикалну раван, затим максималну угаону брзину $\omega^{(max)}$ коју рам достиже током своје ротације, као и угао ϑ_0 при којем се тај максимум остварује. Уколико рам удари о подлогу, на њој се зауставља без одбијања.



Решење задатка 1

- (а) При рефлексији зрака од горње површине љуспице његова фаза се промени за $\phi_1 = \pi$. При двоструком пролазу зрака кроз љуспицу и рефлексији од доње површине љуспице његова фаза се промени за $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd$, где је λ таласна дужина разматраног таласа у ваздуху. До конструктивне интерференције два зрака долази када је $\phi_2 - \phi_1 = 2m\pi$, где је m ненегативан цео број. Одатле следи $\lambda = \frac{4nd}{2m+1}$. За $m = 3$ и $m = 4$ таласне дужине која задовољавају овај услов су из видљивог дела спектра и износе редом 557 nm и 433 nm. Таласна дужина од 557 nm одговара зеленој боји, а таласна дужина од 433 nm одговара љубичастој боји, па зато видимо зелене и љубичасте области на врату голууба.
- (б) При рефлексији зрака од горње површине првог слоја материјала његова фаза се промени за $\phi_1 = \pi$. При двоструком пролазу зрака кроз први слој материјала и први слој ваздуха и рефлексији од другог слоја материјала његова фаза се промени за $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} 2(n_1 d_1 + d_2) + \pi$. До конструктивне интерференције два зрака долази када је $\phi_2 - \phi_1 = 2m\pi$, где је m природан број. Одатле следи $\lambda = \frac{2(n_1 d_1 + d_2)}{m}$. Ова таласна дужина је у видљивом делу спектра једино кад је $m = 1$ и једнака је $\lambda = 459$ nm. Због тога се види да је лептир плаве боје кад је правац посматрања нормалан на површину љуспице.



Слика 1: Рефлексија светлости на једној плочици.

- (в) Размотримо прво рефлексију на горњој плочици сложене структуре. Нека је координатни систем постављен као на слици 1 и нека је n оса која се поклапа са правцем рефлектованог таласа који долази до посматрача. Допринос одговарајућој компоненти електричног поља од рефлексије на делу плочице са координатама из интервала $(x, x + dx)$ је $dE = C \cdot dx \cdot \cos[\omega t - kn + \phi(x)]$, где је C константа која зависи од интензитета упадног таласа и коефицијента рефлексије на плочици, ω је кружна фреквенција таласа, t је време, $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ је таласни вектор и $\phi(x)$ је фаза таласа. С обзиром да фаза таласа рефлектованог у x_0 , где је x_0 средиште плочице, касни за фазом таласа рефлектованог у x за $\frac{2\pi}{\lambda_0} \overline{AC}$ (видети слику 1), важи $\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (x - x_0) \sin \theta$, где је x_0 координата средишта плочице. Укупна вредност компоненте електричног поља рефлектованог таласа је онда $E(n, t) = \int_{x_0 - \frac{a}{2}}^{x_0 + \frac{a}{2}} C \cdot dx \cdot \cos[\omega t - kn + \phi(x)]$. Решавањем интеграла се добија

$$E(n, t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta} \cos[\omega t - kn + \phi(x_0)].$$

Укупна вредност електричног поља рефлектованог таласа на месту где се налази удаљени посматрач се добија сабирањем доприноса таласа рефлектованих од сваке од плочица. Фазна разлика таласа рефлектованих од две суседне плочице је $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\overline{AC} + \overline{AB})$ (видети слику 2), односно $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d + d \cos \theta)$. Укупна вредност компоненте електричног поља је онда

$$E_t(n, t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta} \sum_{i=0}^{M-1} \cos[\omega t - kn + \phi(x_0) - i\Delta\phi].$$

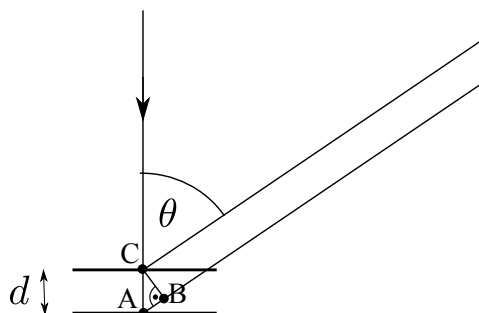


Коришћењем идентитета датог у тексту задатка се добија

$$E_t(n, t) = Ca \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta} \frac{\sin\left[\frac{M\pi d}{\lambda_0} (1 + \cos \theta)\right]}{\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda_0} (1 + \cos \theta)\right]} \cos\left[\omega t - kn + \phi(x_0) - \frac{M-1}{2} \Delta \phi\right].$$

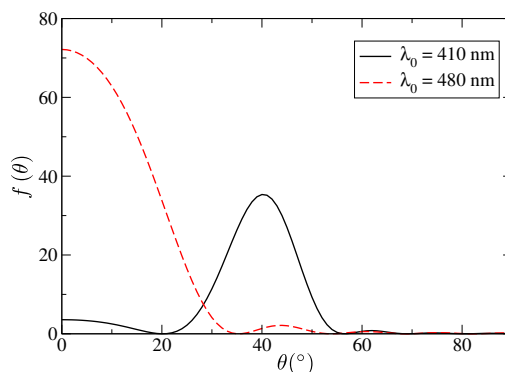
Израз испред косинусне функције представља амплитуду укупног рефлектованог таласа. Пошто је интензитет таласа сразмеран квадрату амплитуде, следи да је угаона зависност интензитета светлости коју региструје посматрач

$$I(\theta) \propto f(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta\right)^2} \frac{\sin^2\left[\frac{M\pi d}{\lambda_0} (1 + \cos \theta)\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda_0} (1 + \cos \theta)\right]}.$$



Слика 2: Рефлексја светлости од две суседне плочице.

- (г) На слици 3 је приказана зависност $I(\theta) \propto f(\theta)$ за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$. Из добијених графика се види да је за $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$ максимум рефлектоване светлости под углом $\theta = 0^\circ$, а за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ тај максимум је на $\theta = 40^\circ$. Зато гледањем љуспице под углом $\theta = 0^\circ$ видимо плаву боју, а гледањем под углом од око 45° видимо љубичасту боју.



Слика 3: Угаона зависност интензитета рефлектоване светлости $I(\theta) \propto f(\theta)$ за $\lambda_0 = 410 \text{ nm}$ и $\lambda_0 = 480 \text{ nm}$.



Решење задатка 2

Знамо да је таласна функција честице у једнодимензионалној потенцијалној јами $\psi_{k_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin(k_x x)$, где је $k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}$ чије дозвољене вредности добијамо из граничних услова. Са L_x смо обележили дужину потенцијалне јаме дуж x правца, док n_x пребројава орбитална стања и генерално узима целобројне вредности, али ћемо се по услову задатка фокусирати на позитивне, тј. $n_x = 1, 2, 3 \dots$. Енергија једног оваквог стања дуж x правца је дата изразом $E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$, која је заправо кинетичка енергија у једној димензији честице масе m . Аналогно за y и z правац добијамо одговарајуће квантоване енергије и таласне бројеве. Другим речима, k_i узима вредност $k_i = \frac{n_i \pi}{L_i}$, где је $i \in \{x, y, z\}$, L_i је дужина јаме у правцу i , а $n_i = 1, 2, 3 \dots$. Енергија једног орбиталног стања је збир енергија појединачних у сва три координатна правца и дата је изразом $E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$.

(i) Из услова квантизације следи да за сваку дозвољену вредност k_i можемо учртати по једну тачку у k -простору.

Уцртавањем свих тачака формирамо правоугаону тродимензионалну решетку са корацима $\Delta k_i = \frac{\pi}{L_i}$. Одавде видимо да ће запремина коју окупира једно орбитално стање у k -простору бити $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z} = \frac{\pi^3}{V}$,

где је V запремина јаме. Из израза за енергију једног орбиталног стања видимо да се оно налази на сфери радијуса $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Посматраћемо само први октант, јер смо се ограничили на позитивне вредности n_i . Запремину танког слоја осмине сфере добијамо као $4\pi k^2 dk/8$. Укупан број орбиталних стања у овом танком слоју је једнак односу запремине слоја и запремине коју заузима једно орбитално стање. Међутим, овај број се мора помножити са 2, јер фермиони имају две могуће вредности пројекције спина, $\pm 1/2$. Тако долазимо да броја орбиталних и спинских стања у осмини танке сферне љуске: $dN = 2 \times (4\pi k^2 dk/8)/(\pi^3/V)$. Користећи везу између k и E налазимо да је број свих стања у слоју у функцији енергије једнак $dN = \frac{Vm}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} dE$. Одавде видимо да је густина стања $D(E) = \frac{1}{V} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$. Према томе,

израз за густину стања електрона гласи $D_n(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E - E_g}$, јер под квантованом енергијом подразумевамо разлику енергије E и константне потенцијалне енергије унутар јаме $E_C = E_g$, док је за шупљине $D_p(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$.

(ii) Из дефиниције расподеле шупљина из задатка следи да је $f_p(E, T) = 1 - f_n(-E, T) = 1 - \frac{1}{\exp(\frac{-E - E_F}{k_B T}) + 1} = \frac{1}{\exp(\frac{E_F + E}{k_B T}) + 1}$.

(iii) У поставци задатка смо дефинисали концентрацију честица у интервалу енергија $(E, E + dE)$. Да бисмо добили укупну концентрацију потребно је израз интегралити по дозвољеним енергијама. Како енергије електрона расту од E_g до $+\infty$, укупна концентрација електрона ће бити $n = \int_{E_g}^{\infty} D_n(E) f_n(E) dE$. Са друге стране, како смо дефинисали енергију шупљина, укупна концентрација шупљина ће бити $p = \int_0^{\infty} D_p(E) f_p(E) dE$. Из израза изостављамо зависност од температуре, јер се у даљем концентришемо на фиксну, собну температуру. Ако применимо апроксимацију ФД расподеле која је дата у формулацији задатка, за концентрацију електрона имамо интеграл:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_g}^{\infty} \sqrt{E - E_g} \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) dE,$$

а увођењем смене $\xi = \frac{E - E_g}{k_B T}$ добијамо:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n k_B T}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_F - E_g}{k_B T}\right) \int_0^{\infty} \sqrt{\xi} e^{-\xi} d\xi.$$



Користећи резултат из поставке задатка за одређени интеграл добијамо да је концентрација електрона:

$$n = 2 \left(\frac{m_n k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_F - E_g}{k_B T}\right).$$

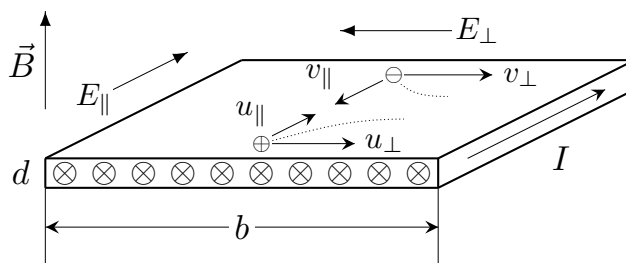
Сличним поступком долазимо до израза за концентрацију шупљина:

$$p = 2 \left(\frac{m_p k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_F}{k_B T}\right).$$

У случају чистог силицијума све шупљине морају доћи од електрона у проводној зони, што значи $-n + p = 0$.

Одавде следи да је $n = p = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (m_n m_p)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$, јер се n добија кореновањем израза np .

- (iv) Изједначавањем израза за густине електрона и шупљина можемо извести израз за енергију Фермијевог нивоа $E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right)$. Како су у нашем случају масе идентичне $m_n \approx m_p \approx m_e$, имамо да се Ферми ниво налази тачно на средини између проводне и валентне зоне, односно $E_F = E_g/2$.



Слика 4: Део Si плочице дебљине d и ширине b кроз коју протиче струја сталне јачине I услед поља $E_{\parallel}$ електромоторне силе. Компоненте тренутних брзина дуж правца поља $E_{\parallel/\perp}$ су: $u_{\parallel/\perp}$ за шупљине и $v_{\parallel/\perp}$ за електроне.

- (v) У узорку се налазе електрони и шупљине који се при протоку струје крећу у супротним смеровима дуж правца тока. Магнетно поље скреће наелектрисања и доводи до њиховог нагомиланања на странама плочице. Видети слику 4. Због засад непознате разлике у броју нагомиланих електрона и шупљина, претпоставимо да ће десна страна плочице бити наелектрисана позитивно, а лева негативно. Ово ствара трансверзално електрично поље $E_{\perp} = U/b$ у смеру датом на слици, где је b ширина плочице. Брзину електрона можемо разложити на лонгитудиналну компоненту $v_{\parallel}$ дуж правца струје и компоненту трансверзалну на тај правац $v_{\perp}$. Аналогно уводимо и за шупљине, где смо лонгитудиналну компоненту означили са $u_{\parallel}$, а трансверзалну са $u_{\perp}$. У стационарном режиму, струје електрона и шупљина се морају изједначити дуж трансверзалног правца, што значи $en v_{\perp} = ep u_{\perp}$. Компоненте брзина, $u_{\perp}$ и $v_{\perp}$, потичу од трансверзалног електричног поља $E_{\perp}$, као и поља Лоренцових сила: $v_{\parallel} B$ за електроне и $u_{\parallel} B$ за шупљине. Примењујући дефиницију покретљивости наелектрисања дуж трансверзалног и лонгитудиналног правца долазимо до: $v_{\perp} = \mu_n(v_{\parallel} B + E_{\perp}) = \mu_n^2 E_{\parallel} B + \mu_n E_{\perp}$ и $u_{\perp} = \mu_p(u_{\parallel} B - E_{\perp}) = \mu_p^2 E_{\parallel} B - \mu_p E_{\perp}$, где смо лонгитудиналне брзине честица изразили као $u_{\parallel} = \mu_p E_{\parallel}$ и $v_{\parallel} = \mu_n E_{\parallel}$. $E_{\parallel}$ представља лонгитудиналну компоненту електричног поља која доводи до протока сталне струје јачине I , као на слици 4. Јачину струје I можемо написати у виду производа укупне густине струје и површине попречног пресека bd , тј. $I = e(nv_{\parallel} + pu_{\parallel})bd = eE_{\parallel}(n\mu_n + p\mu_p)bd$. Уврштавањем израза за брзине дуж трансверзалног правца у случају електрона и шупљина у услов стационарности добијамо $E_{\parallel} B(p\mu_p^2 - n\mu_n^2) = E_{\perp}(n\mu_n + p\mu_p)$. Из добијеног и израза за јачину струју следи да је трансверзални напон $U = \frac{BI}{d} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$.

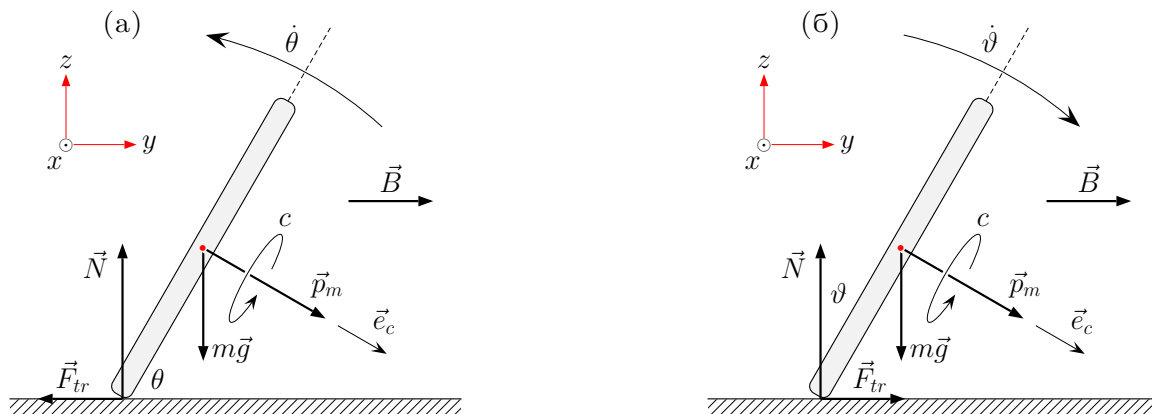
Одавде видимо да је израз за Холов коефицијент $R_H = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{e(n\mu_n + p\mu_p)^2}$. Да смо претпоставили супротан смер трансверзалног електричног поља $E_{\perp}$, које потиче од нагомиланих наелектрисања, добили бисмо исти израз са супротним знаком.



- (vi) Користећи дате вредности налазимо да је концентрација електрона и шупљина $n = p \approx 0,902 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Уврштавањем концентрације у израз за Холов коефицијент добијамо $R_H \approx -346 \text{ m}^3/\text{C}$. Видимо да ће знак Холовог коефицијента зависити од покретљивости носилаца наелектрисања. У нашем случају када су концентрације исте видимо да знак долази директно од разлике у покретљивостима μ_n и μ_p . Како смо претпоставили да се на десној страници нагомилавају позитивна, а на левој негативна наелектрисања, добили смо негативан знак Холовог коефицијента. Ово значи да је почетна претпоставка требала да буде обрнута. Одређивањем знака R_H је могуће директно одредити доминантни тип носилаца наелектрисања у материјалу.

Решење задатка 3

- (a) (i) Момент инерције рама у односу на x -осу износи $I = ma^2/4 + ma^2/6 = 5ma^2/12$. Први члан у збиру потиче од стране рама масе $m/4$ која се налази на растојању a од осе ротације, док други члан описује два члана једнаких доприноса у моменту инерције, сваки $1/3 \times ma^2/4$. Нема доприноса у моменту инерције од стране рама која пролази кроз осу ротације, јер се дебелина рама занемарује.
- (ii) Магнетни момент рама који лежи на хоризонталној подлози износи $-p_m \vec{e}_z$, где је $p_m = ia^2$. Овај момент заклапа угао од 90° са вектором магнетне индукције $\vec{B}$ генеришући момент Амперових сила $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = -p_m B \vec{e}_z \times \vec{e}_y = ia^2 B \vec{e}_x$. Заправо, како нема резултанте Амперових сила које делују на рам у хомогеном магнетном пољу, реч је о спрегу магнетних сила који би доводио до ротације у $\vec{e}_x$ смеру по правилу десног завртња. Момент силе Земљине теже у односу на x -осу делује у супротном смеру и износи $-mg(a/2)\vec{e}_x$. Нападна тачка силе реакције подлоге је у критичном тренутку (при тенденцији одвајања) померена према средишту стране рама која се поклапа са x -осом, те је њен момент сила нула. Ротације рама нема уколико важи $mga/2 \geq ia^2 B$, тј. за $\epsilon \in (0, 1/2]$.



Слика 5: (a) Тренутни положај проводног рама током ротације око x -осе од y - ка z -оси. (б) Тренутни положај суперпроводног рама током ротације око x -осе од z - ка y -оси.

- (iii) Тренутни магнетни момент рама износи $\vec{p}_m = (\pm i)\vec{S}_c = p_m \vec{e}_c$, где је $p_m = ia^2$ а $\vec{e}_c$ јединични орт контуре по правилу десног завртња. Изабрана контура c се по смеру подудара са смером сталне јачине струје i (иначе не мора), па је $p_m > 0$, јер је $\vec{S}_c = a^2 \vec{e}_c$. Узето је $+i$, а не $-i$, јер се смер јачине струје и оријентација контуре подударају, видети слику 5(a) (поглед дуж x -осе). Спрег Амперових сила у односу на било коју осу паралелну са $\vec{e}_x$ се записује у облику $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = p_m B \vec{e}_c \times \vec{e}_y = p_m B \cos \theta \vec{e}_x$, где је θ тренутни угао који рам заклапа са xy -равни. Резултанта свих Амперових сила које делују на рам је једнака нули, јер се рам налази у хомогеном магнетном пољу. Као што је приказано на слици 5(a), рам тренутне угаоне брзине $\dot{\theta}$ ротира у смеру од y - ка z -оси. Све скупа, на њега делује сила Земљине теже mg у средишту, сила нормалне реакције подлоге N , и сила трења мировања F_{tr} (нема проклизавања). Избор смера силе трења мировања је произвољан, јер F_{tr} мировања може да промени знак што је диктирано динамиком система која се покорава Њутновим законима. Овакав резон не важи у случају проклизавања када је смер силе трења увек супротан од тренутне брзине контактне тачке рама у односу на подлогу.

Применом II Њутновог закона за ротационо кретање рама момента инерције I тренутног угаоног убрзања $\ddot{\theta}$ добијамо

$$I\ddot{\theta} = p_m B \cos \theta - mga \cos \theta / 2. \quad (1)$$

Центар масе рама има тренутно тангенцијално убрзање $a\ddot{\theta}/2$, па се према II Њутновом закону за тренутно транслационо кретање центра масе рама долази до

$$ma\ddot{\theta}/2 = N \cos \theta + F_{tr} \sin \theta - mg \cos \theta. \quad (2)$$



Центар масе рама има и нормално убрзање $a\dot{\theta}^2/2$, јер се креће по кружници радијуса $a/2$, па се П
Њутновим законом добија

$$ma\dot{\theta}^2/2 = mg \sin \theta + F_{tr} \cos \theta - N \sin \theta. \quad (3)$$

Једначина (1) се може записати и у интегралном облику множењем са елементарном променом угла $d\theta$
у смеру ротације. Наиме, $\ddot{\theta}d\theta = (d\dot{\theta}/dt)d\theta = d(\dot{\theta}^2/2)$. Са друге стране, $\cos \theta d\theta = d(\sin \theta)$. На тај начин (1)
постаје

$$d(I\dot{\theta}^2/2 + mga \sin \theta/2 - ia^2 B \sin \theta) = 0, \quad (4)$$

што представља Закон одржања енергије

$$I\dot{\theta}^2/2 + mga \sin \theta/2 + W_p = \text{const}. \quad (5)$$

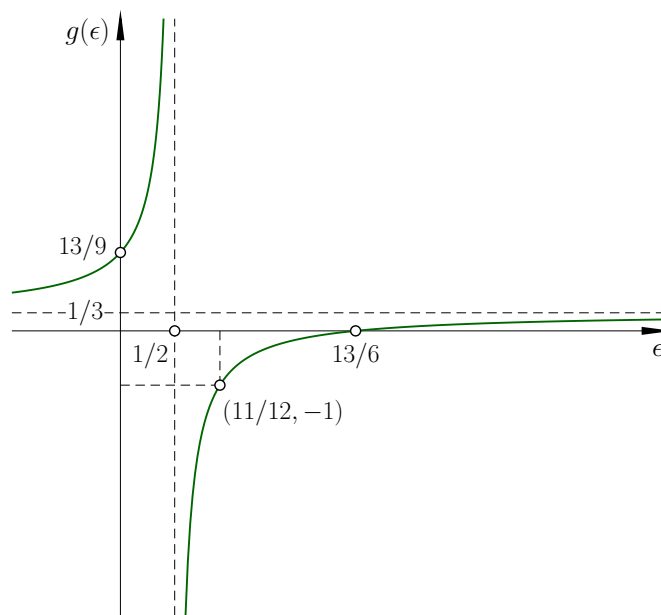
Из почетних услова ($t = 0$) имамо да је $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = 0$, па је $\text{const} = 0$. $W_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ представља
потенцијалну енергију магнетног дипола сталне јачине струје у магнетном пољу. Заправо магнетно поље
на временском интервалу dt врши елементаран рад $dW_p = i\mathcal{E}_{ind}dt$ индукујући по Фарадејевом закону
електромоторну силу $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi_c/dt$ у раму, где је $\Phi_c = \vec{B} \cdot \vec{S}_c$ магнетни флуks у односу на контуру
 c . На крају, $dW_p = i\mathcal{E}_{ind}dt = -id\Phi_c$, тј. $W_p = -i\Phi_c = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$. Иначе, да је оријентација контуре c
имала супротан смер од i , онда би у овом извођењу на сваком месту где стоји i , требало ставити $-i$. Из
једначина (1)–(5) следе силе F_{tr} и N у функцији од θ и ϵ

$$F_{tr}(\theta, \epsilon) = \frac{9}{10}(2\epsilon - 1)mg \sin 2\theta \text{ и } N(\theta, \epsilon) = \frac{9}{10}(2\epsilon - 1)mg(\cos 2\theta - g(\epsilon)), \quad (6)$$

где је $g(\epsilon) \equiv \frac{6\epsilon - 13}{9(2\epsilon - 1)}$ (слика 6). Примећујемо да је $F_{tr}(\theta, \epsilon) \geq 0$ на интервалу који нас интересује
 $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ и $\epsilon > 1/2$, па је довољно испитати функцију $f(\theta, \epsilon) \equiv F_{tr}(\theta, \epsilon)/N(\theta, \epsilon)$ у области у којој је
она позитивна и дефинисана, тј. за $N(\theta, \epsilon) > 0$. На основу (6) имамо да је $f(\theta, \epsilon) = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - g(\epsilon)}$. У
случају $\epsilon \in (1/2, 11/12) \Rightarrow g(\epsilon) < -1$, па је $N(\theta, \epsilon) > 0, \forall \theta \in [0^\circ, 90^\circ]$. Диференцирањем по θ се налази да
функција $f(\theta, \epsilon)$ досеже максимум у $\theta_\epsilon^{(max)} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{g(\epsilon)} < 90^\circ, \forall \epsilon \in (1/2, 11/12)$, при чему $g^{-1}(\epsilon)$ опада
од $g^{-1}(1/2) = 0$ до $g^{-1}(11/12) = -1$, а $\theta_\epsilon^{(max)}$ расте од $\theta_{1/2}^{(max)} = 45^\circ$ до $\theta_{11/12}^{(max)} = 90^\circ$, док је $f(\theta_\epsilon^{(max)}, \epsilon) =$
 $\frac{9(2\epsilon - 1)}{2\sqrt{2(11 - 12\epsilon)(3\epsilon + 1)}}$ и узима коначну вредност на посматраном интервалу параметра ϵ . Као закључак,
рам се неће потпуно одвојити од подлоге ни за једно ϵ из интервала $(1/2, 11/12)$ при угловима који нас
интересују: $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$, видети слику 7(а). Међутим, за $\epsilon \in [11/12, \infty)$, постоји могућност да је $N(\theta, \epsilon) = 0$
за неко $\theta \leq 90^\circ$. Овај случај, $\epsilon \in [11/12, \infty)$, доводи до ситуације у којој $f(\theta, \epsilon) \rightarrow \infty$ за неки асимптотски
угао $\theta_\epsilon^{(asym)}$. Област $\theta \in (\theta_\epsilon^{(asym)}, 90^\circ)$ нас посебно не интересује ($N(\theta, \epsilon) < 0$ је физички немогуће), већ
област у којој је $0^\circ \leq \theta < \theta_\epsilon^{(asym)}$. За асимптотски угао важи да је $\theta_\epsilon^{(asym)} = \frac{1}{2} \arccos g(\epsilon)$. Функција $g(\epsilon)$
расте од $g(11/12) = -1$ до $g(\epsilon \rightarrow \infty) \rightarrow 1/3$, док асимптотски угао опада до свог минимума тако да је:
 $90^\circ \geq \theta_\epsilon^{(asym)} > (1/2) \arccos \sqrt{1/3} = \arccos \sqrt{2/3} \approx 35,264^\circ$, видети слику 7(б). За $\epsilon \in [11/12, \infty)$ рам се
потпуно одваја од подлоге при $\theta = \theta_\epsilon^{(asym)}$, при чему $\theta_\epsilon^{(asym)}$ опада од 90° до око $35,264^\circ$ како ϵ расте од
 $11/12$ до ∞ . Дакле, ако $\theta_\epsilon^{(asym)}$ генерално именујемо као угао при којем ће се рам потпуно одвојити од
подлоге, закључујемо да

$$\theta_\epsilon^{(asym)} = \begin{cases} \text{не постоји} & 1/2 < \epsilon < 11/12, \\ \frac{1}{2} \arccos g(\epsilon) & 11/12 \leq \epsilon < \infty. \end{cases}$$

Интересантно је уочити да ће у другом случају, $11/12 \leq \epsilon < \infty$, долазити до проклизавања у асимптотским
ситуацијама када се рам потпуно одваја од подлоге, јер постоји решење једначине $\mu = f(\theta, \epsilon)$ за $\mu \rightarrow \infty$
(екстремно храпава подлога). Међутим, реч је о спекулацијама у бесконачности, те је тешко тврдити да
ли прво долази до проклизавања или до потпуног одвајања.



Слика 6: График функције $g(\epsilon) = \frac{6\epsilon - 13}{9(2\epsilon - 1)}$.

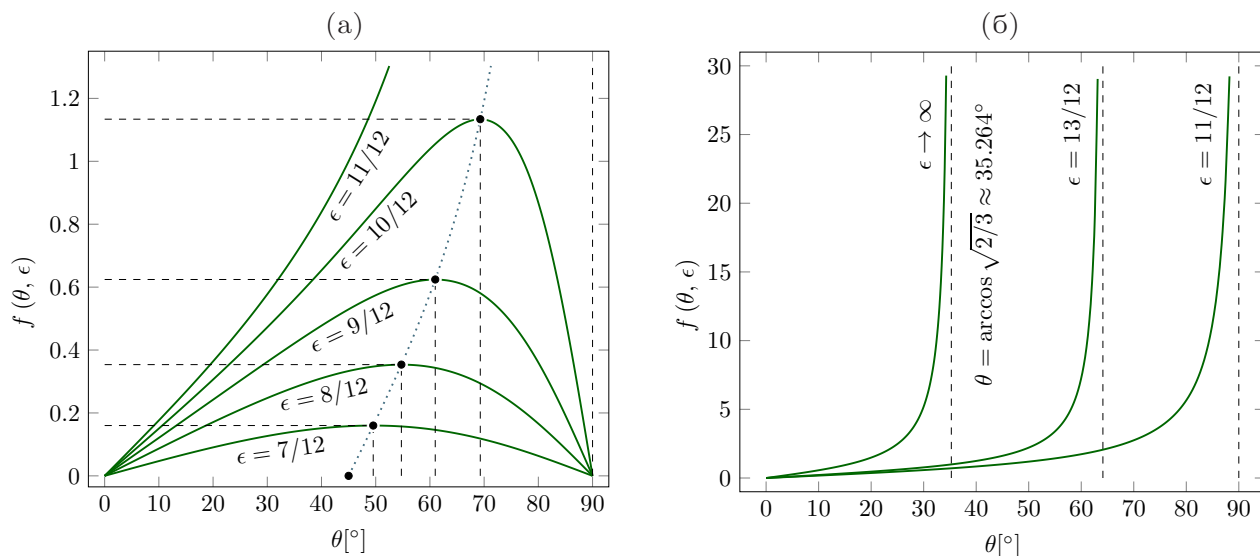
(iv) У овом делу решавамо једначину $\mu = f(\theta, \epsilon)$ за случај проклизавања. Осврнимо се прво на интервал $\epsilon \in (1/2, 11/12)$. Онда када је $\mu > f(\theta_{\epsilon}^{(max)}, \epsilon) = \frac{9(2\epsilon - 1)}{2\sqrt{2(11 - 12\epsilon)(3\epsilon + 1)}} \equiv \mu_c$ никада не долази до проклизавања.

У противном, за $\mu \leq \mu_c$, рам проклизава при углу $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$, где једнакост важи за $\mu = \mu_c$. На овом ϵ интервалу, угао θ_{ϵ}^* се налази као решење једначине $\sin 2\theta = \mu(\cos 2\theta - g(\epsilon))$, тј. $\cos(2\theta + \varphi) = g(\epsilon) \cos \varphi$, где је $\cos \varphi \equiv \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$. Заправо, $\theta_{\epsilon}^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{\mu^2 g(\epsilon) + \sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)}}{1 + \mu^2}$ које је решење мање вредности,

тј. $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$ у области $1/2 < \epsilon < 11/12$. После краћих трансформација, неједнакост $\theta_{\epsilon}^* \leq \theta_{\epsilon}^{(max)}$ се преводи у $g(\epsilon)\sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)} \leq 1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)$, што увек важи у овој области, јер је $-\infty < g(\epsilon) < -1$, а једнакост се добија за $\theta_{\epsilon}^* = \theta_{\epsilon}^{(max)} \Leftrightarrow g^2(\epsilon) = (1 + \mu^2)/\mu^2$. У области $11/12 \leq \epsilon < \infty$ увек стоји да је $\theta_{\epsilon}^* < \theta_{\epsilon}^{(asym)}$ без ограничења на μ . Ова строга неједнакост се своди на $\sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)} > g(\epsilon)$, што је тачно с обзиром на $-1 \leq g(\epsilon) < 1/3$. Као пример, $\epsilon = 11/12 \Rightarrow g = -1 \Rightarrow \theta_{11/12}^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$, што даје $\theta_{11/12}^* = 45^\circ$ за $\mu = 1$. У закључку,

$$\theta_{\epsilon}^* = \begin{cases} \text{не постоји} & \mu_c < \mu < \infty \wedge 1/2 < \epsilon < 11/12, \\ \frac{1}{2} \arccos \frac{\mu^2 g(\epsilon) + \sqrt{1 + \mu^2 - \mu^2 g^2(\epsilon)}}{1 + \mu^2} & (0 \leq \mu \leq \mu_c \wedge 1/2 < \epsilon < 11/12) \vee (0 \leq \mu < \infty \wedge 11/12 \leq \epsilon < \infty). \end{cases}$$

- (б) (i) Закон одржања магнетног флуksа у суперпроводницима гласи: $\Phi_c^{(ext)} + \Phi_c^{(self)} = const$, где је $\Phi_c^{(ext)} = \vec{B} \cdot \vec{S}_c = Ba^2 \cos \vartheta$ спољашњи магнетни флуks у односу на контуру c , док је $\Phi_c^{(self)} = Li(\vartheta)$ сопствени магнетни флуks који се противи промени спољашњег индуковањем тренутне струје јачине $i(\vartheta)$. Видети слику 5(б). Укупан магнетни флуks не сме да се мења у суперпроводницима, јер по Омовом закону нема укупног индукваног напона ($R = 0 \Omega$). Почетна вредност укупног магнетног флуksа ($\vartheta = 0^\circ$) износи Ba^2 , а крајња ($\vartheta = 90^\circ$) при принудном обртању износи Li_s , па је коефицијент самоиндукције стога $L = Ba^2/i_s$. Одавде добијамо да је $i(\vartheta) = i_s(1 - \cos \vartheta)$.



Слика 7: (а) Угаона зависност функције $f(\theta, \epsilon)$ за неколико вредности параметра ϵ таквих да је: (а) $1/2 \leq \epsilon \leq 11/12$ и (б) $11/12 \leq \epsilon < \infty$.

- (ii) Као у првом делу задатка под (а), једначине кретања по II Њутновом закону за смер ротације дат на слици 5(б) записујемо у виду

$$I\ddot{\vartheta} = mga \sin \vartheta / 2 - p_m B \sin \vartheta, \quad (7)$$

$$ma\ddot{\vartheta}/2 = F_{tr} \cos \vartheta - N \sin \vartheta + mg \sin \vartheta, \quad (8)$$

$$ma\dot{\vartheta}^2/2 = mg \cos \vartheta - N \cos \vartheta - F_{tr} \sin \vartheta. \quad (9)$$

Закон одржања енергије у овом случају гласи

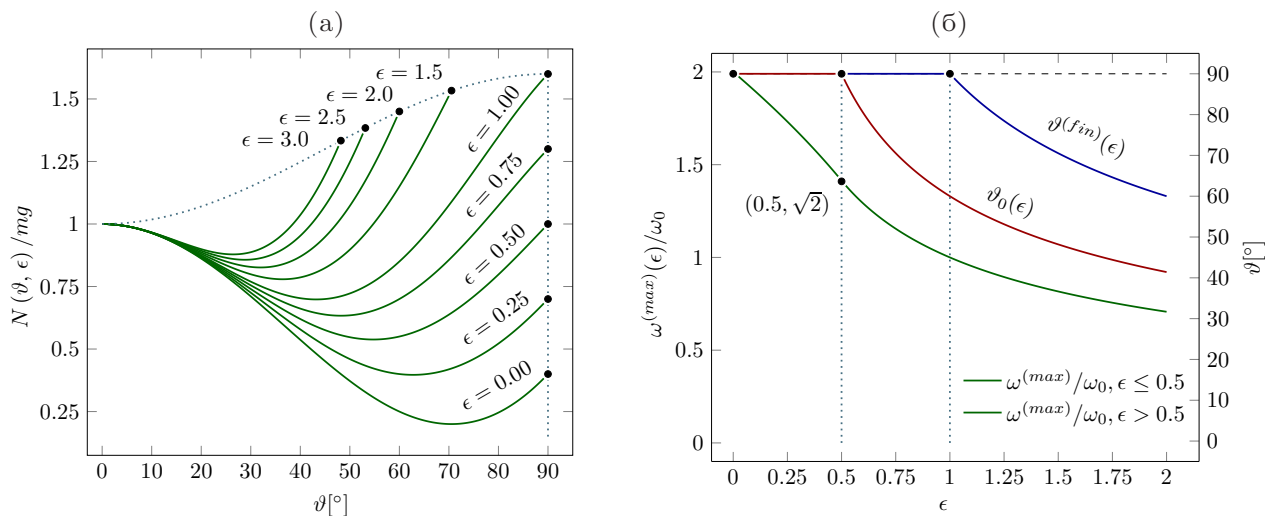
$$mga \cos \vartheta / 2 + I\dot{\vartheta}^2 / 2 + W_p = mga / 2, \quad (10)$$

где је $W_p = Li^2(\vartheta)/2$ потенцијална енергија магнетног дипола чија се струја индукује. Наиме, магнетно поље споља индукује електромоторну силу у суперпроводном раму $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi_c^{(ext)}/dt = +d\Phi_c^{(self)}/dt = Ldi(\vartheta)/dt$, док је укупна електромоторна сила у суперпроводном раму равна нули ($-\mathcal{E}_{ind} + Ldi(\vartheta)/dt = 0$). Дакле, елементарни рад магнетног поља за време dt при јачини струје $i(\vartheta)$ износи $dW_p = \mathcal{E}_{ind}i(\vartheta)dt = Li(\vartheta)di(\vartheta)$, па је $W_p = Li^2(\vartheta)/2$. Алтернативно, $dW_p = -i(\vartheta)d\Phi_c^{(ext)}/2$. Видимо да се због индуковане струје овде појављује фактор $1/2$, за разлику од случаја када је $i = const$ [случај (а)]. Услов $F_{tr} \leq \mu N$ је увек задовољен, јер је по услову задатка $\mu \rightarrow \infty$, тако да проклизавања нема. Даљим комбиновањем једначина (7)–(10) следи

$$N(\vartheta, \epsilon) = \frac{3}{5}mg \left(\frac{2}{3} + 3\cos^2 \vartheta - 2\cos \vartheta + 2\epsilon(1 - \cos \vartheta)(\cos \vartheta - \cos 2\vartheta) \right). \quad (11)$$

Како је $N(\vartheta, \epsilon) > N(\vartheta, 0) = \frac{3}{5}mg \left(\frac{2}{3} + 3\cos^2 \vartheta - 2\cos \vartheta \right) > 0$, закључујемо да је $N(\vartheta, \epsilon) > 0, \forall \epsilon \in (0, \infty)$.

Другим речима, неће доћи до потпуног одвајања рама од подлоге ни за једно позитивно ϵ . Међутим, на овом месту је неопходно продискутовати могућност заустављања рама пре $\vartheta = 90^\circ$. Рам се зауставља при $\dot{\vartheta} = 0$. Заменом овог услова у (10) налазимо да је $\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = 90^\circ$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = \arccos(1 - 1/\epsilon)$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, где је $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ крајњи угао отклона када се рам заустави. Видимо да се рам увек принудно зауставља због подлоге за $0 < \epsilon < 1$, док за $\epsilon \geq 1$ заустављање рама се јавља услед закочног момента сила магнетног поља. Случај $\epsilon = 1$ одговара углу $\vartheta^{(fin)}(\epsilon = 1) = 90^\circ$, али се ово заустављање не јавља због постојања подлоге као баријере у кретању. Видети слику 8(а) где је, у јединицама mg , представљена



Слика 8: (а) Угаона зависност силе нормалне реакције подлоге изражене у јединицама mg за извешан број вредности параметра ϵ . (б) Зависност максималне угаоне брзине рама изражене у јединицама ω_0 од параметра ϵ (лево) и зависности $\vartheta_0(\epsilon)$ и $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ (десно).

угаона зависност $N(\vartheta, \epsilon)$ за неколико ϵ карактеристичних вредности. На слици 8(б) је плавом линијом приказана зависност $\vartheta^{(fin)}(\epsilon)$.

(iii) На основу једначина (7)–(10) добијамо да је

$$F_{tr}(\vartheta, \epsilon) = \frac{3}{5}mg(-2 + 3\cos\vartheta + 2\epsilon(1 - \cos\vartheta)(1 - 2\cos\vartheta))\sin\vartheta. \quad (12)$$

Како је $\sin\vartheta \geq 0$ у изразу за $F_{tr}(\vartheta, \epsilon)$ у једначини (12), анализом квадратне функције по $\cos\vartheta$ налазимо да F_{tr} мења знак при $\vartheta^{(c)}(\epsilon) = \arccos h(\epsilon)$, где је $h(\epsilon) \equiv \frac{3(2\epsilon - 1) + \sqrt{8 + (2\epsilon - 1)^2}}{8\epsilon}$. При томе, увек важи да је $0 < h(\epsilon) < 1$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $1 - 1/\epsilon < h(\epsilon) < 1$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, па је $\vartheta^{(c)}(\epsilon) < \vartheta^{(fin)}(\epsilon), \forall \epsilon \in (0, \infty)$. Постоји и друго решење квадратне једначине: $\vartheta^{(c*)}(\epsilon) = \arccos h^*(\epsilon)$, где је $h^*(\epsilon) \equiv \frac{3(2\epsilon - 1) - \sqrt{8 + (2\epsilon - 1)^2}}{8\epsilon}$. Међутим, како у том случају увек важи да је $1 - 1/\epsilon < h^*(\epsilon) < 0$ за $\epsilon \in (0, 1)$ и $0 \leq h^*(\epsilon) \leq 1 - 1/\epsilon$ за $\epsilon \in [1, \infty)$, добија се да је $\vartheta^{(c*)}(\epsilon) \geq \vartheta^{(fin)}(\epsilon) > \vartheta^{(c)}(\epsilon), \forall \epsilon \in (0, \infty)$, где једнакост важи за $\epsilon = 1$. Анализа овог решења се из овог разлога не узима у обзир.

(iv) Будући да постоји могућност да се рам заустави пре него $\vartheta = 90^\circ$, очекујемо да у неком моменту t ($\vartheta(t) = \vartheta_0$) рам досегне максималну угаону брзину ($\dot{\vartheta}(t) = \omega^{(max)}$), када је $\ddot{\vartheta}(t) = 0$. Овај услов уврштавамо у (7) што даје $\vartheta_0(\epsilon) = 90^\circ$ за $\epsilon \in (0, 1/2]$ и $\vartheta_0(\epsilon) = \arccos(1 - 1/2\epsilon)$ за $\epsilon \in (1/2, \infty)$. Видети слику 8(б) где је црвеном линијом дата зависност $\vartheta_0(\epsilon)$. Из једначине (10) налазимо да је $\omega^{(max)}(\epsilon) = 2\omega_0\sqrt{1 - \epsilon}$ за $\epsilon \in (0, 1/2]$ и $\omega^{(max)}(\epsilon) = \omega_0/\sqrt{\epsilon}$ за $\epsilon \in (1/2, \infty)$, где је $\omega_0 \equiv \sqrt{3g/5a}$. Видети слику 8(б) на којој је зеленом линијом приказана зависност $\omega^{(max)}(\epsilon)$. Дакле,

$$\vartheta^{(fin)}(\epsilon) = \begin{cases} 90^\circ & 0 < \epsilon < 1, \\ \arccos(1 - 1/\epsilon) & 1 \leq \epsilon < \infty. \end{cases}$$

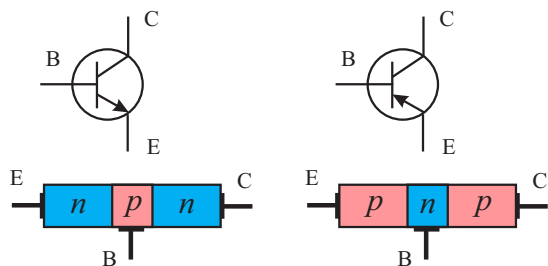
$$\vartheta_0(\epsilon) = \begin{cases} 90^\circ & 0 < \epsilon \leq 1/2, \\ \arccos(1 - 1/2\epsilon) & 1/2 < \epsilon < \infty, \end{cases} \quad \omega^{(max)}(\epsilon) = \begin{cases} 2\omega_0\sqrt{1 - \epsilon} & 0 < \epsilon \leq 1/2, \\ \omega_0/\sqrt{\epsilon} & 1/2 < \epsilon < \infty. \end{cases}$$

Интересантно је приметити да у овом случају рам изводи једну врсту осцилаторног кретања унутар $0^\circ \leq \vartheta \leq \vartheta^{(fin)}(\epsilon)$ за $\epsilon > 1/2$. Из једначине (7) се налази да тренутно угаоно убрзање рама од његовог



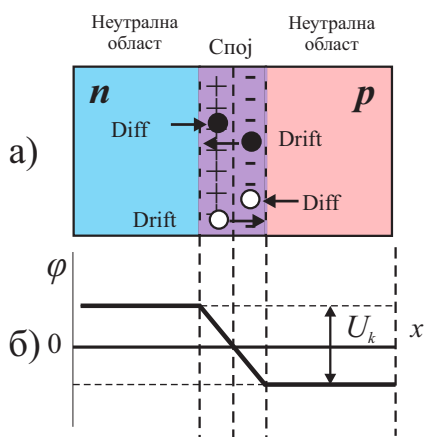
тренутног отклона ϑ при датом ϵ зависи као $\ddot{\vartheta} = 2\omega_0^2(1 - 2\epsilon(1 - \cos\vartheta)) \sin\vartheta$. $\ddot{\vartheta}$ је увек ненегативно у опсегу $\epsilon \in (0, 1/2]$. Специјално, $\ddot{\vartheta} = 0$ за $\epsilon = 1/2$ при отклону од 90° када је угаона брзина рама максимална и износи $\omega_0\sqrt{2}$. У опсегу $\epsilon \in (1/2, \infty)$, угаоно убрзање мења знака при тренутном углу $\vartheta_0(\epsilon) = \arccos(1 - 1/2\epsilon)$ када је угаона брзина максимална и износи $\omega_0/\sqrt{\epsilon}$. Међутим, за $1/2 \leq \epsilon < 1$ угаоно убрзање при финалном углу (увек 90°) износи $2\omega_0^2(1 - 2\epsilon) \leq 0$. С друге стране, за $\epsilon \geq 1$ крајњи угао отклона износи $\arccos(1 - 1/\epsilon)$, док је угаоно убрзање рама тада $-2\omega_0^2\sqrt{2\epsilon - 1}/\epsilon$.

Одређивање карактеристика електронских кола



Слика 1: Символ и шематски приказ *npn* (лево) и *pnp* транзистора (десно). Приликом цртања транзистора у електронским шемама кружић се може изоставити.

сматра се калкулатор IBM 608, начињен 1955. године, искључиво од транзисторских кола. Садржао је преко 3000 германијумских транзистора. Кључни део свих полупроводничких електронских компонената је добро познати **p-n спој**.



Слика 2: *p-n* спој у одсуству спољашњег извора струје. а) Шематски приказ *p-n* споја: пуним кружићима представљени су електрони, а празним шупљине. Са $-$, $+$ означени су некомпензовани јони примеса на споју. б) Расподела потенцијала.

а на другом повећава (слика 3).

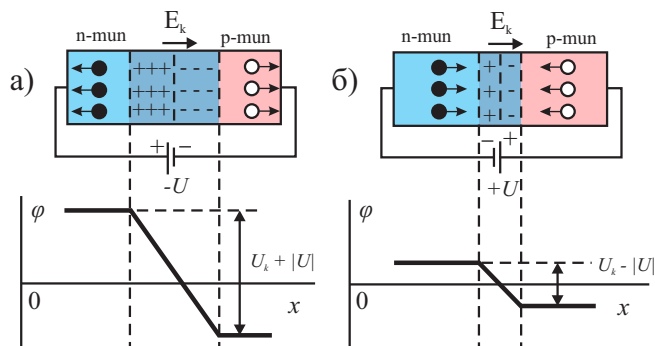
Поларизација транзистора обично се ради помоћу два независна извора електромоторне силе. Даљи текст и ознаке везане за опис рада транзистора односе се на *npn* тип (*pnp* транзистори раде аналогно). У пракси се показало да је за активан режим рада довољно обезбедити да је напон између базе и емитора (U_{BE}) већи од неке мале вредности која зависи од типа транзистора (0,3–0,7 V), а напон између колектора и базе $U_{CB} > -0,4$ V. Детаљнијом анализом показује се да је упрошћен модел транзистора за рад у активном режиму као на слици 4, при чему је

У свом најопштијем значењу, електроника се може дефинисати као област физике која проучава кретање електрона и других носилаца наелектрисања кроз слободан простор и полупроводне материјале. Међутим, најчешће се под појмом електроника подразумева техничка дисциплина која се бави развојем и производњом различитих компонената електричних кола, уређаја и читавих система. Зачетком електронике сматра се откриће електрона 1897. године, што је убрзо довело до проналаска вакуумских цеви, дуго година коришћених за појачање и исправљање малих електричних сигнала. Међутим, слободно се може рећи да је замена вакуумских цеви полупроводничким елементима - диодама и транзисторима, шездесетих година XX века, довела до праве револуције у електроници и сродним дисциплинама - телекомуникацијама, аутоматици и рачунарској техници. Пионирским подухватом полупроводничке технологије

Биполарни транзистори су активне електронске компоненте које могу истовремено појачати струју и напон улазног сигнала и потрошачу предати већу снагу од оне коју улаже извор сигнала. Назив транзистор настао је повезивањем термина *transfer* и *resistor*, док придев *биполарни* потиче од чињенице да у провођењу струје кроз транзистор учествују и електрони и шупљине. Састоје се од два *p-n* споја и имају три спољашња прикључка. Средњи слој је *база* транзистора, а крајњи - *емитор* и *колектор*. У зависности од редоследа слојева постоје два типа биполарних транзистора: *pnp* и *npn*. Њихова структура и симболи дати су на слици 1. У основи, принцип рада заснива се на функционисању *p-n* споја. У одсуству спољашњег поља, расподела потенцијала на сваком од спојева слична је оној са слике 2. Кроз контакт емитора *n*-типа и базе *p*-типа (за случај *npn* транзистора) одвија се дифузија основних носилаца: електрона из емитора у базу и шупљина из базе у емитор. Притом се уз контакт са стране базе ствара слој некомпензованих, негативно наелектрисаних јона примеса, а са стране емитора слој некомпензованих, позитивно наелектрисаних јона. Услед тога долази до формирања потенцијалне баријере, која смањује струју дифузије. Такође, постоји и струја дрифта као последица овако формиране контактне разлике потенцијала U_k . У одсуству спољашњег поља ове струје су уравнотежене и укупна струја једнака је нули. Слично важи и за спој база-колектор.

За рад транзистора потребно је прикључити га на спољашње напајање, што се уобичајено назива поларизација транзистора. Да би транзистор радио у тзв. активном режиму рада, у коме се остварују добра појачавачка својства, потребно је спој база-емитор поларисати директно (тј. позитиван пол батерије везати за *p*-страну споја, а негативан за *n*-страну), а спој база колектор инверзно. Услед тога се висина потенцијалне баријере на првом споју смањује,

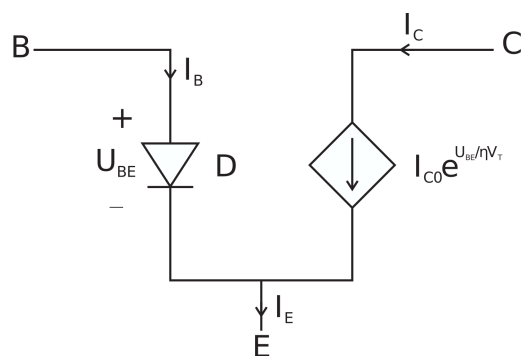
ромбом приказан тзв. напонски контролисан струјни генератор, тј. чињеница да колекторска струја I_C зависи од напона U_{BE} као $I_C = I_{C0}e^{U_{BE}/\eta V_T}$. Овде је V_T температурни напон, дат изразом $V_T = \frac{k_B T}{q_e}$, где је k_B Болцманова константа, T апсолутна температура, а q_e наелектрисање електрона. I_{C0} је параметар који зависи од температуре, а η је корекциони фактор за који се код транзистора коришћених у вежби може узети вредност 1,28.



Слика 3: Шематски приказ а) инверзно, б) директно поларисаног р-п споја. E_k је контактено електрично поље које се јавља услед нагомилавања некомпензованих примесних јона супротног знака на две стране споја.

изобличењем. По дефиницији, појачавач је мрежа са два приступа и симболички се у колу означава као на слици 6 а, а уколико је један прикључак заједнички за улаз и излаз, симбол појачавача је као на слици 6 б.

Појачавачи могу бити веома једноставни и садржати само један транзистор, али и врло комплексни. Да би појачавач могао да се посматра као саставни део сложених електронских кола, потребно је доћи до модела појачавача који се може користити у анализи појачавачких кола без улажења у детаље његове структуре. До параметара модела појачавача може се доћи анализом самог појачавачког кола или експериментално, мерењем улазних и излазних величина и параметара појачавача. Основни параметри појачавача су:



Слика 4: Модел *n-p-n* транзистора у активном режиму рада.

- Напонско појачање:

$$A_v = \frac{\Delta U_{out}}{\Delta U_{in}}, \quad (1)$$

- Струјно појачање:

$$A_i = \frac{\Delta I_{out}}{\Delta I_{in}}, \quad (2)$$

- Излазна отпорност:

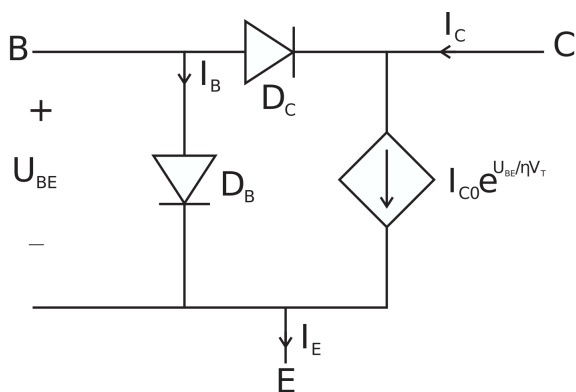
$$R_{out} = \frac{\Delta U_{out}}{\Delta I_{out}}, \quad (3)$$

- Улазна отпорност:

$$R_{in} = \frac{\Delta U_{in}}{\Delta I_{in}}. \quad (4)$$

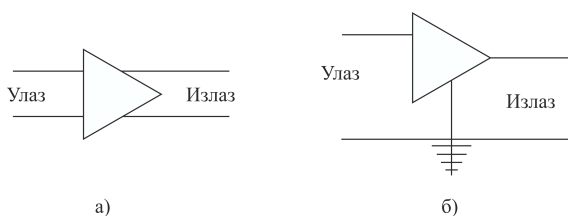
Своју најважнију примену биполарни транзистори налазе управо у појачавачким колима. С обзиром на то да појачавачи имају два улазна и два излазна прикључка, а да транзистор располаже са три спољна прикључка, јасно је да у појачавачком колу један од ових прикључака мора бити заједнички (референтни) за улаз и излаз. У складу са тим, постоје три могуће конфигурације једностепених појачавача са биполарним транзистором:

- појачавач са заједничким емитором (улаз - базна грана, излаз - колекторска грана)
- појачавач са заједничком базом (улаз - емиторска грана, излаз - колекторска грана)
- појачавач са заједничким колектором (улаз - базна грана, излаз - емиторска грана).



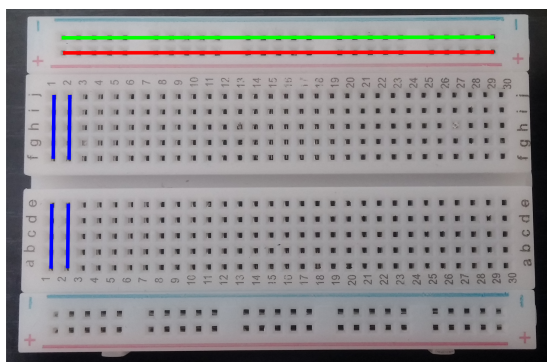
Слика 5: Модел *npr* транзистора у засићењу.

сти, два биполарна *npr* транзистора типа 2N2222, потенциометре, каблове - краткоспојнике, протопложу, мултиметар и штоперицу. Одговарајуће вредности параметара појединих компонената, као и физичке константе које можете користити при решавању налазе се на крају текста задатка.



Слика 6: а) Општи симбол појачавача; б) Симбол појачавача код кога је један прикључак заједнички за улаз и излаз.

слици 7 тамноплавом линијом). На слици 8 приказан је распоред прикључака (пинова) биполарног транзистора. На ово треба обратити пажњу приликом повезивања елемената у коло.



Слика 7: Физички изглед протоплоче.

Поред већ набројаних основних параметара појачавача, дефинишу се и њихове графичке карактеристике. То су:

- улазна карактеристика: зависност улазне струје од улазног напона, при константном излазном напону, и
- излазна карактеристика: зависност излазне струје од излазног напона, при константној улазnoj струји.

Циљ вежбе је одређивање параметара и карактеристика различитих електронских кола. У првом задатку треба одредити непознату капацитивност кондензатора. У другом задатку анализира се рад биполарног транзистора као појачавача. Трећи задатак садржи експерименталну анализу сложеног електронског кола. Експериментална апаратура која је пред вама садржи: акумулаторску батерију као извор једносмерног напона, кондензатор непознате капацитивности, неколико отпорника различитих отпорности,

На слици 7 приказан је физички изглед протоплоче на којој треба повезати одговарајућа кола. На њој се налазе рупице у које се убадају електронске компоненте и краткоспојници. Све рупице које су спојене линијама на слици 7 електрично су повезане са доње стране плоче. Зеленом линијом означена су места на протоплати где треба прикључити негативан пол батерије (обележена на плочи са -). На сличан начин, црвеном линијом означена су места где треба прикључити позитиван пол батерије (обележена на плочи са +). Иста таква два низа рупица налазе се и на другој ивици плоче (види слику), али њих не треба користити. Такође, по пет рупица у свакој колони обележеној бројем електрично су повезани (прве две такве колоне спојене су на

ОПШТЕ НАПОМЕНЕ:

1) На батерији се налазе закачени каблови помоћу којих се она може повезати на протопложу. Негативан крај батерије је прикључен на протопложу и тај кабл **не треба искључивати** из плоче током целог експеримента, да не би дошло до нехотичног спајања два краја батерије, директно или преко металних делова ваше опреме (сатови, оловке итд.). Позитиван крај батерије прикључити на за то одређена места на протоплати тек када сте сигурни да сте добро повезали коло.

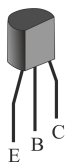
2) Када год не мерите, искључите позитиван крај батерије са протоплоче. Такође, све промене конфигурације или елемената повезаног кола вршити при искљученом позитивном крају батерије.

3) Не цимати и не вући каблове на споју са батеријом и не скидати их са исте да не би дошло до кидања.



4) Обратити пажњу на **поларитет кондензатора** (негативан крај има краћи прикључак и означен је цртицом на самом кондензатору). Уколико се обрне поларитет електролитичког кондензатора у колу може доћи до хаварије.

5) Потенциометар је уређај са три извода код кога се обртањем точкића мења отпор између средњег и било ког од крајњих извода, док је отпор између два крајња извода константан.



Слика 8: *Распоред прикључака nnp транзистора.*

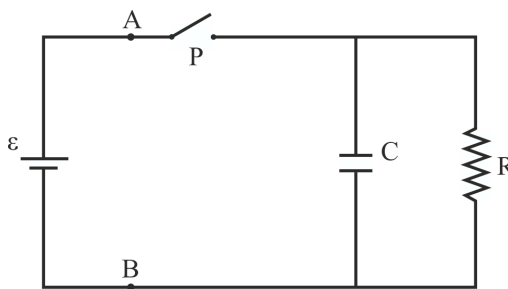
6) Мултиметар користити **искључиво** за мерење напона. Уколико је потребно одредити неку струју, мерити напон на одговарајућем отпорнику. Мултиметар подесити на мерење једносмерних напона, на опсегу до 20 волти, уколико је могуће (потребно је читавати напоне са тачношћу до стотог дела волта).

7) За мерење напона на располагању су вам, по потреби, и танке иглице које се могу поставити на протоплочу. Потребно је иглицу поставити у тачку на протоплати која има исти потенцијал као тачка у којој се жели мерити.

8) Уколико мислите да нешто није у реду са колом, позовите дежурног члана комисије који ће установити да ли је дошло до оштећења неке од компонената. Одговори на питања везана за повезивање кола и коришћење инструмената нису могући.

9) Све битне кораке и претпоставке у извођењу, мерењу и интерпретацији детаљно описати и образложити!

Задатак 1 [6 поена]



Слика 9: *Шема електричног кола за задатак 1.*

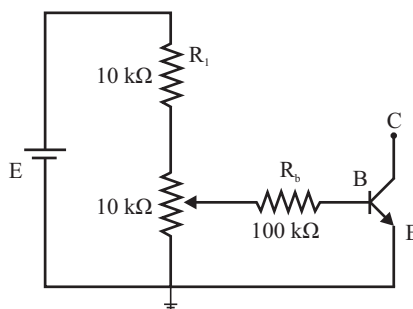
У овом задатку посматра се једноставно линеарно електрично коло, у коме је потребно одредити непознати капацитет кондензатора. Повезати коло као на слици 9. Помоћу батерије која представља извор емс $\mathcal{E} \approx 12 \text{ V}$ и одговарајућих отпорника направити извор напајања који испуњава следећа два услова: (1) напон $U_{AB} \approx 6 \text{ V}$ при отвореном прекидачу и (2) напон $U_{AB} \geq 5 \text{ V}$ при затвореном прекидачу (у том смислу, извор емс $\mathcal{E}$ са слике је само симбол). Тек по испуњењу услова (1) повезати остатак кола на овакав извор напајања! Водити рачуна да је максималан напон који кондензатор може да издржи $6,3 \text{ V}$! Такође обратити пажњу на поларитет кондензатора. У сврху прекидача користити обичан кабл - краткоспојник. Вредност отпора у овом колу износи $R = 100 \text{ k}\Omega$.

Након исправног повезивања кола, тако да су задовољени услови (1) и (2), снимити криву пражњења кондензатора и на основу тога одредити његову капацитивност. Проценити грешку капацитивности. Занемарити притом грешку за отпорност R .

Задатак 2

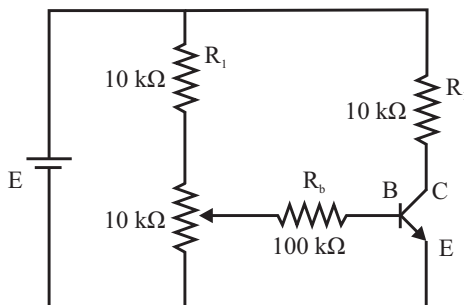
У овом задатку анализира се рад *nnp* биполарног транзистора као појачавача, у конфигурацији са заједничким емитором. За разлику од уобичајеног случаја описаног у уводном тексту, где се поларизација транзистора постиже помоћу два одвојена извора емс, у овом задатку поларизација је извршена помоћу једне батерије. Потенциометар, отпорник и батерија чине коло за поларизацију, док део кола десно од потенциометра представља сам појачавач. Обратити пажњу на распоред пинова транзистора (слика 8). У оквиру овог задатка није потребно одређивати грешке.

а) [2 поена] Повезати коло као на слици 10. Снимити улазну карактеристику појачавача. Нацртати одговарајући график и на основу њега израчунати улазну отпорност оваквог појачавача.



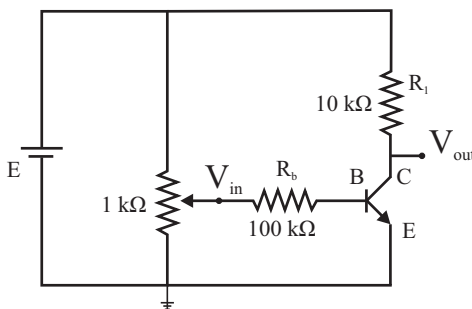
Слика 10: Шема електричног кола за задатак 2 а.

б) [3.5 поена] Повезати коло као на слици 11. Осмислити мерење којим би се могла одредити амбијентална температура. На основу мерења нацртати график и његовом анализом проценити амбијенталну температуру.



Слика 11: Шема електричног кола за задатак 2 б.

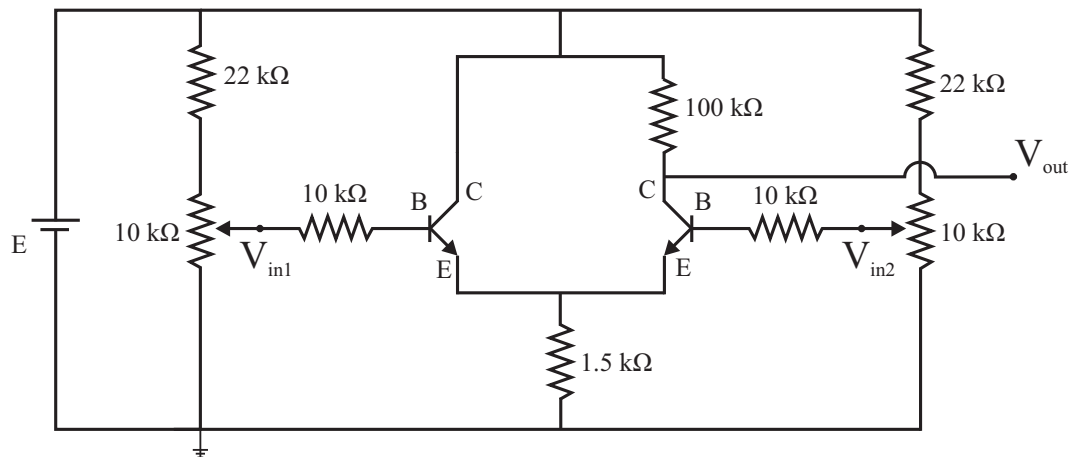
в) [3.5 поена] Повезати коло као на слици 12. Мерити зависност излазног напона од улазног $V_{out}(V_{in})$ за дати појачавач. На основу мерења нацртати график па проценити напонско појачавање појачавача. Ово појачавање одређивати са дела криве који има највећу апсолутну вредност нагиба. Потом извести израз који повезује напонско и струјно појачавање у овом колу и израчунати струјно појачавање појачавача у тој истој области.



Слика 12: Шема електричног кола за задатак 2 в.

Задатак 3 [5 поена]

У овом задатку анализира се сложено електронско коло са два улаза, V_{in1} и V_{in2} , и једним излазом, V_{out} , приказано на слици 13. Повезати коло према шеми датој на слици. Осмислити најоптималнији могући скуп мерења којима би се могло одредити функционисање овог кола. Помоћу тих мерења и на основу њих скицираних графика описати рад и функцију овог кола. Помоћу потенциометара обезбедити да су напонски нивои на оба улаза увек изнад 0,6 V. Није потребно одређивати ниједан нумерички параметар кола, као ни рачунати грешке. У оквиру овог задатка графике не морате цртати на милиметарском папиру, већ их можете скицирати на белим папирима за рад.



Слика 13: Шема електричног кола за задатак 3.

Нумерички подаци које можете користити (и чије се грешке могу занемарити):

Отпорности отпорника (разврстаних на папиру који стоји на вашем радном столу): $1,5\text{ k}\Omega$, $10\text{ k}\Omega$, $22\text{ k}\Omega$, $100\text{ k}\Omega$.

Отпорности потенциометара: $0\text{--}1\text{ k}\Omega$, $0\text{--}10\text{ k}\Omega$.

Електромоторна сила батерије: око 12 V једносмерног напона; уколико вам је потребна тачна вредност, измерите је.

Болцманова константа: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$.

Наелектрисање електрона: $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.

Задатке припремили: *др Марко Опачић* и *др Бојан Стојадиновић*, Институт за физику у Београду

Рецензенти: *др Ненад Вукмировић* и *др Данко Бошњакловић*, Институт за физику у Београду

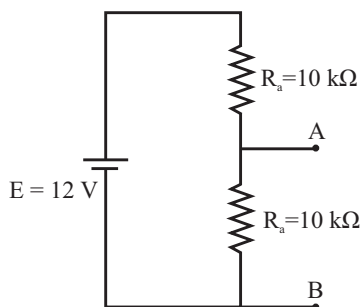
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд



Задатак 1.

Један од начина да се од батерије емс 12 V , добије тражених 6 V је примена тзв. разделника напона. Коло на слици 1 представља тражени извор напајања. Наиме, при отвореној вези напон на крајевима АВ је:

$$U_{AB} = E \frac{R_a}{R_a + R_a} = 6\text{V}.$$



Слика 1: Извор напајања који задовољава услове задатка добијен помоћу два једнака отпорника ($R_a = 10\text{ k}\Omega$).

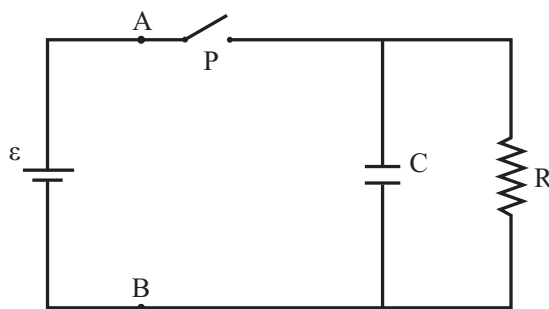
Када се овај извор напајања повеже са RC колом, у стационарном стању (када нема струје кроз кондензатор) је:

$$U_{AB} = E \frac{R_a \parallel R}{R_a \parallel R + R_a} = 5.71\text{V},$$

одакле следи да овакво коло испуњава оба тражена услова (овде $R_a \parallel R = \frac{R_a R}{R_a + R}$ означава еквивалентну отпорност паралелне везе отпорника R_a и R).

Друга могућност добијања траженог извора напајања је употреба потенциометра везаног на ред са батеријом. Обртањем точкића на потенциометру подеси се да је тражени напон U_{AB} при отвореном прекидачу око 6 V . Једина принципијелна разлика у односу на коло са слике 1 је у томе што се сада укупна отпорност потенциометра дели на два дела која не морају нужно (већ само приближно) бити једнака.

Повезивање кола:



Слика 2: Шема електричног кола за задатак 1.

Када се отвори прекидач, преостаје само RC коло, у коме се кондензатор празни преко отпорника. Закон по коме се мења напон на кондензатору са временом је:

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

(U_0 је напон у почетном тренутку) одакле се линеаризацијом добија

$$\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = -\frac{t}{RC}.$$



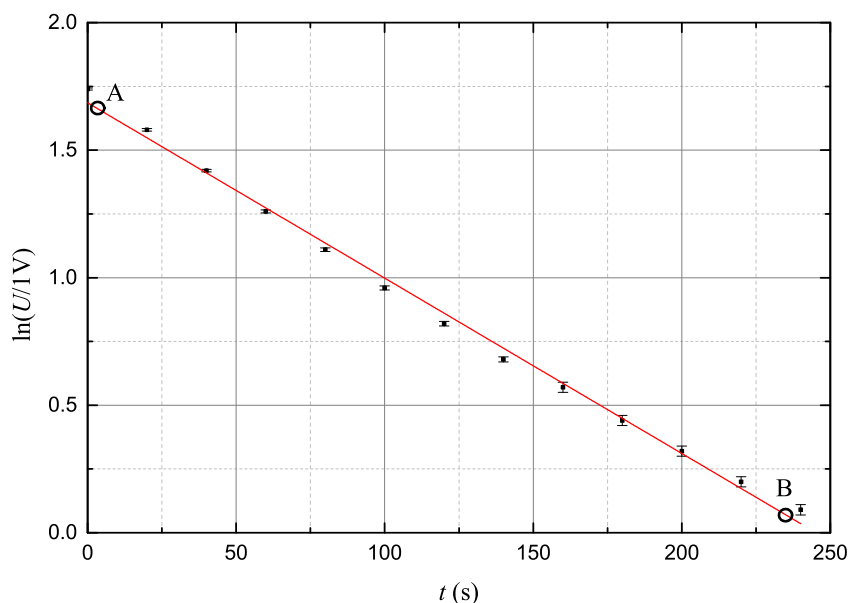
Важи

$$\Delta \ln\left(\frac{U}{1V}\right) = \frac{\Delta U}{U}.$$

Мерење је вршено тако што је очитавана вредност напона на сваких 20 секунди. С обзиром да нема поновљених мерења и усредњавања, грешка напона потиче од два члана: грешке инструмента од 0.01 V и грешке услед тога што напон није очитан тачно у тренутку t . За време људске реакције од 0.2 s напон се не може променити за више од 0.01 V, те је за укупну грешку усвојено $\Delta U = 0.02$ V. Измерене вредности U , израчунате вредности $\ln(U/1V)$ и грешке $\Delta(\ln(U/1V)) = \frac{\Delta U}{U}$ су приказане у табели 1.

$t(s)$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240
$U(V)$	5,73	4,87	4,13	3,53	3,03	2,62	2,28	1,98	1,76	1,56	1,38	1,22	1,09
$\Delta U(V)$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
$\ln(U/1V)$	1,74	1,58	1,42	1,26	1,11	0,96	0,82	0,68	0,57	0,44	0,32	0,20	0,09
$\Delta \ln(U/1V)$	0,004	0,005	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Табела 1: Примери измерених вредности, израчунатих величина и одговарајућих грешака тражених у задатку 1.



Слика 3: Линеаризовани график зависности напона на кондензатору од времена.

Коефицијент правца на графику зависности $\ln(U/1V)$ од t на слици 3 је једнак:

$$-k = \frac{y_A - y_B}{t_A - t_B} = \frac{1,62 - 0,10}{240 - 10} = 0,006609 \text{ s}^{-1}$$

а одговарајућа грешка је:

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| = \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_A - y_B|} = \frac{0,005 + 0,02}{1,62 - 0,10} = 0,0164$$

где су A и B две тачке на правој која најбоље одсликава добијену експерименталну зависност, изабране да се налазе између прве две, односно последње две експерименталне тачке.



Даље је:

$$RC = \frac{-1}{k} = 151,3 \text{ s},$$

односно

$$\frac{\Delta(RC)}{RC} = \frac{\Delta k}{k} = 0,0164.$$

Из последње две једнакости следи

$$\Delta RC = 2,49$$

тј.

$$RC = (151 \pm 3) \text{ s}.$$

Сада имамо

$$C = \frac{RC}{R} = \frac{151,3 \text{ s}}{100 \text{ k}\Omega} = 1,513 \text{ mF},$$

и коначно

$$C = (1,51 \pm 0,03) \text{ mF}.$$

Напомена: Задатак се може решити и на други начин. Наиме, капацитет кондензатора је одређен следећом релацијом:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta U} = \frac{\Delta q}{U_0 - U_1},$$

где је U_1 последњи измерен напон а Δq наелектрисање протекло кроз кондензатор од почетка до краја мерења. На основу мерених напона рачуна се струја кроз RC коло релацијом $I = U/R$ и црта график зависности $I(t)$. Површина испод овог графика од почетног тренутка до краја мерења биће једнака Δq и она се може одредити приближно, дељењем укупне површине на правоугаонике или трапезе и сабирањем тих површина.

Задатак 2 а.

На основу података датих у теоријском уводу, улазна карактеристика представља зависност улазног напона од улазне струје. Такође, речено је да је улаз у појачавач у базној грани, десно од потенциометра (тачка 1 на слици 4). Према томе, може се закључити следеће (уз ознаке као на слици 4):

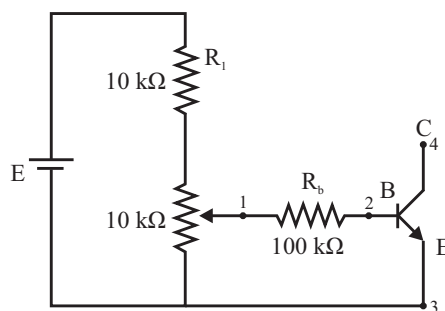
- Напон на улазу: $U_{13} = U_{\text{in}}$
- Струја на улазу: $I_{12} = \frac{U_{12}}{100 \text{ k}\Omega} = I_{\text{in}}$

Измерене вредности напона и струје на улазу су приказане у табели 2.

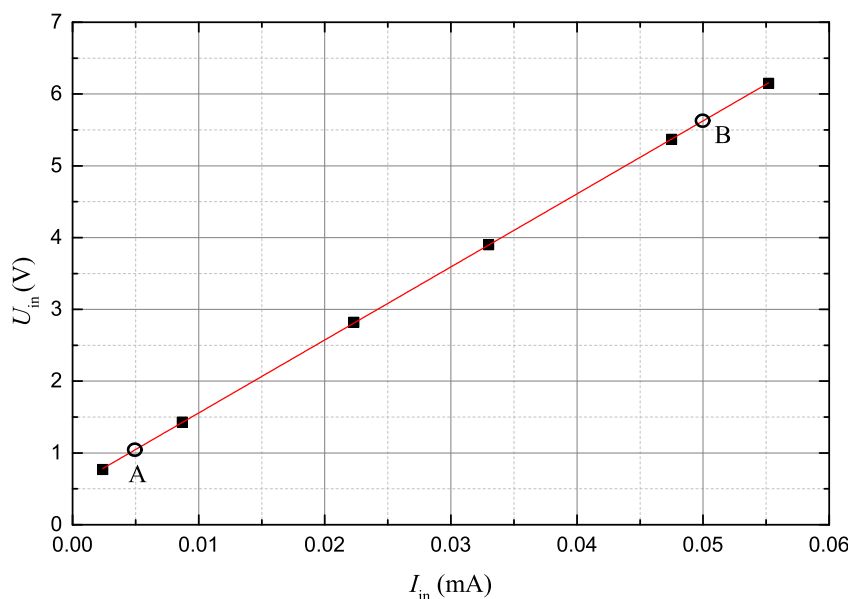
$U_{13}(\text{V})$	6,15	5,37	3,90	2,82	1,43	0,77	U_{in}
$U_{12}(\text{V})$	5,52	4,75	3,30	2,23	0,87	0,24	
$I_{12}(\text{mA})$	0,0552	0,0475	0,033	0,0223	0,0087	0,0024	I_{in}

Табела 2: Примери измерених и израчунатих вредности у задатку 2 а.

Применом дефиниционе формуле: $\Delta U_{\text{in}} = R_{\text{in}} \Delta I_{\text{in}}$ следи да је улазна отпорност једнака коефицијенту правца на графику зависности U_{in} од I_{in} са слике 5. На том графику су изабране две тачке A и B као у претходном задатку. Улазна отпорност је:



Слика 4: Шема електричног кола за задатак 2 а.



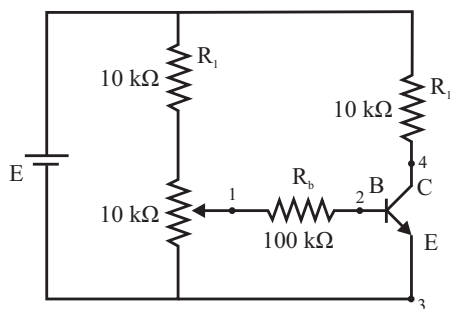
Слика 5: График зависности улазног напона појачавача од улазне струје.

$$R_{in} = \frac{U_B - U_A}{I_B - I_A} = \frac{5,6 - 1,05}{50 - 5} \frac{V}{\mu A} \approx 101 \text{ k}\Omega$$

Напомена: Видимо да се напони U_{13} и U_{12} разликују за око 0,6 V, што управо представља напон на споју база-емитор U_{BE} у активном режиму рада транзистора. Међутим, када је напон U_{13} значајно мањи од 0,6 V, U_{12} ће бити нула, као и базна струја I_{in} . Транзистор је тада у непроводном режиму и улазна отпорност појачавача је, према дефиниционој формули, бесконачно велика.

Задатак 2 б.

Пошто се дате зависности колекторске струје од напона U_{BE} разликују у активном режиму и у zasiћењу, потребно је бити сигуран да се сва мерења врше у једном од та два режима. С обзиром на дате зависности, једноставније је мерити у активном режиму. Као што је објашњено у уводном тексту, транзистор улази у zasiћење када је напон U_{CB} мањи од -0,4 V. С обзиром да, према датим моделима транзистора, потенцијал базе (тачка 2) не може бити већи од 0,6 V (што се може и експериментално проверити), значи да потенцијал колектора (тачка 4) мора бити испод 0,2 V, односно да мора важити $U_{CE} < 0,2 \text{ V}$. Док год је $U_{CE} > 0,2 \text{ V}$, транзистор неће ући у zasiћење и зависност $I_C(U_{BE})$ је облика



Слика 6: Шема електричног кола за задатак 2 б).

$$I_C = I_{C0} e^{\frac{U_{BE}}{\eta V_T}},$$

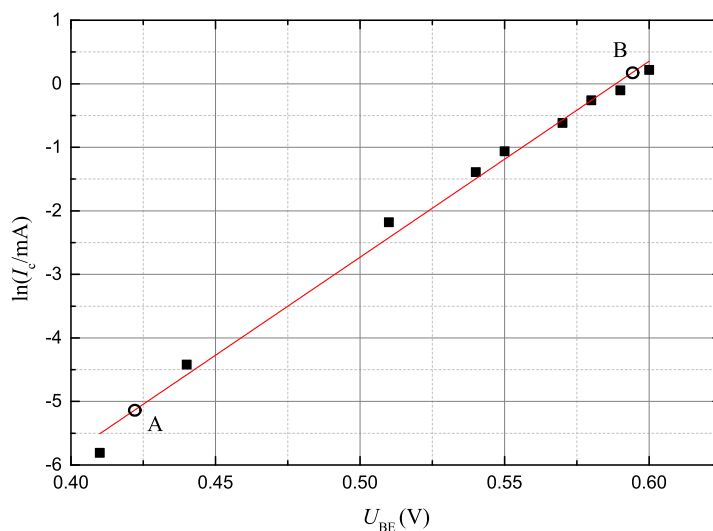
где је η корекциони фактор, за који је узета вредност 1,28, а $V_T = \frac{k_B T}{q_e}$. Одавде је

$$\ln \frac{I_C}{1\text{mA}} = \ln \frac{I_{C0}}{1\text{mA}} + \frac{q_e}{\eta k_B T} U_{BE}.$$

Према томе, треба мерити напон на колекторском отпорнику U_{+4} у зависности од напона на споју база-емитор U_{BE} . Колекторска струја рачуна се помоћу Омовог закона: $I_C = \frac{U_{+4}}{10\text{ k}\Omega}$. Резултати су приказани у табели 3.

$U_{+4}(\text{V})$	0	0	0,03	0,12	1,13	2,49	3,46	5,40	7,72	9,01	12,42
$U_{BE}(\text{V})$	0	0,35	0,41	0,44	0,51	0,54	0,55	0,57	0,58	0,59	0,60
$I_C(\text{mA})$	0	0	0,003	0,012	0,113	0,249	0,346	0,54	0,772	0,901	1,242
$\ln(\frac{I_C}{1\text{mA}})$			-5,809	-4,42	-2,18	-1,39	-1,061	-0,616	-0,259	-0,104	0,217

Табела 3: Примери измерених и израчунатих вредности у задатку 2 б.



Слика 7: Линеаризовани график зависности струје колектора од напона између базе и емитора.

На графику зависности $y = \ln \frac{I_C}{1\text{mA}}$ од U_{BE} са слике 7 налазимо коефицијент правца:



$$k = \frac{y_b - y_a}{(U_{BE})_b - (U_{BE})_a} = \frac{0,2 - (-5,2)}{0,595 - 0,42} = 30,85 \text{ V}^{-1}.$$

Даље је

$$\frac{\eta k_B T}{q_e} = \frac{1}{k} = 32,4 \text{ mV},$$

одакле је тражена температура $T \approx 293 \text{ K}$.

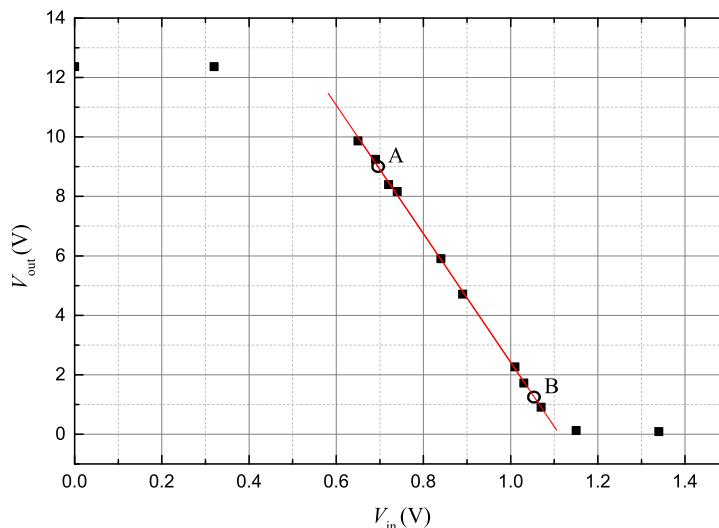
Задатак 2 в.

Мерењем напона назначених у тексту задатка (у односу на „масу”, која одговара потенцијалу емитора) у широком опсегу добијају се резултати приказани у табели 4.

$V_{in}(\text{V})$	0	0,32	0,65	0,69	0,72	0,74	0,84	0,89	1,01	1,03	1,07	1,15	1,34
$V_{out}(\text{V})$	12,37	12,37	9,87	9,25	8,4	8,17	5,91	4,71	2,27	1,72	0,91	0,13	0,09

Табела 4: Примери измерених и израчунатих вредности у задатку 2 в.

Зависност $V_{out}(V_{in})$ приказана је на графику са слике 8. За $V_{in} < 0,4 \text{ V}$ транзистор је у непроводном режиму, тј. не тече струја кроз базу, па самим тим ни кроз колектор. Напон на излазу практично је једнак напону батерије. Када улазни напон настави да расте, транзистор почне да проводи и улази у активан режим рада. Базна и колекторска струја расту, па расте и напон на колекторском отпорнику, што доводи до пада излазног напона. Када излазни напон падне испод $0,2 \text{ V}$, транзистор улази у zasiћење. Видимо да са повећањем улазног напона, излазни напон опада (а притом је у активном режиму стално већи од улазног). Појачавач који има ову особину назива се *инвертујући појачавач*. Према захтеву задатка, напонско појачање очитавано је из дела у коме је график линеаран, тј. у активном режиму, као коефицијент правца праве која описује зависност $V_{out}(V_{in})$:



Слика 8: Зависност излазног од улазног напона појачавача.

$$|A_v| = \left| \frac{V_{out}^A - V_{out}^B}{V_{in}^A - V_{in}^B} \right| = \left| \frac{9 - 1,3}{0,7 - 1,05} \right| \approx |-22| \approx 22.$$



По дефиницији се добија и струјно појачање:

$$|A_i| = \left| \frac{\Delta I_{\text{out}}}{\Delta I_{\text{in}}} \right| = \left| \frac{\Delta \left(\frac{E - V_{\text{out}}}{10 \text{ k}\Omega} \right)}{\Delta \left(\frac{V_{\text{in}} - U_{BE}}{100 \text{ k}\Omega} \right)} \right| \approx 10 \left| \frac{\Delta V_{\text{out}}}{\Delta V_{\text{in}}} \right| \approx 10 A_v \approx 220.$$

Задатак 3.

Пошто у колу постоје два улаза (V_{in1} и V_{in2}) и један излаз (V_{out}), најбољи начин да се поуздано утврди понашање кола јесте да један од улаза има сталну (фиксирану) вредност напона, док се напон на другом улазу мења. Другим речима, потребно је измерити излаз када је фиксиран напон V_{in2} а V_{in1} се мења, и обрнуто. Мерењем на описани начин добијају се резултати чији је један пример приказан у табелама 5 и 6, као и на графицима са слике 9.

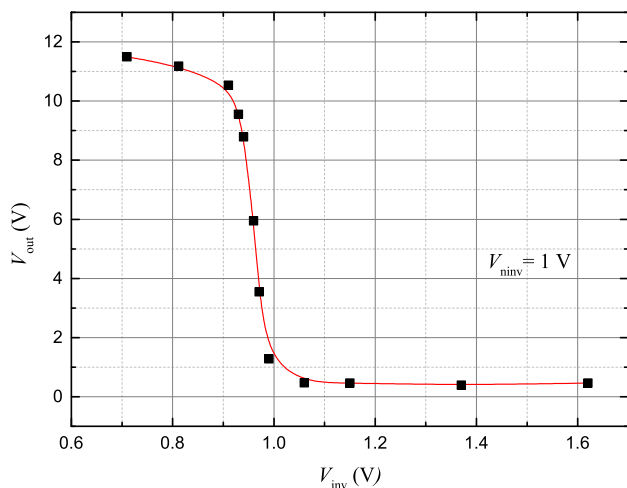
$V_{\text{in2}}(\text{V})$	1,62	1,37	1,15	1,06	0,99	0,97	0,96	0,94	0,93	0,91	0,81	0,71
$V_{\text{out}}(\text{V})$	0,46	0,39	0,46	0,47	1,28	3,55	5,95	8,79	9,55	10,54	11,18	11,5

Табела 5: Примери измерених вредности у задатку 3 за случај $V_{\text{in1}} = 1 \text{ V}$.

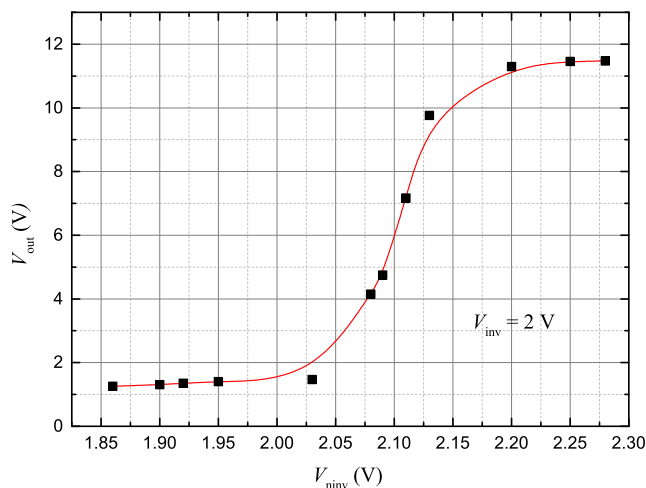
$V_{\text{in1}}(\text{V})$	1,86	1,9	1,92	1,95	2,03	2,08	2,09	2,11	2,13	2,20	2,25	2,28
$V_{\text{out}}(\text{V})$	1,26	1,31	1,35	1,40	1,47	4,15	4,75	7,17	9,76	11,3	11,46	11,47

Табела 6: Примери измерених вредности у задатку 3 за случај $V_{\text{in2}} = 2 \text{ V}$.

а)



б)



Слика 9: Пример зависности излазног напона V_{out} од а) V_{in2} улазног напона када је напон $V_{\text{in1}} = V_{\text{in1v}}$ фиксиран на вредност 1 V и б) V_{in1} улазног напона када је напон $V_{\text{in2}} = V_{\text{in2v}}$ фиксиран на вредност 2 V.

У случају када је фиксиран напон V_{in1} (табела 5 и слика 9 а), видимо да је за мале вредности напона V_{in2} излаз на високом напонском нивоу. Када се вредност V_{in2} приближи V_{in1} , излазни напон почне нагло да опада, врло брзо падне на ниску вредност и више се практично не мења. Са друге стране, када је фиксиран напон V_{in2} (табела 6 и слика 9 б), за мале вредности напона V_{in1} излаз има веома малу и приближно константну вредност; када се V_{in1} приближи V_{in2} , излазни напон има нагли скок на висок напонски ниво и скоро се не мења са даљим повећањем V_{in1} . (Обратити пажњу на опсеге вредности напона на x-оси.) Електронско коло чији се излаз нагло промени када се сигнали на улазима изједначе назива се *компаратор*. Поред тога, с обзиром да излазни сигнал на слици 9 а



опада са повећањем улаза, док на слици 9 б расте, улаз V_{in1} назива се *неинвертујући*, док је улаз V_{in2} *инвертујући* (отуда и ознаке на слици).

За максималан број поена је потребно урадити мерење бар за по два различита фиксирана напона V_{in1} , односно V_{in2} и закључити да сва четири графика показују компараторско понашање, тј. промену на излазу само када су вредности V_{in1} и V_{in2} блиске, као и инвертујућу, односно неинвертујућу природу улаза.

Напомена: Осим приказаних графика, могли су се цртати и графици зависности излазног напона од разлике улазних (поново за по две фиксиране вредности улазних напона), што суштински садржи исту информацију као и графици са слике 9, осим што је у приказу који је дат понашање кола очигледније.

Задатке припремили: *др Марко Опачић* и *др Бојан Стојадиновић*, Институт за физику у Београду

Рецензенти: *др Ненад Вукмировић* и *др Данко Бошњакловић*, Институт за физику у Београду

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд