

Libro de Pruebas

Versión 0.1

1991 - 2023

Recopilación: Secretariado Permanente de la OIbF
www.oibf.org

EDICIONES de la Olimpiada Iberoamericana de Física

I OIbF Santafé de Bogotá, Colombia, 22 al 29 de noviembre de 1991
II OIbF Oaxtepec Morelos, México, 22 de septiembre a 2 de octubre de 1997
III OIbF Mérida, Venezuela, 27 de septiembre al 2 de octubre de 1998
IV OIbF Alto de Ochomogo, Cartago, Costa Rica, 20 al 24 de septiembre de 1999
V OIbF Jaca, España, 14 al 21 de septiembre de 2000
VI OIbF Sorata, Bolivia, 20 al 26 de octubre de 2001
VII OIbF Antigua Guatemala, Guatemala, 29 de septiembre al 4 de octubre de 2002
VIII OIbF La Habana, Cuba, 20 al 27 de septiembre de 2003
IX OIbF Salvador, Brasil, 25 de septiembre al 2 de octubre de 2004
X OIbF Colonia del Sacramento, Uruguay, 18 al 24 de septiembre de 2005
XI OIbF Coimbra, Portugal, 23 al 30 de septiembre de 2006
XII OIbF Córdoba, Argentina, 29 de septiembre al 7 de octubre de 2007
XIII OIbF Morelia, México, 28 de septiembre al 3 de octubre de 2008
XIV OIbF Santiago, Chile, 27 de septiembre al 3 de octubre de 2009
XV OIbF Ciudad de Panamá, Panamá, 26 de septiembre al 2 de octubre de 2010
XVI OIbF Guayaquil, Ecuador, 26 de septiembre al 1 de octubre de 2011
XVII OIbF Granada, España, 16 al 23 de septiembre de 2012
XVIII OIbF Santo Domingo, República Dominicana, 22 al 29 de septiembre de 2013
XIX OIbF Asunción, Paraguay, 28 de septiembre al 5 de octubre de 2014
XX OIbF Cochabamba, Bolivia, 6 al 13 de septiembre de 2015
XXI OIbF Carmelo, Uruguay, 26 al 30 de septiembre de 2016
XXII OIbF Armenia, Colombia, 17 al 23 de septiembre de 2017
XXIII OIbF Mayaguëz, Puerto Rico, 20 al 28 de octubre de 2018
XXIV OIbF San Salvador, El Salvador, 6 al 13 de septiembre de 2019
XXV OIbF edición virtual - Organización multinacional, 5 al 13 de diciembre de 2020
XXVI OIbF edición virtual - João Pessoa, Brasil, 27 de noviembre al 4 de diciembre de 2021
XXVII OIbF edición virtual - Guatemala, 1 al 8 de octubre de 2022
XXVIII OIbF edición virtual - Costa Rica. 23 al 30 de septiembre de 2023



ÍNDICE

4 1991 Experimental
5 1991 Teórica

9 1997 Experimental
11 1997 Teórica

14 1998 Experimental
16 1998 Teórica

20 1999 Experimental
22 1999 Teórica

24 2000 Experimental
27 2000 Teórica

33 2001 Experimental
36 2001 Teórica

40 2002 Experimental
42 2002 Teórica

46 2003 Experimental
49 2003 Teórica

53 2004 Experimental
57 2004 Teórica

62 2005 Experimental
66 2005 Teórica

70 2006 Experimental y soluciones
89 2006 Teórica y soluciones

105 2007 Experimental
116 2007 Teórica

125 2008 Experimental y soluciones
136 2008 Teórica y soluciones

160 2009 Experimental
162 2009 Teórica y soluciones

170 2010 Experimental
173 2010 Teórica

179 2011 Experimental
183 2011 Teórica

186 2012 Experimental y soluciones
198 2012 Teórica y soluciones

217 2013 Experimental y soluciones
220 2013 Teórica y soluciones

226 2014 Experimental
228 2014 Teórica

234 2015 Experimental
237 2015 Teórica

243 2016 Experimental
247 2016 Teórica y soluciones

269 2017 Experimental
274 2017 Teórica

278 2018 Experimental y soluciones
294 2018 Teórica y soluciones

312 2019 Experimental y soluciones
340 2019 Teórica y soluciones

361 2020 Teórica y Experimental
371 2020 Soluciones

380 2021 Experimental
387 2021 Teórica

397 2022 Experimental y soluciones
405 2022 Teórica y soluciones

459 2023 Experimental
469 2023 Teórica

PROBLEMAS DE LA I OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Problema Experimental

26 de Noviembre de 1991

Determinación de la densidad de alcohol

Se desea determinar la densidad del alcohol suministrado.

LISTA DE MATERIALES E INSTRUMENTOS DISPONIBLES

- Un tubo de ensayo.
- Una probeta de 500 ml.
- Una pipeta (sin escala).
- Agua destilada, se asume que la densidad del agua es 1,0 g/cm .
- Alcohol.
- Lastre (balines de acero).
- Una regla milimetrada.
- Un pedazo de cartulina con un orificio.
- Cinta adhesiva.
- Papel milimetrado.
- Papel absorbente.

PREGUNTAS:

a) Describa de manera clara el procedimiento escogido indicando tanto el fundamento teórico como experimental.

b) Determine la densidad del alcohol suministrado.

c) Evalúe el error de su resultado.

I OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

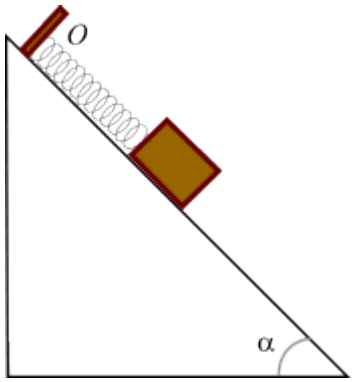
24 de Noviembre de 1991

Prueba Teórica

Problema #1.

Oscilaciones de un cuerpo en un plano inclinado

De un resorte de constante de elasticidad k y longitud natural (no deformado) *L* se cuelga un bloque de masa *m*, como indica la figura. El bloque inicialmente se encuentra a una distancia *l* del punto fijo 0. Tan pronto se suelta el bloque, este desciende. El plano inclinado presenta fricción, por lo cual el bloque oscilará un cierto número de veces hasta detenerse.



a. Determine el intervalo de posiciones sobre el plano en donde el bloque puede permanecer en reposo.
b. Determine los puntos de equilibrio, fuerza resultante igual a cero, mientras el bloque está en movimiento.
c. Construya las gráficas del valor de la fuerza resultante en función de la posición del bloque, para los ascensos y descensos del mismo.
d. APLICACION NUMERICA: Determine el número de ascensos y descensos que realiza el bloque y el punto donde se detiene si
$\alpha = 45^0, \mu_c = 0.10,$
$\mu_e = 0.20,$
$k = 50N/m,$
$m = 1.0kg.$

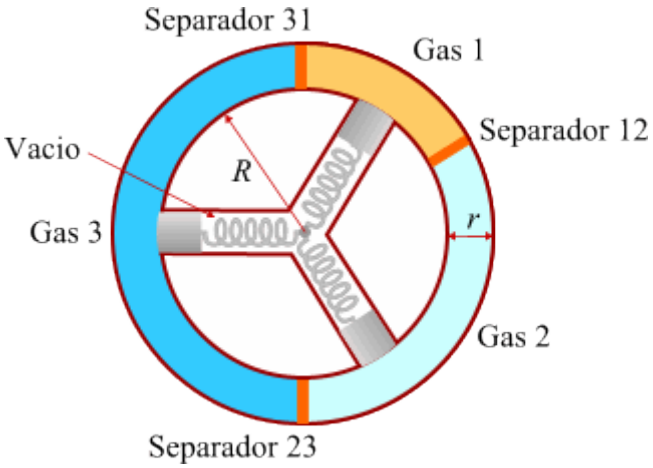
μ_e = Coeficiente de rozamiento estático.

μ_e = Coeficiente de rozamiento cinemático.

Problema #2.

Una rueda hueca con gases que gira

La figura representa un rueda hueca, de sección transversal cuadrada de lado *r* y radio interior *R*.



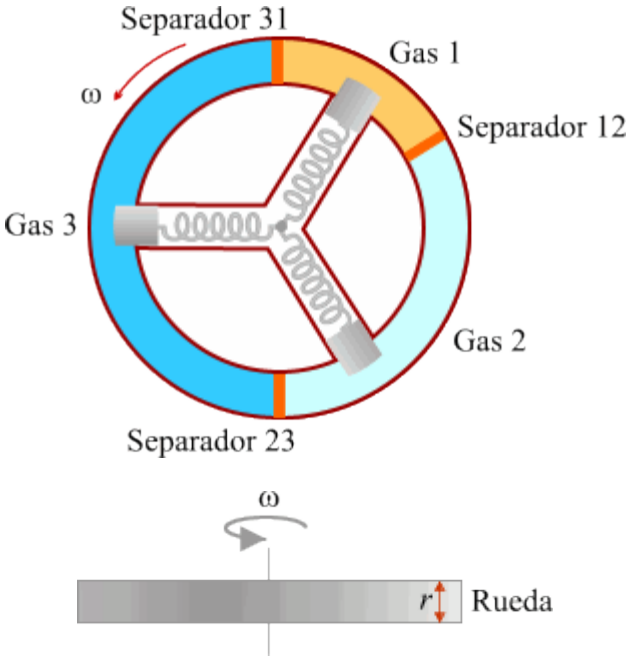
La cavidad de la rueda está dividida por tres separadores de tal forma que los volúmenes que delimitan están en la relación 1:2:3. Las cámaras están ocupadas por tres gases ideales diferentes.

Al interior de la rueda tienen acceso tres pistones radiales idénticos de constante elástica k que se hallan en compartimientos radiales huecos al vacío.

Los separadores pueden desplazarse sin rozamiento, son muy delgados y de masa despreciable. Los pistones son idénticos de masa *M*. sección transversal cuadrada de lado *r* y ajustan herméticamente en sus compartimientos. Sus extremos superiores son de radio de curvatura *R*. Con la rueda en reposo sus centros de masa se hallan a una distancia *R* - *r*, medida desde el centro de la rueda. (Si no hubiese ningún gas dentro de la rueda 1os pistones alcanzarían la pared externa de la misma y los resortes no estarían comprimidos ni estirados).

PREGUNTAS

Si el dispositivo gira a velocidad angular ωconstante alrededor de un eje vertical y suponiendo que todo el sistema se mantiene a temperatura constante:

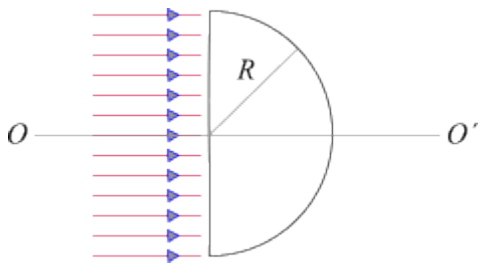


a. Determine la relación entre las presiones de los gases.
b. Determine la relación que hay entre los volúmenes de los gases.
c. ¿Qué distancia penetran los pistones en el interior de las cámaras de la rueda?
d. Determine los cambios de las posiciones angulares de los separadores.

Problema #3

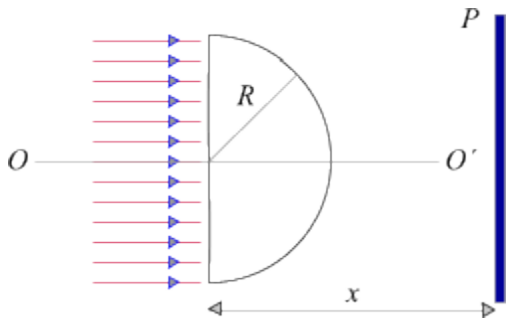
Un haz de luz incide en media esfera

Una lente semiesférica de radio R = 5 cm e índice de refracción n = l,52 se encuentra en el aire y recibe sobre su cara plana un haz de luz cilíndrico cuya dirección de propagación es perpendicular a la cara plana y la cubre completamente (ver figura). Se definen como rayos marginales aquellos que emergen tangencialmente a la superficie curva de la lente, Se definen como rayos paraxiales aquellos que inciden muy próximos al eje óptico de la lente.



a. Determine el radio máximo del haz de rayos paralelos que se refractan en la cara esférica de la lente. NOTA: No se considere en este caso reflexiones secundarias.

b. Determine el radio mínimo del anillo de rayos paralelos al eje óptico que emergen de la lente paralelamente, en sentido contrario al de incidencia.
c. Halle la distancia a lo largo del eje óptico entre el punto donde concurren los rayos marginales y el punto donde concurren los rayos paraxiales .
d. Ahora se coloca una pantalla P a una distancia *X* del centro de la esfera, de manera paralela a la superficie plana de la lente como se indica en la figura 2. Para *X* mayores que la distancia focal de los rayos paraxiales determine el radio de la mancha luminosa sobre la pantalla en función de *X*.



II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Oaxtepec Morelos, Sept. 28 - Oct. 2 /1997

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental 1

Construir un proyector de cuerpos opacos, de tal forma que las imágenes proyectadas tengan una amplificación mayor que uno:

a. Hacer un diagrama del instrumento indicando el trazo de rayos luminosos a través de los elementos ópticos utilizados.
b. Realice una estimación de la distancia focal de la lente.
c. Determine la condición de la distancia objeto-lente para obtener amplificación mayor que uno.

Nota. No todos los elementos suministrados deben ser necesariamente utilizados.

Material suministrado.
2 cajas de catrón.
1 lente.
1 tubo de cartón.
1 regla.
1 foco con porta foco.
1 interruptor.
Papel aluminio.
Unicel en plano.
Papel albanece.
Cartoncillo negro.
Una letra ?A? pintada en cartón.
Cinta adhesiva opaca.
Pegamento blanco para papel.

Problema experimental 2

Estudiar la variación del período de oscilación del péndulo suministrado como una función de la posición del centro de masas respecto al eje de oscilación.

- Hacer un diagrama con la disposición utilizada.
- Hacer una estimación de los errores en las medidas realizadas.
- Hacer un modelo en el que se expliquen los resultados obtenidos.

Material suministrado:

Péndulo de centro de masa y centro de oscilación variables.
Cronómetro.
Regla.
Papel milimetrado.

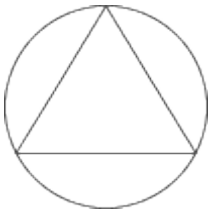
II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Oaxtepec, Morelos, México, Septiembre 29/1997

PRUEBA TEORICA

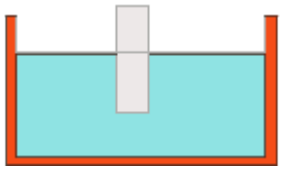
Problema 1 (2 puntos)

Tres cuerpos idénticos de masa *m* están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lado *L* . Cada uno de los cuerpos se puede mover en una órbita circular circunscrita al triángulo original. Si las únicas fuerzas que actúan sobre los cuerpos son las atracciones gravitacionales mutuas, ¿cuál será la rapidez de su movimiento?



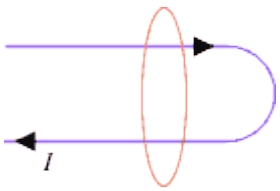
Problema 2 (2 puntos)

Un cilindro metálico sólido de 20 cm de longitud flota verticalmente en mercurio de densidad 13,6 g/cm^3. Si se le sumerge un poco y luego se suelta se moverá con movimiento armónico simple con un período de 0,42 s. ¿Cuál es la densidad del metal del cilindro?



Problema 3 (2 puntos)

¿Cuánto vale la circulación $\oint B \cdot dl$ en la espira que se muestra en la figura adjunta.



Problema 4 (3 puntos)

En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno se establece que la frecuencia de la línea H_α queda determinada por

$h\nu = E_2 ? E_1$.

Tomando en cuenta las leyes de conservación de la energía y del ímpetu, demostrar que este resultado está equivocado y calcular la frecuencia de emisión correcta.

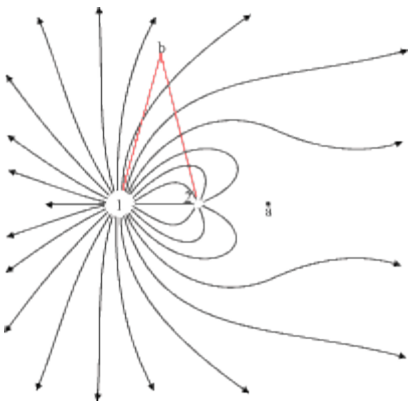
Problema 5 (6 puntos)

a. ¿A qué distancia y en qué plano se debe colocar un satélite geoestacionario?
b. Calcular el mínimo número de satélites geoestacionarios para que las únicas zonas no cubiertas por la red de comunicaciones sean las polares.
c. Si se coloca un satélite de exploración en órbita polar, esto es, que su órbita pase por los polos, ¿cuál es la condición para que en vueltas sucesivas no deje huecos en la exploración?

Problema 6 (7 puntos)

Calcular la temperatura media de la superficie solar.

Problema 7



Las líneas de fuerza mostradas en la figura son generadas por cargas eléctricas puntuales:

a. ¿De qué signo es cada una de las cargas? (1 punto)
b. ¿Cuál es su magnitud relativa? (2 puntos)

Si consideramos a la menor de las cargas como unitaria y si la distancia que las separa es r_0:

c. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto *a*

   , localizado sobre la línea que une las cargas a una distancia r_1 a la derecha de la carga 2? (1 punto)

d. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en un punto *b* , localizado a una distancia r_2 sobre una línea perpendicular al punto medio entre las cargas? (2 puntos)
e. ¿ En qué puntos es cero el campo eléctrico generado por estas cargas? (1 punto)
f. ¿Le encuentra algún defecto al diagrama de líneas de fuerza? Explique. (1 punto)

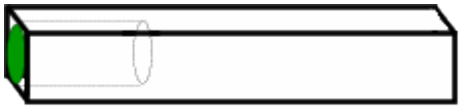
III OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Mérida, Venezuela, 27-09 al 02-10-98

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema A

DETERMINACION DE LA MASA Y LA LONGITUD DE UNA VARILLA NO ACCESIBLE



Objeto:

Determinar la masa y la longitud de la varilla que está en el interior del tubo.

Materiales suministrados

Tubo de aluminio de sección transversal cuadrada y uniforme, cargado en un extremo con una varilla uniforme y maciza.

Una muestra del tubo hueco de aluminio.

Dos soportes en L de aluminio.

Una regla de madera.

Una balanza.

NOTA: No todo el material debe ser necesariamente utilizado.

EL INFORME DEBERA CONTENER:

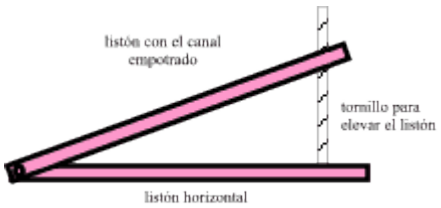
Análisis teórico del problema planteado (4 puntos).

Breve descripción de la estrategia experimental (2 puntos).

Determinación de la masa y la longitud de la varilla no accesible. Estimación justificada de los errores (6 puntos)

Problema B

DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTATICO



Objeto

Determinar el coeficiente de rozamiento estático de un canal doblado en ángulo recto con un bloque pequeño de aluminio.

Materiales suministrados

Un pequeño bloque de aluminio.

Un canal de aluminio doblado en ángulo recto, empotrado sobre un listón de madera el cual puede girar alrededor de otro listón horizontal mediante un mecanismo de tornillo.

Una regla graduada en milímetros.

Una escuadra con escala graduada en milímetros.

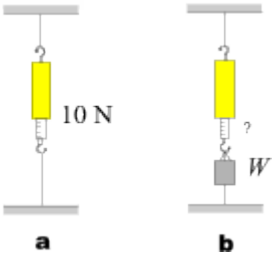
III OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Mérida, Venezuela, 27-09 al 02-10-98

PRUEBA TEORICA

Problema 1

Un dinamómetro se cuelga mediante una cuerda atada al techo y luego se tensa mediante otra cuerda atada al piso, de manera que la lectura del dinamómetro sea de 10 N (fig. a).



A continuación se cuelga un peso W del gancho inferior del dinamómetro (fig. b).

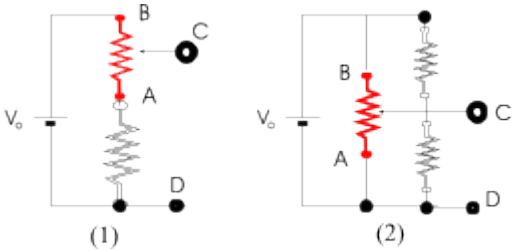
¿Cuál será la nueva lectura del dinamómetro en los siguientes casos?

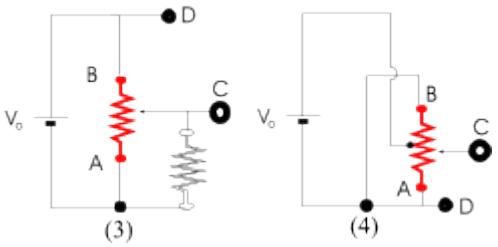
si W= 7 N

si W = 16 N

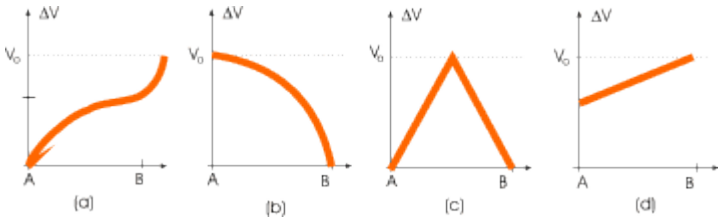
Problema 2

Un potenciómetro o reóstato lineal AB, se conecta a un circuito en las cuatro configuraciones siguientes:





A medida que movemos el cursor desde A hasta B obtenemos un voltaje en los terminales de salida C y D. Asocie cada uno de los circuitos anteriores con su correspondiente gráfico de voltaje de salida en función de la posición del cursor del potenciómetro, entre los mostrados a continuación.



Problema 3

Existe un juguete llamado "espejismo" que consta de dos platos enfrentados cuyas superficies internas son espejos paraboloides idénticos. El espejo superior tiene un agujero y cuando se coloca un objeto en el fondo del espejo inferior, se observa como si el objeto estuviera afuera flotando en la zona cercana al agujero del espejo superior.



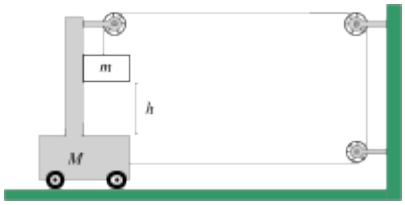
Explique su funcionamiento mediante un trazado de rayos.

Problema 4

Se sabe que la luz proveniente del Sol tarda en llegar a la Tierra 8,5 minutos. Haga una estimación del valor de la masa del Sol.

Problema 5

Un bloque de masa m = 1 kg está inicialmente suspendido en un carrito de masa M = 11 kg mediante el sistema de poleas mostrado. Las poleas y los hilos son de masa despreciable y también se desprecian todas las fuerzas de fricción.



Si el bloque se suelta cuando está a una altura h= 4,9 m por encima de la base del carrito,

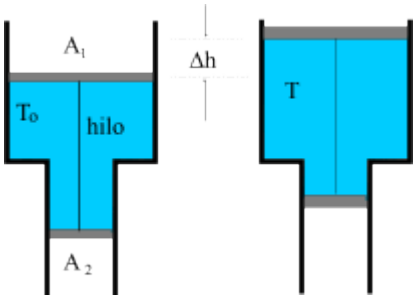
¿al cabo de cuánto tiempo golpeará el bloque la base del carrito?

¿cuál habrá sido el desplazamiento del carrito en ese tiempo?

Problema 6

Un tubo cilíndrico tiene dos secciones diferentes, en las cuales se insertan dos pistones de áreas $A_1 > A_2$, conectadas mediante un hilo inextensible como indica la figura. Los pistones pueden deslizar sin fricción en los tubos. La masa combinada de los dos pistones y el hilo es m.

En la parte externa de los tubos hay aire a la presión atmosférica, el cual ocupa un volumen Vo a la temperatuira To.

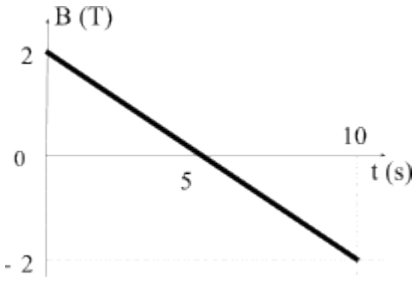


¿Cuál es la presión del gas contenido entre los pistones?

Determine la elevación Δh de los pistones en función del aumento ΔT en la temperatura del gas, cuando el sistema alcanza el equilibrio.

Problema 7

Con un alambre de cobre de sección transversal 0,5 mm^2 se construye una espira en forma de triángulo equilátero de lado L = 10 cm. Esta espira se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme que varía con el tiempo de la forma siguiente:



a) Calcule la carga total que atraviesa una sección cualquiera del alambre durante el intervalo de tiempo considerado.

b) ¿Cuál es la energía disipada en el alambre en ese tiempo?

IV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Alto de Ochomogo, Cartago, Costa Rica, Septiembre 20-24/1999

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental 1 (12 puntos)

Estudiar el movimiento de una pieza de madera dentro de un tubo de vidrio lleno de aceite.

a. Encuentre el menor ángulo de inclinación del tubo con la horizontal a partir del cual la pieza se eleva recorriendo todo el tubo sin detenerse.
b. Para diversos ángulos de inclinación mida las correspondiente velocidades de la pieza.

La relación teórica entre el ángulo de inclinación y la fuerza de resistencia total, F_r, que actúa sobre la pieza cuando esta se mueve con velocidad constante es $F_r = (\rho_{aceite} - \rho_{madera})\, g V \operatorname{sen}\theta$

donde $\rho_{aceite} = 0{,}873$ kg.m^{-3}

$\rho_{madera} = 0{,}280$ kg.m^{-3}

Volumen de la pieza, $V = (5{,}0 \pm 0{,}2).10^{-6}$ m^3

g = 9,8 m/s^{-2}

θ = ángulo de inclinación del tubo

c) Haga una gráfica de los valores medidos de la velocidad en función de sen θ .

d) Obtenga la relación empírica entre F_r y la velocidad.

e) Interprete cada término de la expresión empírica anterior.

Problema experimental 2 (8 puntos)

Determinación de la capacidad de un condensador

En este experimento se estudia el comportamiento de un circuito electrónico.

El circuito consta de un chip, resistencias, un diodo emisor de luz (LED), capacitores de capacidades conocidas y uno cuya capacidad se desconoce.

Cuando el circuito se conecta a la fuente de alimentación el LED permanede encendido, pero si entre las terminales negra (negativo) y roja (positivo) se conecta uno o más capacitores, el LED parpadea periódicamente.

El objetivo del experimento es estudiar la relación entre la capacidad conectada al circuito y el período de parpadeo del LED.

Atención: antes de empezar

1. El voltaje de la fuente de alimentación debe regularse de manera que el LED se encienda, sin superar en ningún caso los 5 V.
2. Los condensadores suministrados son electrolíticos por lo tanto debe respetarse su polaridad.

PREGUNTAS

a. Estudie la relación entre el período de parpadeo del LED y la capacidad conectada al circuito.
b. Averigüe la capacidad del condensador cuya valor se desconoce.

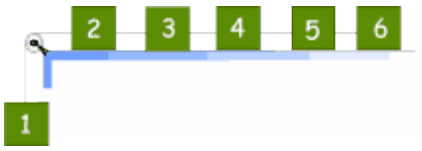
IV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Alto de Ochomogo, Cartago, Costa Rica, Septiembre 20-24/1999

PRUEBA TEORICA

Problema 1 (6 puntos)

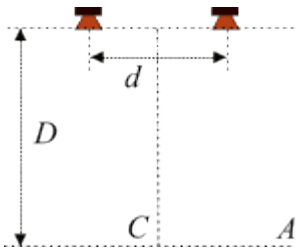
La figura muestra un sistema de 6 cuerpos de masas iguales a *m*, unidos por hilos inextensibles y de masa despreciable. La masa de la polea y la fricción en la misma son despreciables.



a. Determine la aceleración del sistema despreciando el rozamiento entre las superficies.
b. En las condiciones anteriores determine la tensión del hilo que une a los cuerpos 2 y 3.
c. Si el coeficiente de fricción estático entre las superficies de los cuerpos y la mesa es $\mu = 0{,}25$ el sistema permanece en reposo. Encuentre qué hilo es necesario cortar para que la mayor cantidad posible de cuerpos se desplacen aceleradamente.

Problema 2 (6 puntos)

Considere dos pequeños altavoces (parlantes o bocinas) dispuestos como se muestra en la figura que emiten sonidos de frecuencia ν con iguales intensidades, manteniendo entre ellos una diferencia de fase constante. Un observador se desplaza sobre la recta A situada a una distancia D del sistema de altavoces.



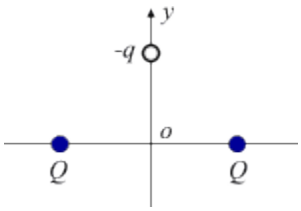
a. Si el observador se ubica en el punto C (equidistante de las fuentes) no percibe ningún sonido. Determine la diferencia de fase de los sonidos emitidos por los altavoces.

b. Calcule la distancia L que debe avanzar el observador sobre la recta A a partir del punto C para encontrar el primer máximo de intensidad sonora.
c. Si la intensidad del sonido percibido por el observador cuando emite un solo altavoz es I_o ¿cuál es la intensidad medida por el observador en el primer máximo cuando emiten ambos altavoces?

Velocidad del sonido 340 m/s
Frecuencia ν = 3400 Hz
D = 10 m
d = 0,5 m

Problema 3 (9 puntos)

Considere dos cargas eléctricas puntuales fijas, $+Q$, separadas una distancia $2d$. Equidistante de ellas se coloca otra carga puntual $-q$ de masa m, que sólo puede desplazarse a lo largo del eje OY.



a. Calcule la fuerza que actúa sobre la carga $-q$, en función de la distancia y al origen O.
b. Determine la frecuencia de las oscilaciones de la carga $-q$ cuando ha sido apartada de su posición de equilibrio una distancia $y_o << d$.

Problema 4 (9 puntos)

Imagine dos bloques idénticos de masa m unidos a los extremos de un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural L_o. El sistema se sitúa en posición vertical apoyado sobre una mesa como se indica en la figura 1.

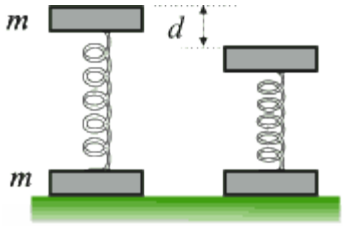


Fig. 1 Fig. 2

El bloque superior se desplaza hacia abajo una distancia d, partiendo de su posición de equilibrio (fig. 2) y a continuación se libera sin velocidad inicial.

a. Determine el máximo valor de la reacción de la mesa sobre el bloque inferior.
b. Determine el mínimo valor de la distancia d para que el bloque inferior llegue a separarse de la mesa.

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Jaca, España Septiembre 14-21/2000

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental 1

Desviación de una haz láser. Determinación del índice de refracción.

Cuando un rayo de luz atraviesa un bloque paralelepipédico transparente se producen dos refracciones a la entrada y a la salida, de forma que, como es fácil comprender, el rayo emergente es paralelo al incidente, como se indica en la figura 1.

El desplazamiento lateral, *d*, entre estos dos rayos puede calcularse en función del ángulo de incidencia, ε, el grosor del bloque, *L*, y el índice de refracción del material, *n*. La expresión exacta que se obtiene para *d* es algo complicada. Sin embargo, para pequeños ángulos de incidencia pueden emplearse aproximaciones del tipo:

$$\operatorname{sen}\varepsilon \approx \varepsilon,$$

con lo que se obtiene: $d \approx L\,\frac{n-1}{n}\,\varepsilon$, (1)

de forma que *d* es aproximadamente proporcional a ε.

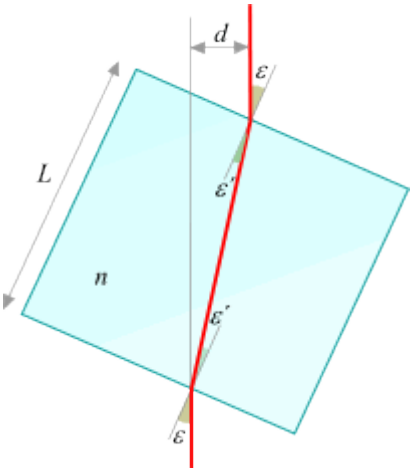
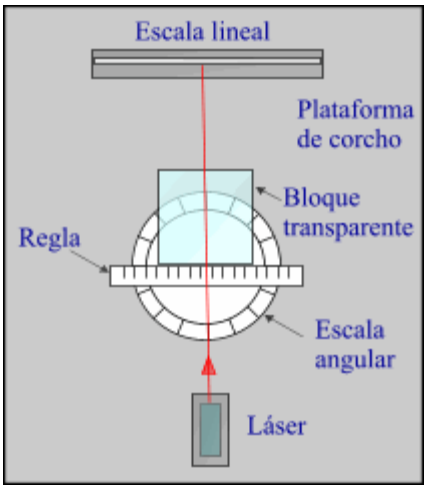


Fig. 1

Dispone de un montaje experimental con el que puede medir *d* en función de ε. A partir de las medidas de *d* y ε que estime oportunas le pedimos que determine:

a. El máximo ángulo de incidencia, $\varepsilon_{máx.}$, para el que experimentalmente es válida la igualdad aproximada (1), dentro de la precisión de medida del sistema.
b. El índice de refracción, *n*, del material del bloque.



Sugerencias:

1. Antes de empezar a hacer medidas, alinee el montaje de forma que el haz láser esté orientado según la línea central de la escala angular e incida

perpendicularmente sobre el centro de la escala lineal, tal y como se indica en la Fig. 2.

Fig. 2

2. Los alfileres le serán útiles como marcadores para alinear el montaje y, una vez conseguido el alineamiento, para sujetar el láser y la escala lineal a la base de corcho.
3. La regla de que dispone le puede ayudar a precisar el ángulo de incidencia, situándola sobre la escala angular con la inclinación deseada y apoyando el bloque en su lateral.

P R E C A U C I ó N: debe evitarse la entrada directa del haz láser en un ojo, ya que podría causar una quemadura en la retina.

Prueba experimental 2 (20 puntos)

Sistema masa-resorte. Dependencia con el número de espiras.

La constante elástica de un resorte helicoidal, k, depende del número de espiras, n , que tiene. Como hipótesis, supondremos que esta dependencia es del tipo:

$$k = k_1 n^p, \qquad (1)$$

donde p es una constante y k_1 es la constante elástica de una sola espira.

Por otra parte, si se suspende del resorte una masa M y se pone a oscilar verticalmente, el periodo de esta oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \alpha m}{k}}, \qquad (2)$$

donde m es la masa de la parte del resorte seleccionada para el estudio de la oscilación y α es una constante positiva menor que la unidad. En esta prueba experimental deberá realizar una serie de medidas para diferentes números de espiras de un resorte, comprobar la dependencia (1) y determinar los valores de k_1, p, M y α.

Dispone del siguiente material:

- Un resorte con 13,8 espiras por centímetro cuando están juntas (muelle horizontal). La masa de cada espira es $1{,}656 \times 10^{-4}$ kg.
- Un soporte vertical graduado en cuyo extremo superior hay una escuadra metálica para suspender la porción de resorte deseada.

- Una bola de plomo de masa *M* desconocida y una tuerca de hierro cuya masa *M'* se indica, en gramos, en uno de sus laterales.
- Un cronómetro digital y una regla de plástico.

1. Realice las medidas necesarias para completar la Tabla I adjunta:
    a. Con el resorte en horizontal, seleccione una longitud L_o (20, 18,....6 cm) y sitúelo en el soporte.
    b. Cuelgue la masa *M* y anote la lectura *L* del índice inferior del resorte.
    c. Añada la tuerca *M'*, tome la nueva lectura *L'* del índice y anote en la Tabla I el incremento de longitud $\Delta L = L'-L$.
    d. Quitando la tuerca, es decir, sólo con la bola suspendida del resorte, mida el periodo de oscilación, *T*, del sistema.

Emplee las columnas de la Tabla II para tabular los valores derivados de los anteriores que necesite para cálculos y gráficas posteriores.

2. Determine, para cada longitud L_o, la constante *k* del resorte.
3. Compruebe que la dependencia de *k* con *n* es del tipo indicado en (1) y determine el valor de la constante *p*.
4. Conocida *p*, determine el valor de k_1.
5. Indique detalladamente cómo ha realizado las medidas del periodo de oscilación *T* y haga una estimación razonada de su incertidumbre (error).
6. Determine los valores de *M* y α .

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Jaca, España, Septiembre 14-21/2000

PRUEBA TEORICA

Problema 1 (15 puntos)

Patinaje sobre hielo en Jaca

Jaca ha sido varias veces sede de los Campeonatos Mundiales de Patinaje Artístico sobre hielo para profesionales. Suponga que asiste a los ejercicios que realiza una pareja de patinadores sobre una pista horizontal. Las masas del chico y de la chica son M_A = 75 kg y M_B = 50 kg, respectivamente. La fuerza de rozamiento entre los patines y la pista se supone despreciable en todos los apartados excepto en el apartado **1.b.**

1. En un instante de su actuación, los dos patinadores se mueven en la misma línea recta y en el mismo sentido de forma que el chico, que se mueve con una velocidad v_A = 8,0 m/s, alcanza a la chica cuya velocidad es v_B = 6,0 m/s, y a partir de ese momento se mueven juntos.
    a. Calcule la velocidad de los patinadores cuando se mueven juntos.
    b. Con esta velocidad, los patinadores cruzan los patines, apareciendo una fuerza de rozamiento, por lo que se detienen en 5,0 m. Calcule el coeficiente de rozamiento cinético entre los patines y la pista. Calcule también el tiempo de frenado, t_f.
2. Otro número de su actuación consiste en moverse a lo largo de rectas paralelas separadas 1,5 m, con velocidades de igual módulo, $v'_A = v'_B$ = 1,4 m/s, pero de sentido opuesto. Al cruzarse, los patinadores extienden sus brazos, se agarran de las manos y continúan rígidamente unidos, manteniendo entre ellos la distancia de 1,5 m.
    a. Considere el sistema formado por los dos patinadores. ¿Con qué velocidad se mueve su centro de masas? ¿Con qué velocidad angular giran los patinadores en torno al centro de masas?
    b. Haga una representación gráfica de la trayectoria de cada patinador respecto al centro de masas del sistema.

c. Calcule la energía cinética del sistema.

3. Tras dar una vuelta completa, los patinadores encogen los brazos hasta acercarse a una distancia de 1,0 m, dan otra vuelta completa y se sueltan, saliendo en la misma dirección inicial.
   a. Antes de soltarse, determine la nueva velocidad angular de rotación en torno al centro de masas.
   b. Calcule el trabajo realizado por los patinadores en el proceso de aproximación relativa y la fuerza media que han tenido que ejercer.
   c. Tras soltarse, calcule la velocidad de cada patinador respecto a la pista.

Problema 2 (15 puntos)

El gran condensador del Instituto de Ciencias de Materiales de Aragón

La figura 1 muestra el esquema de un condensador ("capacitor") plano de características fuera de lo corriente. Sus placas tienen un área $A = 1{,}40 \cdot 10^5$ m^2 y están separadas una distancia $d_o = 0{,}10$ mm. El condensador ha sido cargado con una fuente de tensión $V = 7{,}10$ kV, que posteriormente se ha desconectado. Entre las placas inicialmente hay aire, de permitividad $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2.



Fig. 1

1. Calcule la carga Q de las placas y el campo eléctrico entre ellas, E.
2. Suponga que la placa inferior del condensador está fija y que separamos la superior hasta una distancia $d > d_o$ entre ambas (véase la figura 2). Obtenga, en función de d, una expresión para la energía eléctrica almacenada por el condensador, $U(d)$.
3. A partir de la variación de energía eléctrica entre la situación inicial (fig. 1) y la final (fig. 2), calcule la fuerza F con que hay que actuar sobre la armadura superior para contrarrestar la fuerza de atracción eléctrica, F_e, que ejerce sobre ella la placa inferior. ¿Depende F_e de d?

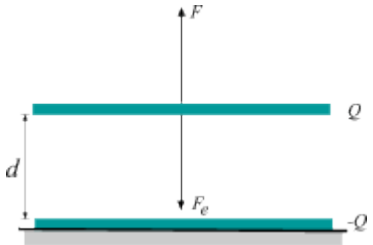


Fig. 2

La fuerza F_e es muy grande, por lo que no parece muy fácil ni práctico mantener separadas las placas haciendo actuar continuamente la fuerza F. Otra solución más sencilla es colocar entre las placas una hoja de papel aislante, de grosor d_o, que impida que se junten dichas placas (véase la figura 3). Pero el papel tiene una permitividad $\varepsilon = 3{,}70\varepsilon_o$ que cambia las características electrostáticas del sistema. Suponga que la hoja de papel se ha situado entre las placas del condensador antes de cargarlo con la misma fuente de tensión V y, posteriormente, desconectarlo.

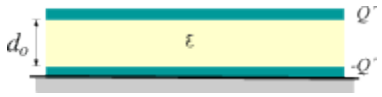


Fig. 3

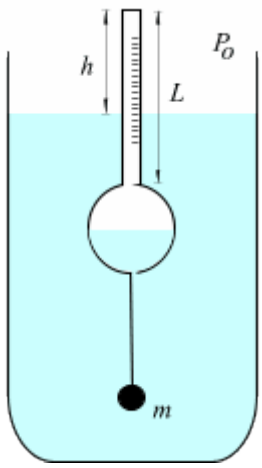
4. Calcule los nuevos valores de la carga en las placas del condensador, Q', del campo entre ellas, E', y de la energía electrica del sistema, U'.
5. Calcule la fuerza de compresión a la que está sometido el papel, F'_e, debido a las fuerzas electrostáticas

---

Problema 3 (10 puntos)

Un termómetro flotante

El sistema de la figura es un ligero flotador de vidrio formado por un tubo cilíndrico, cerrado en su extremo superior, y unido a una ampolla esférica. Esta tiene, en su parte inferior, un orificio por el que puede entrar y salir el agua. A este dispositivo está unida una pequeña bola de plomo de manera que, en las condiciones de presión atmosférica $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa y temperatura $T_0 = 17{,}0$ ºC, flota con la ampolla llena de agua exactamente hasta la mitad y sobresaliendo la mitad del tubo de la superficie del agua.



Datos: diámetro de la ampolla, D = 6,00 cm; diámetro y longitud del tubo, d = 1,00 cm, L = 10,0 cm.

1. Calcule la masa m de plomo necesaria para que el dispositivo flote en las condiciones descritas. Por simplicidad, considere despreciables la masa y el grosor de las paredes del vidrio así como la masa del aire contenido en la cámara y la del hilo que sujeta el plomo. Densidad del plomo y agua: $\rho_P = 11{,}3\ \mathrm{g/cm^3}$ y $\rho = 1{,}00\ \mathrm{g/cm^3}$, respectivamente.
2. Calcule la presión absoluta P_c en la cámara de aire.

Está claro que, a presión atmosférica constante, un aumento de la temperatura producirá un aumento del volumen de la cámara de aire y el conjunto emergerá un poco. Observando la altura h de la parte de tubo que sobresale del agua y grabando una escala en su pared habremos construido un termómetro.

3. Con una presión atmosférica P_0, calcule la separación de las marcas de la escala termométrica para que esté graduada en grados Celsius. Para unificar notaciones, llame V_0 al volumen de la cámara de aire a presión P_c y temperatura T_0. Considere al aire como un gas perfecto.

Problema 4 (10 puntos)

Un uso práctico de la medida de la gravedad

Prospecciones geofísicas indican que a una cierta profundidad de la corteza terrestre existe una cavidad aproximadamente esférica de radio medio R = 2,1 km. En su interior se supone que hay gas metano, con una densidad muy inferior a la de la Tierra. Una medida precisa de la gravedad en el punto P de la superficie más próximo a la cavidad da el valor $g = 0{,}99997 g_0$, donde g_0 sería el valor de la gravedad en P supuesta la Tierra esférica y homogénea, de radio $R_T = 6370\ \mathrm{km}$. Por simplicidad no se tendrá en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra.



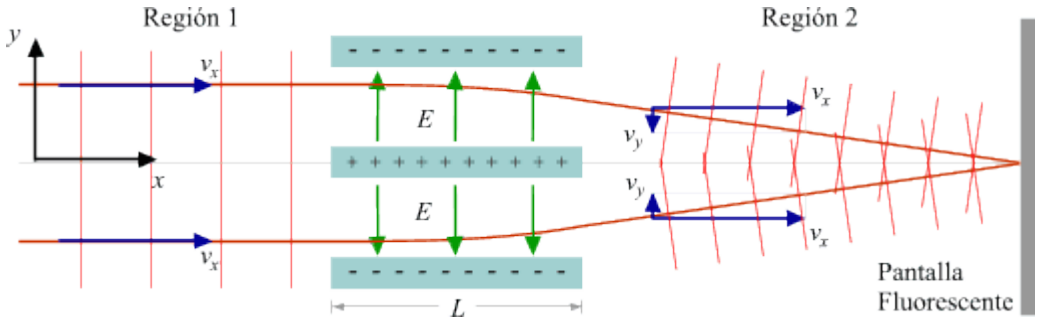
1. Haga una estimación de la distancia d entre el centro de la cavidad y el punto P de la superficie terrestre.

2. Suponga ahora que quiere medir *g* mediante un péndulo simple, cuya longitud conoce exactamente. Calcule la precisión relativa, $\Delta T/T$, con la que debe medir el período para poder obtener *g* con un error $\Delta g = 10^{-4}$ N/kg.

Problema 5 (10 puntos)

Interferencias de electrones

En la figura se esquematiza un aparato construido por Möllenstedt y Düker en los años cincuenta para poner de manifiesto que los electrones, además de ser partículas, se comportan también como ondas. El aparato consta básicamente de tres placas planas cargadas de longitud *L* que crean campos eléctricos uniformes de módulo *E* en los espacios intermedios, tal como se indica en la figura. Por la izquierda de las placas (región 1) incide un haz colimado de electrones con velocidad v_x paralela a las placas.



1. Calcule la componente transversal v_y de la velocidad de los electrones a la salida de las placas (región 2). Datos: $L = 5{,}0$ mm; $E = 570$ V/m ; $v_x = 1{,}24\cdot10^{8}$ m/s; $e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg. No es necesario el cálculo relativista.
2. El haz de electrones en la región 1 puede ser considerado como una onda plana. Llamando *A* a su amplitud y k_x a su número de ondas ($k_x = 2\pi/\lambda_1$, siendo λ_1 la longitud de onda asociada y $p = \frac{h}{2\pi}k$), esta onda puede expresarse en un instante dado, $t = 0$, en la forma:

$$\Psi_1(x) = A\cos(k_x x)\,.$$

En la región 2 se superponen las dos ondas planas asociadas a los electrones desviados entre las placas. Por tanto, la onda resultante, en $t = 0$, puede expresarse en la forma:

$$\Phi_2(x,y) = A\{\cos(k_x x + k_y y) + \cos(k_x x - k_y y)\}$$

Determine k_x y k_y en la región 2.

Dato: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s.

3. Se sitúa como indica la figura una pantalla fluorescente, que brilla con una intensidad proporcional a la intensidad de la onda de electrones que llega a cada uno de sus puntos. En la pantalla se detectan franjas de interferencia perpendiculares al plano de la figura. Obtenga una expresión para la distribución de intensidad en la pantalla, $I(y)$, y determine la distancia interfranja.

Nota: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

VI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Sorata, Bolivia Octubre 25/2001

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental

Determinar el coeficiente de restitución inelástica de una pelota al rebotar contra el suelo.

Teoría. En la colisión entre una pelota y la Tierra, esta última puede considerarse de masa infinita. Si la colisión es inelástica, la energía cinética no se conserva durante la colisión. Sean *V* la velocidad con que llega la pelota al suelo y *v* la velocidad con que rebota inmediatamente después de la colisión, de modo que:

$$\frac{1}{2}mV^2 \geq \frac{1}{2}mv^2$$

El signo igual corresponde a un choque elástico.
Luego

$$V^2 \geq v^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v}{V}\right)^2 = \varepsilon^2 \leq 1$$

Donde se define la relación entre la velocidad después del choque a la velocidad antes del choque, como el *coeficiente de restitución* de la colisión inelástica.

$$\varepsilon = \frac{v}{V} \leq 1$$

Si se suelta la pelota de una altura *H*, el tiempo que tarda en caer hasta tocar el suelo por primera vez es:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

La velocidad con que llega la pelota al suelo inmediatamente antes del primer rebote es:

$$v_0 = gt_0$$

La velocidad con que sale inmediatamente después del primer rebote es:

$$v_1 = \varepsilon v_0$$

Sean t_1 , t_2 , ... , t_{n-1}, los tiempos desde que se suelta la pelota hasta el segundo, tercer, ..., *n* rebotes, respectivamente.
El tiempo entre el primer y segundo rebote es

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{2v_1}{g} = \varepsilon \frac{2v_0}{g} = 2t_0\varepsilon$$

La velocidad con que sale la pelota inmediatemente depues del segundo rebote será

$$v_2 = \varepsilon v_1 = \varepsilon^2 v_0$$

El tiempo entre el segundo y tercer rebotes es

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{2v_2}{g} = \varepsilon^2 \frac{2v_o}{g} = 2t_0\varepsilon^2$$

Y asi sucesivamente, se obtiene que

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = 2t_0\varepsilon^n$$

Asi, teóricamente, el intervalo de tiempo entre dos rebotes sucesivos es proporcional a la potencia *n* del coeficiente de restitución inelástico, donde *n* es el número del rebote después del primero.

N O T A : deje siempre caer la pelota desde el punto más alto que le permita su brazo. Procediendo de esta forma usted asegurará que el error relativo cometido en la altura, en cada caída, sea inferior al error relativo que se comete en la determinación del tiempo y puede ser no considerado.

VI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Sorata, Bolivia, Octubre 23/2001

PRUEBA TEORICA

Problema 1

La luz solar tarda 8,33 minutos en llegar a la Tierra y 43,3 minutos en alcanzar Júpiter.

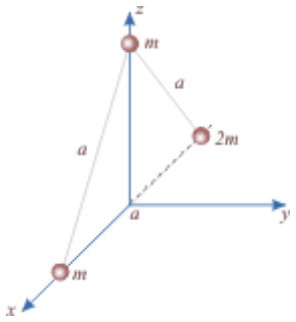
a. ¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol? (4 puntos)
b. Calcule la masa del Sol. (4 puntos)

(G = 6,67 x 10^{-11} N m^2 kg^{-2})

Problema 2

Considere un sistema de tres partículas rígidamente unidas formando un triángulo equilátero de lado a como se muestra en la figura. Dos de las partículas tienen masa igual a m y la otra a $2m$.

a. Si el sistema se pone a rotar con velocidad angular w respecto los ejes X, Y o Z; ¿en cuál de los casos la energía cinética es mayor? Calcule el valor de dicha energía cinética. (4 puntos)
b. Describa el movimiento del centro de masas del sistema cuando éste rota alrededor del eje Z con velocidad angular w. (4 puntos)



Problema 3

Un rayo es la descarga de la energía eléctrica acumulada por una nube. Considere una nube de base plana con un área de 1 km^2 situada sobre una

llanura. Cuando la diferencia de potencial entre la llanura y la nube es de 4 x 10^9 V se produce un rayo, siendo el valor medio de la corriente de 2 x 10^3 A durante 0,1 s. Haga una estimación de la altura *H* de la nube en estas condiciones, considerando que la permeabilidad del aire es e_0 = 8,85 x 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} la misma que la del vacío.(7 puntos)



Problema 4

El mesón pi $(\pi^{\pm})$ tiene un tiempo de vida media de 2,6 x 10^{-8} s. En el laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya (Bolivia) se observa que muchos de los mesones creados a 20 km de altura sobre dicho laboratorio llegan hasta él. Haga una estimación de la velocidad con que se mueven estas partículas. (7 puntos)

Problema 5

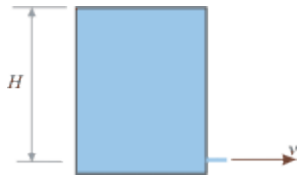
Un bote de masa *M*, inicialmente en reposo, tiene instalada una ametralladora. El arma dispara horizontalmente *N* balas por segundo durante un intervalo de tiempo *T*. Cada bala tiene una masa *m* y es disparada con velocidad V_0. Considere que la velocidad de las balas es siempre mucho mayor que la velocidad del bote. Considere también que *T* es pequeño y que *M* >> *TNm*. Desprecie además la resistencia que el agua ejerce sobre el bote. Teniendo en cuenta estas aproximaciones, calcule al cabo del tiempo *T*:

a. La velocidad del bote. (6 puntos)
b. La distancia recorrida por el bote. (4 puntos)



Problema 6

Considere un depósito lleno de agua. El depósito cuenta con un tubo de desagüe a una distancia *H* por debajo del nivel de agua. La sección del tubo es mucho menor que la superficie del depósito.



a. Calcule la velocidad de salida del líquido suponiendo que éste se comporta como un fluido ideal. (4 puntos)

$$v^2 = 2gH\left(1-\frac{2K}{\rho}\right)$$

b. Si el fluido es real, existe una pérdida de presión en el tubo dada por Kv^2, donde *K* es una constante y *v* la velocidad del agua a la salida del tubo. Demuestre que, en este caso, la velocidad de salida es: (6 puntos) supuesto que $2K << r$.

Ayuda:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\ldots\ldots$$

Problema 7

Un haz de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 633\ \text{nm}$ = 633 nm incide normalmente sobre una lámina de vidrio de grosor uniforme d = 1,0 mm e índice de refracción n = 1,52. La lámina está rodeada por aire. Al ir modificando lentamente la temperatura y, por tanto, el grosor de la lámina debido a su dilatación térmica, se observa que la intensidad de la luz reflejada alcanza dos máximos de interferencia consecutivos para T_1 = 23 ºC y T_2 = 34 ºC.

a. Determine el coeficiente de dilatación térmica del vidrio. (7 puntos)
b. Si la lámina estuviese apoyada sobre otro material de índice de refracción superior al del vidrio, ¿se seguirían observando máximos de intensidad para las mismas temperaturas indicadas? (3 puntos)



Nota: En ningún caso es necesario considerar reflexiones múltiples dentro de la lámina.

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

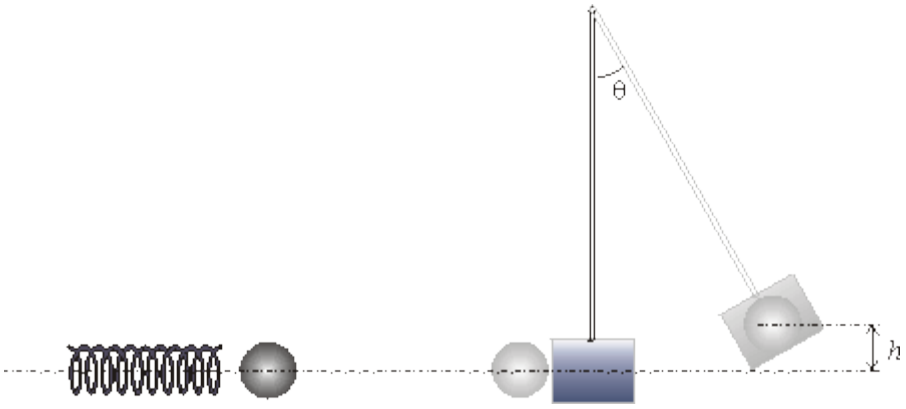
Antigua Guatemala, Guatemala, Octubre 2/2002

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental (25 puntos) Tiempo: 2h. 30min.

Obtención de la relación funcional entre magnitudes físicas.

INTRODUCCIÓN: Mediante un resorte que se comprime una distancia *x*, se dispara una esfera que es capturada por un péndulo balístico, en el cual se eleva hasta una altura *h*.



Supondremos que la dependencia entre *h* y *x* es del tipo:

$$h = Ax^n \qquad (1)$$

Donde *n* es un numero entero y A es una constante desconocida.

OBJETIVOS: Comprobar experimentalmente la dependencia (1) y determinar los valores de *n* y A.

DESCRIPCIÓN DEL EQUIPAMIENTO: El equipo de laboratorio consiste en lo siguiente: sobre una base de madera se encuentra un resorte localizado en un eje, sostenido por dos columnas, que puede comprimirse tirando de una varilla y fijándolo con una traba. Una esfera se coloca en el extremo del eje que contiene el resorte. El péndulo balístico esta formado por una varilla liviana con una capucha en su extremo inferior, que capturará a la esfera después del disparo y en su extremo superior un mecanismo de sujeción donde a través de un transportador y su marcador móvil puede determinarse la

desviación angular del péndulo respecto a la vertical. Se dispone una regla graduada en milímetros.

DESARROLLO:

1. Se recomienda al experimentador, antes de comenzar a realizar las mediciones sistemáticas:
   * familiarizarse con el equipo y el método de medición.
   * verificar que estén alineados la esfera y la capucha.
   * tener cuidado de que el transportador o escala angular no se despegue del montaje.
2. Comprima el resorte asegurándolo con el sujetador en una ranura.
3. Emplee la cinta de papel colocada debajo del muelle y el indicador para determinar la comprensión del resorte en cada caso.
4. Mida la desviación angular, θ, en el transportador y deduzca *h*.

TAREAS:

1. Construya una tabla donde aparezcan los diversos valores de *x*, θ, *h* y sus incertidumbres. Emplee las 6 primeras ranuras.
2. Represente las graficas que considere oportunas para comprobar la dependencia propuesta (1) y a partir de ellas, determine los valores de *n* y A. Realice una estimación de la incertidumbre de A.
3. A partir de lo anterior, escriba la relación entre *h* y *x* como resultado de su experimento.

Nota: Especifique la forma en que ha estimado u obtenido la incertidumbre de cada variable.

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

Antigua Guatemala, Guatemala, Octubre 1/2002

PRUEBA TEORICA

Problema 1 (7 puntos)

Una pequeña esfera de densidad ρ_m flota en agua con la mitad sumergida, siendo ρ_a la densidad del agua.

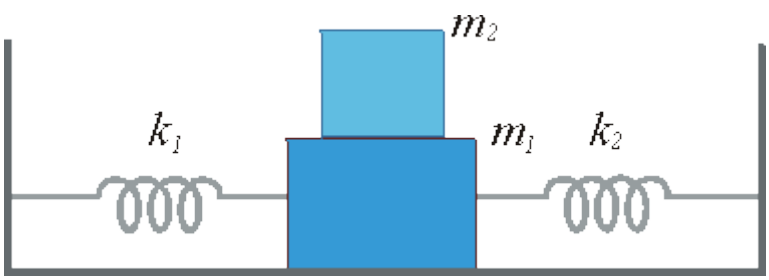
a. ¿Cuál es la densidad del material?

Posteriormente se coloca la esfera en el fondo de un depósito de 2 m de profundidad y luego se suelta.

b. ¿Cuál será la aceleración de la esfera mientras se mueve en el agua? Desprecie los efectos de fricción en el agua.
c. ¿Qué altura alcanzará la esfera sobre el nivel del agua?

Problema No. 2 (8 puntos)

El bloque m_1 de la figura está unido a las paredes fijas mediante resortes ideales de constantes elásticas k_1 y k_2. un segundo bloque de masa m_2 reposa sobre el anterior. Entre el bloque inferior y la superficie no existe fricción, pero si existe entre los bloques, con coeficiente de fricción estático μ_e. El sistema es apartado de su posición de equilibrio y se deja oscilar de manera que los bloques mantengan su reposo relativo. La oscilación es de la forma $x(t) = A \cdot \cos \omega t$ donde A es la amplitud y ω la frecuencia angular de la oscilación.



Determine:

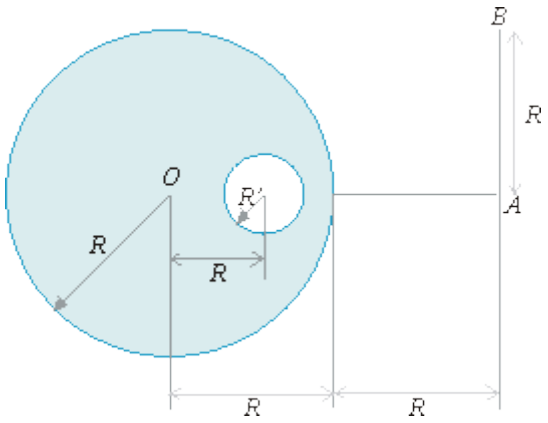
a. la frecuencia angular de la oscilación.
b. La amplitud máxima de la oscilación para que no exista deslizamiento entre los dos bloques.

Problema No. 3 (15 puntos)

Considere una distribución uniforme esférica de carga, de radio R y carga Q, situada en el vacío.

a. Determine el campo eléctrico en un punto situado a una distancia r del centro de la esfera. Considere los casos $r > R$ y $r < R$.

Suponga ahora que en la distribución anterior se vació una cavidad también esférica, de radio $R' = R/4$, cuyo centro esta situado a una distancia $R/2$ del centro de la distribución original, O, como se muestra en la figura.

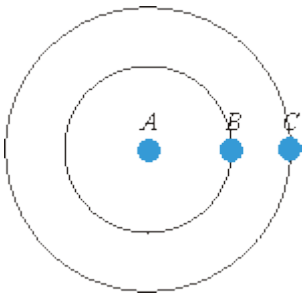


b. Determine el campo eléctrico en el punto A, situado a una distancia $2R$ de O, como se indica en la figura.
c. Determine aproximadamente el campo y el potencial en un punto situado a una distancia $r >> R$ de O.
d. Determine el campo eléctrico en el punto B, indicado en la figura.
e. Determine el trabajo que se debe realizar para trasladar muy lentamente (de forma cuasiestática) una carga puntual desde B hasta A.
f. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la cavidad es uniforme y dibuje sus líneas de fuerza.

Problema No. 4 (12 puntos)

Un observador A se encuentra en el centro de la Plaza España de Guatemala observando el movimiento de los motociclistas B y C. Dichos motociclistas se mueven en circunferencias, de radios R_B = 35,0 m y R_C=60,0 m, alrededor A,

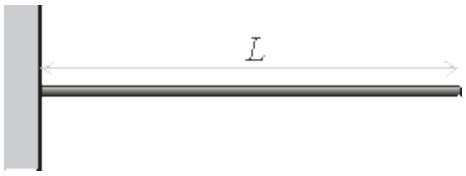
en el mismo sentido. Asimismo, el observador A determina que B emplea T_B = 10,0 s para completar una revolución, mientras que C emplea T_C =16,0 s.



a. Encuentre el mínimo número entero de vueltas, a partir del instante inicial, mostrado en la figura, que deben completar B y C para reproducir dicha configuración.
b. Encuentre el tiempo mínimo que transcurre, a partir del instante inicial, para que A, B, C se encuentren alineados, moviéndose B y C en el mismo sentido
c. Determine el número de vueltas y fracción que han dado B y C en dicho tiempo mínimo.
d. Cuando A, B y C se encuentran alineados, estando A entre B y C, determine las magnitudes de las velocidades que tienen A y B, respecto a C.
e. Cuando la diferencia angular entre B y C, es de 90° respecto a A, determine las magnitudes de las velocidades de A y B, respecto a C.

Problema No. 5 (8 puntos)

Una varilla de longitud *L* se halla empotrada en la pared como aparece en la figura.



En el extremo libre se induce una onda transversal representada por:

$$y(x,t) = A \cdot \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

Al reflejarse esta onda se generan ondas estacionarias de tal manera que en el extremo libre resulta un antinodo (máxima amplitud).

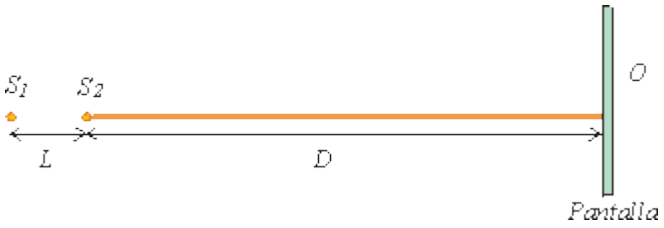
a. Obtenga la ecuación de la onda estacionaria
b. ¿Cuáles son la longitudes de onda permitidas?

c. Dibuje los primeros tres modos de vibración de la onda estacionaria.

Sugerencia: $\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

Problema No. 6 (10 puntos)

Dos fuentes luminosas puntuales y coherentes, S_1 y S_2, están situadas sobre una recta perpendicular a una pantalla. La distancia entre las dos fuentes es $L = 2\lambda$, donde λ es la longitud de onda de la luz. La distancia entre S_2 y la pantalla es $D >> \lambda$.



a. en el punto O de la pantalla, alineado con las fuentes, se observa un máximo de interferencia, rodeado de un anillo brillante. Razone por qué.
b. Determine el radio del anillo.

Sugerencia: Tenga en cuenta que, si $\varepsilon << 1$, $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$.

VIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

La Habana, Cuba, Septiembre 24/2003

PRUEBA EXPERIMENTAL

Problema experimental (10 puntos) Tiempo: 2h. 30min.

El vuelo del capacillo (filtro de papel).

La fuerza de resistencia que sufre un cuerpo al moverse en el seno de un fluido está dirigida naturalmente en sentido contrario al movimiento y depende de la velocidad del cuerpo. Un modelo para esta dependencia es

$$F=cv^{\gamma},$$

donde c y γ son constantes que dependen de la forma del cuerpo y de la naturaleza del fluido.

En nuestro caso específico, estudiaremos la caída en el aire de uno o varios capacillos de papel superpuestos, dejándolos caer de modo que la parte abierta quede hacia arriba (o sea, a la inversa de como cae un paracaídas). En este experimento, la velocidad es aproximadamente constante durante toda la caída siempre que ésta dure más de un segundo.

Determine experimentalmente el exponente definido según la expresión anterior. Para ello usted dispondrá en su puesto de trabajo de:

- 3 capacillos de igual masa
- un cronómetro
- cinta adhesiva para referencia de altura
- papel milimetrado y papel log-log

Recuerde que la forma de los capacillos es muy importante en la caída, por lo que deberá tener especial cuidado en su manipulación con el fin de no deformarlos durante los ensayos. De cualquier manera, si se le estropea alguno, puede pedirle al profesor que se lo reponga.

Midiendo momentos magnéticos con reglas graduadas (10 puntos) Tiempo: 2h. 30min.

Un imán permanente cilíndrico se puede representar como un solenoide por el que circula una corriente eléctrica cerrada y constante. Se puede caracterizar por su momento magnético, , que se expresa en Am^2. La determinación del momento magnético de un material se suele realizar mediante el uso de magnetómetros, que son equipos cuyo principio de funcionamiento puede ser muy variado (desde la sencilla inducción magnética en una bobina detectora, hasta la interferencia cuántica

superconductora), los cuales casi siempre involucran equipamiento electrónico sofisticado.

En este problema proponemos medir el momento magnético de un imán permanente comercial usando medios tan sencillos como reglas graduadas...y el hecho de disponer de un segundo imán idéntico. Para ello, usted se encontrará en su puesto de trabajo los siguientes elementos:

1. Dos imanes permanentes idénticos de masa cada uno
2. Reglas graduadas
3. Cierta cantidad de cinta adhesiva
4. Papel
5. Soporte universal con pinzas (encontrará los imanes pegados al soporte)

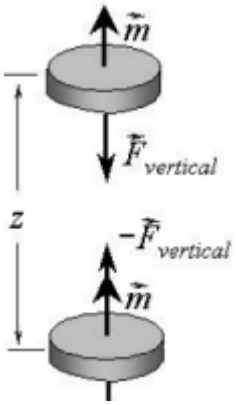
El problema consiste en determinar la magnitud del momento magnético de los imanes utilizando exclusivamente los elementos enumerados más arriba, mediante dos métodos diferentes.

Desarrolle uno de los métodos de manera completa, es decir, descríbalo, determine experimentalmente el valor del momento magnético y calcule su error. [7 puntos]

Para el otro método, descríbalo y realice al menos una medición del valor del momento magnético, sin cálculo de errores. [3 puntos]

A continuación, encontrará un grupo de expresiones y datos que pudieran ser útiles, y que supondremos que se cumplen, para el caso de los imanes, en nuestro experimento:

1. Módulo de la fuerza que ejerce un imán de momento magnético m sobre un segundo imán idéntico que se encuentra a una distancia z del primero, a lo largo del eje de simetría del sistema (ver figura a la derecha):

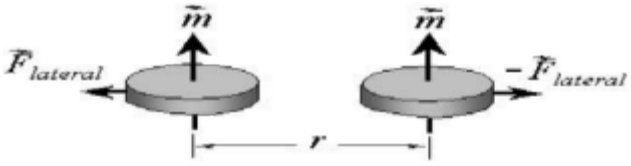


$$F_{vertical} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2}{z^4} \quad \text{(E1.1)}$$

   En la figura se representa el caso en que la fuerza es atractiva, pero ésta es repulsiva si los momentos magnéticos de los imanes tienen sentidos opuestos.
2. Módulo de la fuerza que ejerce un imán de momento magnético m sobre un segundo imán idéntico que se encuentra a una distancia lateral r del primero (ver figura a la derecha):

$$F_{lateral} = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{m^2}{r^4} \quad \text{(E1.2)}$$

   En la figura se representa el caso en que la fuerza es repulsiva, pero ésta es atractiva si los momentos magnéticos de los imanes tienen sentidos opuestos.



3. El coeficiente de fricción estático entre la superficie plana de un imán, y la de las reglas $\mu_{estática} = 0.58 \pm 0.08$ ucartabones, es
4. $g \approx 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\mu_0 \approx 1.26 \times 10^{-6} \frac{\text{m kg}}{\text{s}^2 A^2}$

VIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA

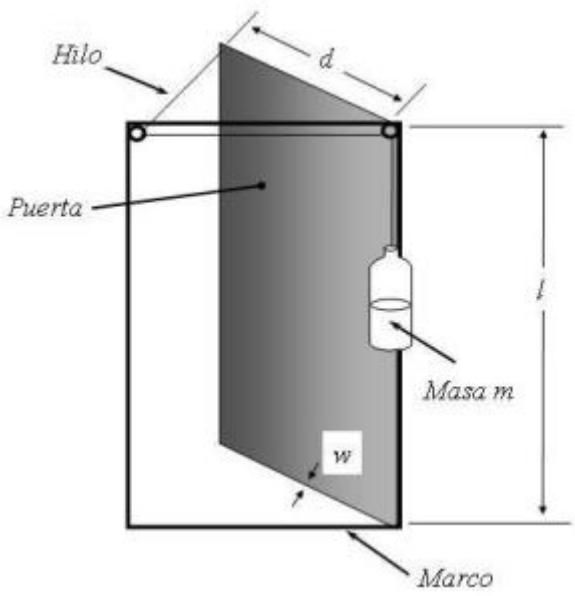
La Habana, Cuba, Septiembre 22/2003

PRUEBA TEORICA

Problema 1 (10 puntos)

Sistema gravitacional para el cerrado de puertas

Cierto administrador de cine tacaño, para no comprar un brazo hidráulico comercial, ha diseñado el dispositivo que se muestra esquemáticamente en la figura para que la puerta de su establecimiento, cuya masa es *M*, se cierre automáticamente cuando la dejan abierta.



Exactamente al extremo superior de la puerta se ata el extremo de un hilo sin masa que se desliza por dos aros cuyas dimensiones pueden despreciarse y que están fijos al marco de la puerta. Del otro extremo del hilo se cuelga una botella ligera que contiene una masa *m* de agua mucho menor que la masa de la puerta ($m << M$). La puerta, de ancho *d* y altura $l = 2.0$ m, está formada por una plancha de vidrio de grosor $w = 10$ mm y una densidad $r = 5.0$ g/cm^3. El principio de trabajo del dispositivo es sencillo: si la puerta queda abierta, y puede hacerlo hasta un ángulo máximo de 90 grados, el frasco con agua desciende por su peso, haciendo que la puerta se cierre debido a la fuerza trasmitida por el hilo. Suponemos en adelante que al cerrarse completamente la puerta se produce un choque perfectamente inelástico y no se consideran en ningún lugar del sistema fuerzas de rozamiento que pudieran existir.

Recuerde que el momento de inercia de una placa de masa *M*, según un eje paralelo a uno de sus lados verticales y que pasa por su centro, es $I = \frac{ML^2}{12}$, donde *L* es la longitud del lado perpendicular al eje.

1.1

Si el tipo de vidrio de la puerta soporta sin astillarse una velocidad de impacto máxima en el borde de la puerta $v_{max} = \frac{\varphi}{ld}$, donde $\varphi =$ 3.0 m^3/s, y la masa de agua en la botella es m = 1.0 kg, ¿qué condición impondría usted al ancho de la puerta para que ésta no se rompa al cerrarse? Suponga que el hilo es inextensible. [3 puntos]

1.2

Suponga ahora que en el momento del portazo el hilo deja de ser inextensible y se comporta como un resorte de constante elástica k= 10 N/mm hasta que se ejerce sobre él una tensión límite T_{lim} = 200 N, por encima de la cual se rompe. ¿Cuál es la masa máxima de agua que puede ser introducida en la botella sin que el hilo se rompa tras cerrarse la puerta? [3.5 puntos]

1.3

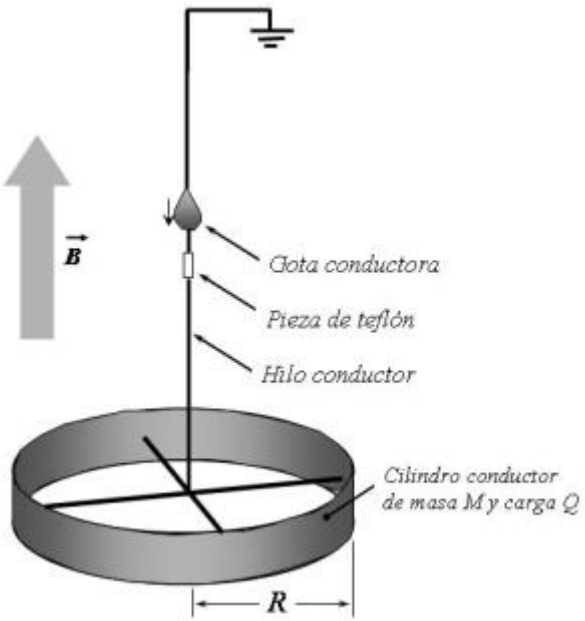
Alguien ha abierto lentamente la puerta del cine hasta dejar una pequeña separación de 5.0 cm entre el borde de la puerta y el marco. Sin embargo, al darse cuenta de que lo que están exhibiendo es ?Gladiator II?, se arrepiente de entrar y suelta la puerta. En caso de que la puerta tuviese un ancho d = 80 cm y la masa de agua fuese m = 1.0 kg, ¿qué tiempo tardaría en cerrarse? [3.5 puntos]

Problema No. 2 (10 puntos)

Una paradoja de Feynman

Sea el sistema descrito en la figura. Una cinta metálica de forma cilíndrica muy fina, con carga Q y masa M, cuelga de un hilo conductor formando un péndulo de torsión cuyo coeficiente (torque necesario para hacer girar un radián a la cinta), es K. Supongamos que el radio de la cinta es R, y que ésta se sostiene por medio de una cruceta conductora soldada tanto a la cinta como al filamento de suspensión. Este último está interrumpido por un pequeño segmento de teflón, que es un excelente aislante eléctrico. Todo el sistema se encuentra inmerso en un campo magnético B, paralelo al hilo de suspensión.

Describamos ahora la situación en la cual se produce la paradoja. Considere que una pequeña gota de líquido conductor se desliza por el hilo sin intervención de ningún ente exterior hasta alcanzar el segmento de teflón y establecer continuidad eléctrica en toda su longitud. Al ocurrir esto, s*e observa que la cinta gira, lo cual parece violar la ley de conservación del momento angular*.



Esta es justamente la paradoja que le invitamos a analizar.

En adelante, desprecie la resistencia de los filamentos y de la gota conductora, así como la masa de los hilos conductores. Suponga que el sistema está en el vacío y que la cinta no gira apreciablemente durante la descarga.

2.1

Determine el momento angular que adquiere la cinta inmediatamente después de la descarga, en función de *Q*, *R* y *B*. [5 puntos]

2.2

Obtenga una expresión para el ángulo máximo que gira la cinta después de la descarga. [3 puntos]

2.3

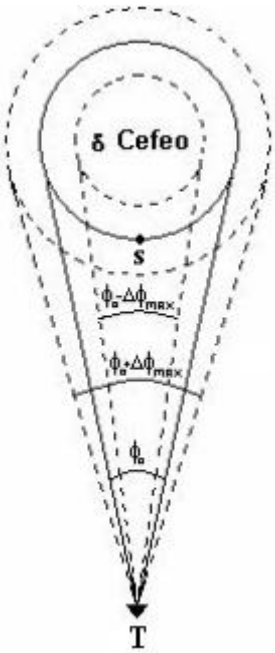
Suponga que la bobina que produce el campo posee un radio infinito. Indique entonces qué ente físico de los que constituyen el sistema (cinta metálica, hilos conductores, campo electromagnético?) pierde el momento angular que gana la cinta. [2 puntos]

A Y U D A : Un péndulo de torsión es análogo a un sistema masa-resorte, donde todos los parámetros y leyes de la traslación tienen sus análogos en la rotación. Por ejemplo, la deflexión del resorte tiene su análogo en el ángulo que rota el péndulo de torsión; $F = kx$ tiene su análogo en $\tau = K\theta$, etc.

Problema No. 3 (10 puntos)

Observando la estrella δ de Cefeo

La estrella δ de Cefeo es una representante típica del numeroso grupo de estrellas pulsantes conocidas como cefeidas clásicas. Estas estrellas se caracterizan por variaciones periódicas del brillo, asociadas a pequeñas oscilaciones de sus radios.



Se conoce que el período de estas oscilaciones para δ de Cefeo es τ, y que en este proceso el diámetro angular, medido desde un observatorio T en la Tierra, varía entre $\phi_0 - \Delta\phi_{max}$ y $\phi_0 + \Delta\phi_{max}$ (ver figura), todos ángulos muy pequeños. Se conoce también que debido al conocido efecto Doppler, la luz de longitud de onda λ, correspondiente a cierta transición en el átomo de helio, y que es emitida desde el punto S en la superficie de la estrella en el instante en que la velocidad de expansión es máxima, está desplazada en $\Delta\lambda$. Con estos datos, veremos que es posible determinar la masa *M* de δ de Cefeo y la

distancia *L* a la que la estrella se encuentra de nosotros. Para esto, consideraremos δ de Cefeo como una esfera de gas caliente que se dilata y contrae adiabáticamente y despreciaremos tanto el movimiento de la Tierra como cualquier efecto relativista.

3.1

Suponga que el movimiento pulsatorio de δ de Cefeo puede considerarse armónico simple. Determine la distancia *L* desde el centro de esta estrella hasta el observatorio terrestre a partir del desplazamiento Doppler $\Delta\lambda$ de la línea $\lambda,$ en función de parámetros observados desde T y la velocidad de la luz en el vacío, *c*. Tenga en cuenta que para el desplazamiento Doppler de una señal luminosa emitida por una fuente que se acerca o aleja del receptor a una velocidad v, se cumple la expresión $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. [4 puntos]

Para responder las siguientes preguntas, concentre su atención en la expresión de la 2a Ley de Newton para un pequeñísimo volumen de la estrella que encierra una pequeña masa *m*, ubicado muy cerca de la superficie de la estrella. Sobre este volumen actúa una fuerza $P \cdot A$, correspondiente a la presión *P* que le empuja hacia fuera, y la atracción de prácticamente toda la masa *M* de la estrella. Tenga en cuenta que el área de la sección del pequeño volumen es $A = \Omega \cdot R^2$, donde *R* es la posición radial de la masa *m* y Ω es una constante.

3.2

Denotemos por un subíndice ?0? las magnitudes correspondientes a la posición de equilibrio de la estrella. Obtenga una expresión para la presión en el equilibrio, $P_0,$ en función de m, $\phi_0,$ Ω $\Delta\lambda,$, $\lambda,$, *M* y la constante gravitacional *G*. [3 puntos]

3.3

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en 3.1) y 3.2), halle una expresión para la frecuencia de oscilación de δ de Cefeo en función de *M*, *L* , $\phi_0,$, el exponente adiabático γ y la constante de gravitación universal *G*. A partir de esta expresión, determine la masa *M* de δ de Cefeo en función de γ , *G* , *c* y los parámetros observados descritos en el segundo párrafo del enunciado. [3 puntos]

Si $\Delta R = R - R_0$, y teniendo en cuenta que las oscilaciones son pequeñas, utilice la aproximación $\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\frac{\Delta R}{R_0}$. Considere que en un proceso adiabático se cumple que PV^{γ} es constante, donde *P* y *V* son la presión y el volumen del gas, respectivamente.

IX Olimpíada Iberoamericana de Física

Salvador, Septiembre de 2004

1 Experimento I: Medidas de viscosidad y la Ley de Stokes

1.1 Objetivo

El objetivo de ese experimento es estudiar el roce viscoso que un fluido (óleo lubrificante de automóviles) puede ejercer sobre objetos en movimento en su interior.

1.2 Introduccíon

El movimiento de fluidos en tubos o de objetos en el interior de fluidos es objeto de la mecánica de los fluidos. De manera general, el movimiento relativo de sólidos y fluidos sólo puede ser descrito de forma simple en situaciones de baja velocidad. En esa situación decimos que el régimen de flujo es laminar pués el fluido se comporta como si compuesto de camadas muy finas que deslizan, con roce en la situación real, unas sobre las otras. La forma de esas láminas depende de la simetría del problema particular. En las condiciones de flujo laminar podemos definir el coeficiente de viscosidad dinámica, η.

En 1850, G. G. Stokes mostró que si el flujo es laminar, la fuerza de arrastre ejercida por el fluido sobre una esfera de radio r desplazandose con velocidad $\vec{v}$ en un medio infinito de viscosidad η, es dada por:

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{v}. \tag{1}$$

Cuando existen paredes próximas (o sea, si la hipótesis de medio infinito no es satisfecha) correcciones a la ley de Stokes (1) devem ser adicionadas. En el caso de una esfera cayendo verticalmente a lo largo del eje de un cilindro de lonjitud H y radio interno $R > r$, R. Ladenburg, O. Emersleben y H. Faxén determinaron que la fuerza de resistencia calculada por Stokes deve ser corregida para

$$\vec{F}_S \;=\; -6\pi\eta\lambda r\vec{v}\,,$$

siendo que, en la aproximación en que $R \gg r$, $H \gg r$ y para bajas velocidades, se tiene

$$\lambda \;=\; \left(\frac{1+3,3\left(\dfrac{r}{H}\right)}{1-2,104\left(\dfrac{r}{R}\right)+2,09\left(\dfrac{r}{R}\right)^3}\right)\,.$$

1.3 Cuestión

Considere la esfera en caida vertical a lo largo del eje del cilindro. Escriba la ecuación de movimiento, usando la segunda ley de Newton, para la fuerza resultante (peso, roce y empuje) sobre la esfera. La presencia de roce viscoso hace con que la velocidad de la esfera se aproxime rápidamente de una velocidad límite $v_{\rm lim}$. Muestre que esa velocidad límite es dada por

$$v_{\rm lim} \;=\; \frac{2(\rho_{\rm esf}-\rho)}{9\eta\lambda}gr^2\,,$$

$\rho_{\rm esf}$ siendo la densidad de la esfera y g la aceleración de la gravedad.

1.4 Experimento

1.4.1 Material

Una probeta con aproximadamente 1 litro de óleo lubrificante de automóviles, 20 esferas metálicas de diámetros 1,5 mm, 2,0 mm, 2,5 mm e 3,0 mm (5 de cada), 1 cronómetro, regla graduda, tela adehesiva y papel milimetrado. Sabemos que la densidad del óleo es 0,89 g/cm^3, la densidad de las esferas metálicas es $7,8 \pm 0,1$ g/cm^3 y el diámetro interno de la probeta es $60,5 \pm 0,5$ mm. Tome $g = 9,8$ m/s^2.

1.4.2 Medidas y Análisis

1. Mida la velocidad límite de caida para esferas de diferentes diámetros, tomando cuidado para dejar caer las esferas lo más cerca posible del eje de la probeta. Describa detalladamente el procedimiento utilizado y estime el error de sus medidas.

2. Haga el estudio en papel milimetrado de la dependencia de v_{lim} como función del radio r de las esferas.

3. Obtenga el coeficiente de viscosidad del óleo, η. Estime el error de su medida.

4. El régimen en que se dan los fenómenos dinámicos en fluidos puede ser evaluado con la introducción de un parámetro adimensional, denominado número de Reynolds. En el caso en cuestión el número de Reynolds puede ser adoptado como

$$\mathcal{R} = \frac{2r\rho v_{\text{lim}}}{\eta}, \tag{2}$$

   donde ρ es la densidad del fluido. Un valor $\mathcal{R} \ll 1$ indica que la aproximación laminar es razonable. Verifique la condición de régimen laminar para los experimentos realizados con las diversas esferas utilizadas.

IX Olimpíada Iberoamericana de Física

Salvador, Septiembre de 2004

2 Experimento II: Interferometría y polarización

2.1 Introducción histórica

Albert Abraham Michelson y Edward Williams Morley realizaron en 1887 lo que se conoce como el experimento de Michelson-Morley. En ese célebre experimento, no fue observado ningún movimiento de la Tierra respecto al Éter, medio hipotético en el cual se creía que las ondas de luz se propagaban, aún cuando la sensibilidad del aparato era suficiente para la observación del efecto esperado, en el caso de que existiese. Este resultado se tornó en uno de los fundamentos más importantes de la teoría de la relatividad de Einstein. Para realizar este experimento, Michelson montó un interferómetro.

2.2 Objetivo

En esta actividad experimental usted utilizará un interferómetro semejante al de Michelson-Morley para estudiar la interferencia de la luz y su dependencia con la polarización.

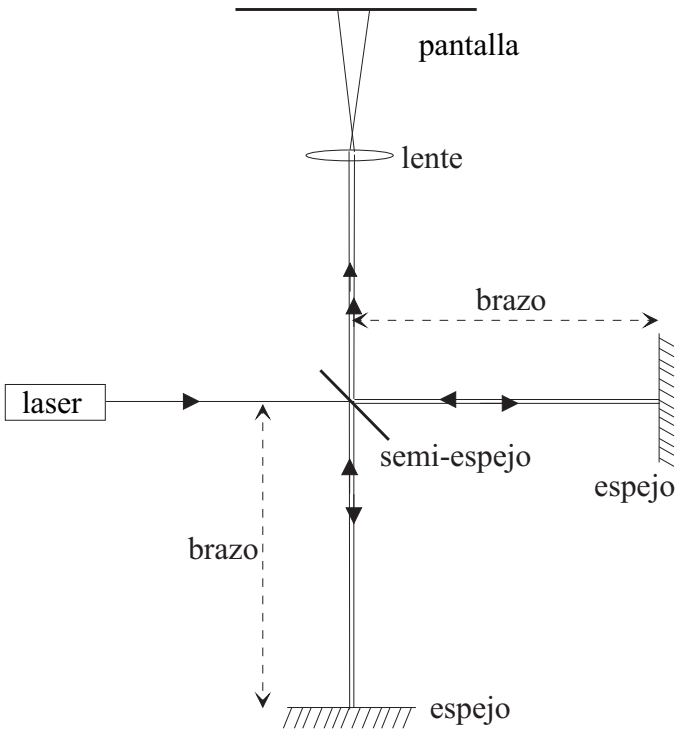


Figura 1: Trajecto de los rayos luminosos en el interferómetro

2.3 Experimento

Normas de seguridad y cuidado

1. **No mire directamente la luz del laser, puede provocarle lesiones permanentes en la retina.**
2. **No toque por ningún motivo con sus manos ninguno de los espejos, semiespejo o lente del interferómetro. Pueden ser dañados irreversiblemente.**

2.3.1 Material

Un interferómetro de Michelson-Morley que consta de: un puntero laser con una base, dos espejos planos, un semi-espejo plano y una lente biconvexa. Dos polarizadores con bases, un polarizador suelto, sin base, pantalla y papel (ver figura). Los polarizadores están cortados de forma que el eje de polarización es paralelo a una de sus aristas.

2.3.2 Desarrollo

1. Ajuste la orientación de los espejos para obtener franjas de interferencia en la pantalla.
2. Dibuje un esquema de lo observado en la pantalla.
3. ¿Qué partes del diagrama corresponden:
   (a) al patrón de interferencias?
   (b) a posibles imperfecciones del haz del laser?
4. ¿Como puede distinguir ambas contribuciones?
5. ¿Es posible determinar de manera única, con los elementos de que dispone, la dirección de polarización del haz laser? Explique.
6. Coloque un polarizador con base en cada brazo del interferómetro (entre el semi-espejo y cada espejo plano), de modo de recibir luz en la pantalla de observación proveniente de cada brazo del interferómetro.

   Asegúrese que la polarización de la luz proveniente de un brazo es perpendicular a la polarización de la luz proveniente del otro brazo. ?Cómo realizó esta verificación?

   ?Cuál es la polarización relativa de los polarizadores con base?

   Describa detallada y ordenadamente su procedimiento.
7. Explique detalladamente porqué Ud. no observa franjas de interferencia (o el contraste de las franjas está extremadamente disminuido) con la configuración del item anterior.
8. Utilizando el polarizador suelto, recupere las franjas de interferencia sin tocar los brazos del interferómetro ni los polarizadores con base en ellos colocados. Explique el procedimiento y el resultado en términos de polarización de la luz.

IX Olimpíada Iberoamericana de Física

Salvador, Septiembre de 2004

Problema 1 - Sensores Hall (10 puntos)

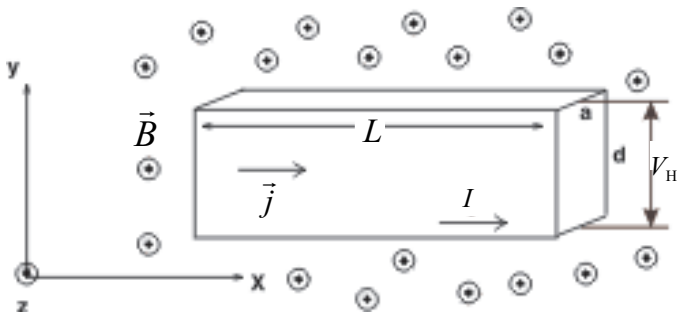


Figura 1: Placa de material semicondutor atravesada por corriente I y colocada en un campo magnético $\vec{B}$.

Muchos automóviles estan equipados con sensores de velocidad basados en el Efecto Hall. El sensor Hall, fijo a la carrocería y próximo a la rueda, consiste en una plaquita de material semiconductor, a través de la cual pasa una corriente I, montada frente a un imán que produce un campo magnético aproximadamente uniforme de magnitud B. Como resultado, se genera un voltaje de magnitud V_H. Cuando un dispositivo (placa metálica de elevada permeabilidad magnética), fijo a la rueda, pasa entre el imán y la plaquita semiconductora, anula el campo y el voltaje Hall, V_H del sensor. Eso produce como señal de salida una serie de pulsos de forma aproximadamente cuadrada (vea figura 2), que puede ser utilizada por el computador de a bordo para medir la velocidad angular de la rueda.

(a) Considere una plaquita semiconductora de altura d, espesor a y longitud L, donde hay una densidad de corriente $\vec{j}$ (Fig. 1), situada en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. Suponga que la corriente sea debida a portadores de carga q y que n sea la densidad de portadores en la plaquita, de forma que el módulo de la densidad de corriente sea $j = I/ad = nqv$, donde v es la velocidad de de los portadores. Obtenga una expresión para el voltaje Hall generado entre el plano superior e inferior de la plaquita que compensa el efecto del campo magnético sobre los portadores de carga.

(b) Suponga que la plaquita semiconductora tiene altura $d = 1,0$ cm, espesor $a = 250$ μm, longitud $L = 1,0$ cm. Por ella circula una corriente de 16 mA y está sometida a un campo magnético $B = 0{,}1$ T. La densidad de portadores en el material, con carga $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, es $n = 10^{19}/\text{cm}^3$. Calcule el valor de V_H.

(c) ¿Cuál es la velocidad de los portadores de carga asociados a la corriente?

(d) En la Fig. 2 tenemos un gráfico del voltaje Hall en función del tiempo. Siendo $t_1 = 0,5$ s, $t_2 = 0,9$ s y $t_3 = 1,2$ s ¿el automóvil está acelerando o frenando? ¿Cual es el valor medio de la aceleración entre intervalos de tiempo consecutivos? Se sabe que el diámetro típico de una rueda es de 60 *cm*.

(e) ¿Que distancia recorrió el automóvil desde $t = 0$ hasta t_3?

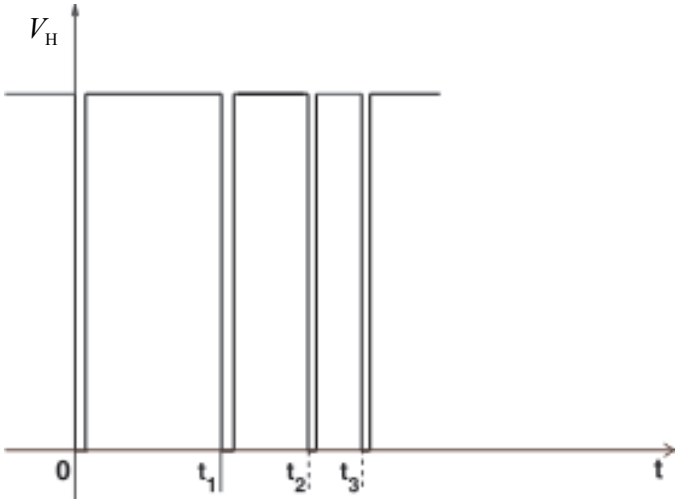


Figura 2: Gráfico del voltaje Hall en función del tiempo.

Problema 2 - Ondas sonoras y dilatación térmica (10 puntos)

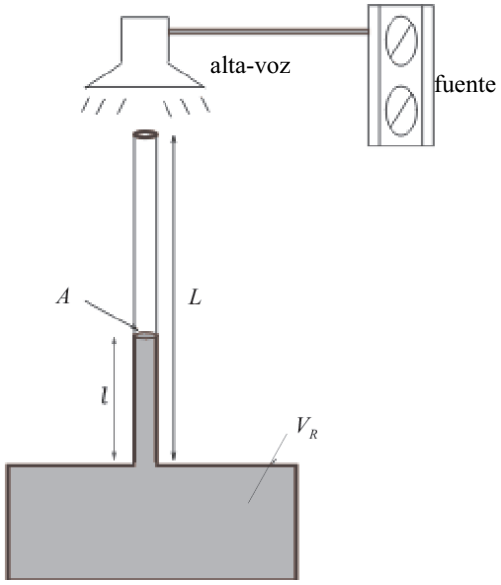


Figura 3: Montaje del experimento de resonancia.

El estudio de los modos normales de vibración en una columna de aire puede ser realizado a través de una experiencia de resonancia. Un altavoz, de frecuencia conocida f (variable), emite ondas sonoras en un tubo de vidrio con líquido en el fondo (ver fig. 3). Consideremos que el líquido sea mercurio (¡cuidado: el mercurio es tóxico. Si quisiera hacer la experiencia, use agua!).

(a) Suponga que a la temperatura T_1, la altura de la columna de mercurio (Hg) es l_1 . La velocidad del sonido, a esa temperatura, es v_1. Si la altura total del tubo es L, escriba la expresion de la frecuencia fundamental de resonancia f_1 en función de L, l_1 y v_1.

(b) La misma experiencia se realiza a la temperatura T_2, mayor que T_1. Sabiendo que la sección recta del tubo tiene área A y el coeficiente de dilatación volumétrica del Hg es β, obtenga la expresión de la nueva altura de la columna de mercurio, l_2. Desprecie la dilatación del vidrio, asi como efectos de capilaridad. Considere que el volumen V_R contenido en el recipiente inferior es mucho mayor que el volumen ocupado por la columna de mercurio.

Nota. Tenga en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica es

$$\beta = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T},$$

donde V_0 es el volumen inicial, ΔV es la variación del volumen y ΔT es la variación de temperatura.

(c) Sabiendo que la velocidad del sonido puede ser escrita en la forma $v = C\sqrt{T}$, donde C es una constante y T es la temperatura dada en Kelvin, obtenga la expresión de la velocidad v_2 a la temperatura T_2 en función de v_1.

(d) Obtenga la expresión de la nueva frecuencia fundamental de resonancia f_2.

(e) Suponga que, a las temperaturas de $T_1 = 17°\text{C}$, $T_2 = 27°\text{C}$ y $T_3 = 37°\text{C}$, las frecuencias fundamentales de resonancia respectivamente son $f_1 = 200$ Hz, $f_2 = 210$ Hz y $f_3 = 225$ Hz. Sabiendo que la razón entre V_R y el área A es 9,0 m y que a la temperatura de 17 °C $(L - l_1) = 42,8$ cm, calcule el coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio.

Problema 3 - Absorción de radiación (5 puntos)

Podemos tener alguna idea sobre la absorción de radiación por la materia considerando un sistema de oscilador armónico forzado y amortiguado. Considere una partícula de masa m, en un medio viscoso, sujeta a una fuerza disipativa proporcional a su velocidad ($f_{\text{disip}} = -\alpha\, v$) y ligada a una pared por un resorte de constante elástica $k = m\omega_0^2$.

(a) Una fuerza armónica externa $f = f_0 \cos(\omega t)$ es aplicada a la partícula, en la misma dirección de su movimiento. La potencia media transferida a la partícula en un período es

$$\overline{P} \;=\; \frac{\alpha f_0^2 \omega^2}{2[m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \alpha^2\omega^2]}\;.$$

Describa el comportamiento de $\overline{P}$ com ω.

(b) Considere que la partícula ya no está ligada a la pared. ¿Cuál sería, en esta situación, la expresión para la potencia media $\overline{P}$?

Problema 4 - Expansión del universo (5 puntos)

De acuerdo con el modelo del "big bang", el universo evolucionó de una situación de alta densidad y temperatura a la situación actual por un proceso de expansión. En una de las etapas de la expansión la densidad del universo alcanzó un valor crítico del orden de 10^{-20} g/cm^3, razón por la cual los fotones transitan grandes distancias sin interactuar con la materia. A este proceso se lo llama desacoplamiento de la radiación con la materia. Este desacoplamiento se alcanzó cuando la temperatura del universo era $T_D = 3000$ K . Si suponemos que los fotones producidos a partir del momento del desacoplamiento estaban en equilibrio térmico con la materia, la intensidad de la radiación por ellos producida debe obedecer a la *fórmula de Planck*:

$$R(\lambda) \;=\; \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\;,$$

donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz, k es la constante de Boltzmann, λ es la longitud de onda y T la temperatura.

De acuerdo con la expresión de Planck, el máximo de radiación corresponde a una longitud de onda $\lambda_{\max}$ dada por la llamada *ley de Wien*:

$$\lambda_{\max} \;=\; \frac{2,9\times 10^{-3}}{T}\;,$$

donde la cantidad $2,9\times 10^{-3}$ es una constante universal dada en metro-kelvin. La temperatura T se mide en kelvin.

(a) La densidad actual de materia en el universo es del orden de 10^{-29} g/cm^3 y la radiación emitida, producto del desacoplamiento de la radiación con la materia, es observada actualmente en forma de radiación cósmica de fondo, la cual obedece la ley de Planck, a una temperatura T_0. Suponiendo que todas las distancias en el universo se expanden isotrópicamente, calcule la temperatura actual del universo T_0.

(b) Los datos del satélite COBE, representados en la fig. 4, indican que la radiación cósmica de fondo sigue la fórmula de Planck para una cierta temperatura $T_0^{(\exp)}$. Utilizando la gráfica número 4 determine la temperatura $T_0^{(\exp)}$.

(c) Determine la diferencia porcentual entre las temperaturas determinadas en los items anteriores.

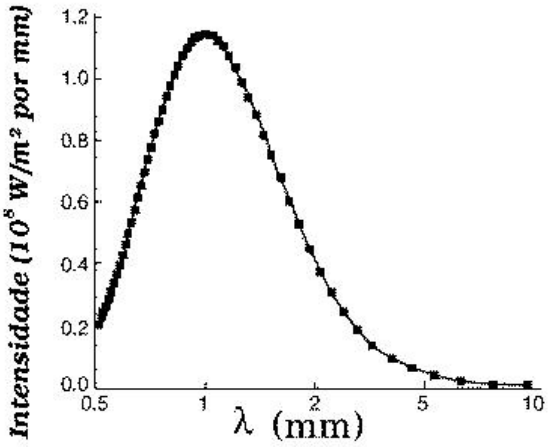


Figura 4: Espectro de la radiación cósmica de fondo medida por el satélite COBE.

Prova experimental – Parte 1 (50 pontos)

Determinação do coeficiente de viscosidade da água

Introdução. A viscosidade é uma importante propriedade dos fluidos. Está relacionada com a resistência que um fluido oferece a uma força de deslizamento (ou cisalhamento) ou, por outras palavras, com a dificuldade para fazer fluir diferentes porções de fluido com uma certa velocidade relativa. Por exemplo, a água ou o ar são pouco viscosos em comparação com o óleo, a glicerina ou o doce de leite (doce muito espesso, típico no Uruguai). Facilmente se observa que o esforço para fazer passar um fluido por um tubo é tanto maior quanto mais viscoso ele for. Na IX Olimpíada Ibero-Americana de Física, no Brasil, propôs-se um método para calcular a viscosidade baseado na Lei de Stokes, válido para fluidos relativamente viscosos como a glicerina. No caso presente vamos estimar a viscosidade de um fluido menos viscoso.

Objectivo. Determinar experimentalmente o coeficiente de viscosidade μ da água.

Nota teórica. Suponhamos que temos um tubo cilíndrico de comprimento L e raio a e aplicamos uma diferença de pressão ΔP entre os extremos. Imediatamente, se a diferença de pressão for pequena, o fluido passará pelo tubo de forma suave e ordenada, o que se denomina **regime laminar**. Se aumentarmos a diferença de pressão o fluxo será cada vez mais rápido e, em determinado momento, ficará **turbulento**, ou seja, desordenado, caótico e imprevisível.

A transição entre estes dois regimes foi estudada pela primeira vez por Osborne Reynolds, em 1883, numa famosa experiência. Não se trata de um problema simples; note-se que em finais de 2003 foi publicado um trabalho que clarificava aspectos importantes da transição entre os fluxos laminares e turbulentos em tubos cilíndricos.

O fluxo no interior de um tubo circular é um dos poucos casos que se pode determinar exactamente. A partir das equações básicas da mecânica de fluidos, conclui-se que, se o regime for laminar, o caudal/fluxo volumétrico, Q (volume de fluido por unidade de tempo) vem dado pela equação de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta P}{8 \mu L}$$

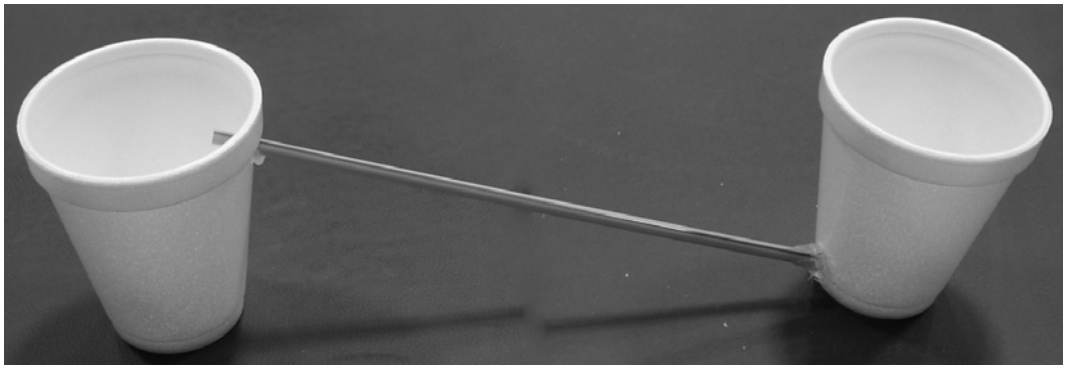
Tenha em conta que este resultado só é válido se o fluxo for laminar, caso contrário esta lei não se verifica.
Como ajuda, indicamos-lhe que, nas condições experimentais presentes, a máxima diferença de pressão para que o fluxo seja laminar é ΔP_{max} = 100 Pa.

Materiais:
Dois copos iguais
Tubo plástico (palhinha/canudinho)
Régua
Cronómetro/cronômetro
Tesoura
Bandeja (para não derramar a água)
Vedante para plástico (tempo de secagem 15 minutos)
Proveta graduada
Copo grande para transportar água.
Água.

Apresente um relatório nas folhas de resposta que inclua:

a) Método (descreva e justifique o procedimento, identifique as dificuldades, diga como as resolveu) (15 pontos)
b) Medidas e tratamento de dados (15 pontos)
c) Resultado da medida (10 pontos)
d) Conclusões (análise do resultado, ideias para melhorar o procedimento) (10 pontos)

Dados:
$a = (2{,}4 \pm 0{,}1)$ mm
$\rho_{\text{água}} = 1000$ kg/m^3
$g = 9,8$ m/s^2
Despreze a incerteza nos valores da densidade da água e da aceleração gravítica/gravitacional.
Sugere-se a montagem mostrada na fotografia.

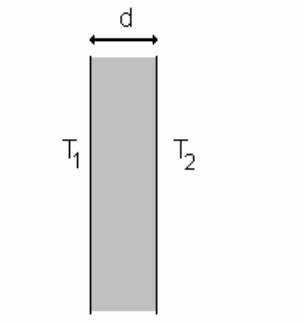


Prova experimental – Parte 2 (50 pontos)

Determinação da Condutividade Térmica

Introdução. A capacidade de transmitir (ou não) calor é de vital importância para todos os seres vivos. Em particular, para o ser humano isto é biologicamente importante em diversas situações quotidianas e em inúmeras aplicações industriais. Em muitas situações interessa conduzir bem o calor, por exemplo, quando cozinhamos, ou quando se pretende dissipar o calor num sistema electrónico/eletrônico, etc. Noutras situações interessa dificultar a passagem do calor, por exemplo, para mantermos o nosso corpo a determinada temperatura ou para conservar alimentos. Uma forma de quantificar a capacidade dos materiais para conduzir o calor é usar a condutividade térmica.

Objectivo/objetivo. Determinar a condutividade térmica da espuma de poliestireno, material de que é feito o copo.



Teoria: Em 1822 Joseph Fourier propôs, no seu livro "A teoria analítica do calor", que o fluxo[1] ou corrente de calor q através de um corpo de espessura d submetido a duas temperaturas T_1 e T_2 nas faces podia escrever-se como:

$$q = -k\,A\frac{T_1 - T_2}{d}$$

onde A é a área das faces e k a condutividade térmica do material.

Recorde ainda que o calor líquido que entra ou sai de um corpo é $Q = m\,c\,\Delta T$ onde m é a massa do corpo e c o seu calor específico. Para a água líquida, $c = 4186\ \mathrm{J\,Kg^{-1}\,K^{-1}}$ e a sua densidade é $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

Materiais:
Copo de espuma de poliestireno com tampa
Água quente
Termómetro/termômetro
Cronómetro/cronômetro
Bandeja para evitar derrame de água
Também terá ao seu dispor provetas graduadas.

Advertência: Tenha cuidado com o termómetro, recorde que tem mercúrio no seu interior. Depois de usá-lo guarde-o no seu estojo, deitado na horizontal.

[1] Define-se fluxo de calor como o calor que atravessa um corpo por unidade de tempo.

Sugestão.
Tenha em conta que nos primeiros minutos do processo de arrefecimento/esfriamento a temperatura decresce com o tempo de forma aproximadamente linear.

Dados:
A espessura da espuma de poliestireno é $\boldsymbol{d} = (2{,}10 \pm 0{,}05)$ mm.
A área lateral do copo, desde a base até ao bordo mais espesso, é $A = (147 \pm 5)\ \text{cm}^2$.

Apresente um relatório nas folhas de resposta que inclua:

a) Método (descreva e justifique o procedimento, identifique as dificuldades, diga como as resolveu) (15 pontos)
b) Medidas e tratamento de dados (15 pontos)
c) Resultado da medida (10 pontos)
d) Conclusões (análise do resultado, ideias para melhorar o procedimento) (10 pontos)

X Olimpiada Iberoamericana de Física
Colonia del Sacramento, Uruguay
20 de septiembre de 2005

Prueba Teórica

Problema 1: (15 puntos)

El Sr. Gutiérrez viaja todos los días a la misma hora desde Montevideo a Tarariras, donde trabaja. El trayecto Montevideo-Colonia lo hace en tren, mientras que de Colonia a Tarariras viaja en el coche de la empresa que sale de la misma y lo recoge puntualmente en la estación de Colonia. Los trenes salen cada hora y siempre tardan lo mismo.

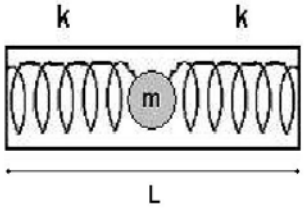
Un día, el Sr. Gutiérrez se levanta más temprano y toma el tren una hora antes que de costumbre. Cuando llega a Colonia, obviamente el coche de la empresa aún no ha llegado; entonces Gutiérrez resuelve hacer un poco de ejercicio y comienza a caminar en dirección a Tarariras. En determinado momento, se encuentra con el coche de la empresa, lo recoge y lo lleva al lugar de trabajo. Suponiendo que Gutiérrez camina a una velocidad constante de magnitud 6,0 km /h, el coche viaja a una velocidad de magnitud 60 km/h también constante. Calcule cuánto tiempo antes de lo habitual llega Gutiérrez a la empresa.

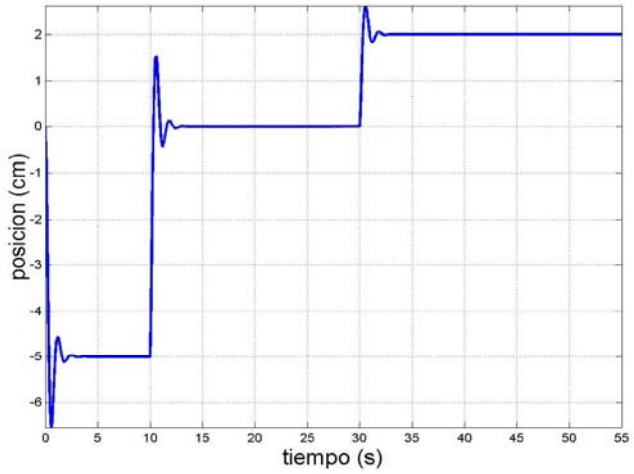
Problema 2 (20 puntos)

La figura muestra un sistema formado por una partícula de masa *m* unida a un par de resortes idénticos de constante elástica *k*, de masa despreciable y con los extremos fijos a las bases de un cilindro. El sistema, colocado horizontalmente en el interior de un automóvil de prueba sirve para medir su aceleración cuando el eje del cilindro se orienta en la dirección del movimiento.

a) Escriba la ecuación del movimiento de la partícula sin considerar rozamiento. Deduzca la relación entre la aceleración del automóvil y la posición de equilibrio de la partícula, respecto al cilindro. Considere que la longitud natural de los resortes es l_o y que el largo del dispositivo es *L*.

b) La siguiente figura muestra la gráfica de la posición de la partícula (medida desde el centro del cilindro) en función del tiempo correspondiente a un caso real.
Si el automóvil parte del reposo, represente en forma cualitativa la velocidad del mismo en función del tiempo.





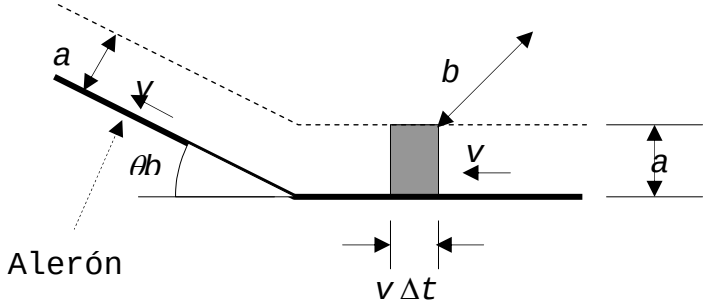
Problema 3: (25 puntos)

Un automóvil de fórmula 1 se desplaza sobre una curva horizontal con radio de curvatura R = 200 m. Su masa es M = 600 kg y el coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y el asfalto es μ = 0,8.
Para mejorar su comportamiento en curvas estos vehículos están provistos de alerones que con la acción del aire provocan una fuerza neta hacia abajo.
Considere el siguiente modelo simplificado de alerón: un flujo de aire llega al alerón con la misma magnitud de la velocidad horizontal v y después de recorrer la parte plana es desviado por el alerón inclinado un ángulo θ, con la misma rapidez que traía. Este modelo se acerca bastante a la realidad si se supone que la altura del flujo de aire a y el ancho b del alerón (ver figura) están relacionados como:

$$a = \pi\, b/4$$

a) Calcule cuál es la máxima magnitud de la velocidad sin derrapar (deslizar lateralmente) que puede alcanzar este automóvil si posee un alerón de ancho b = 1,5 m y un ángulo θ = 20° (Densidad del aire ρ = 1,3 kg/m^3).

b) Calcule cuál sería la máxima velocidad sin derrapar si el coche no tuviera alerón.

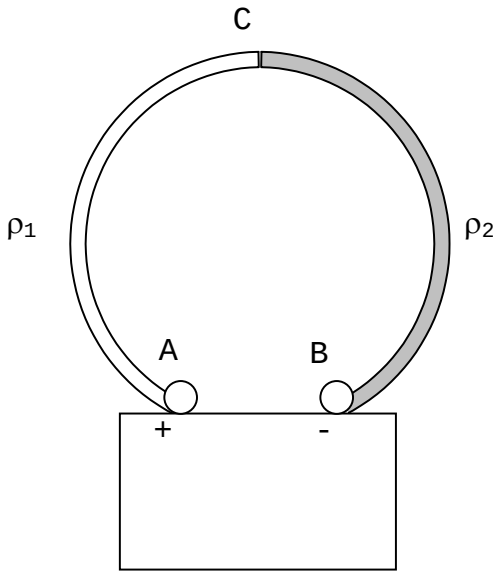


Problema 4 (20 puntos)

Dos alambres conductores de diferentes resistividades ρ_1 y ρ_2, de igual sección transversal uniforme de área *S*, están unidos en C. Los extremos libres de cada uno se conectan a los bornes A y B de una batería, que les aplica una diferencia de potencial constante V_{AB}, de manera que el conjunto forma un circuito eléctrico cerrado. Ambos alambres tienen la misma longitud *L*. Supóngase que la magnitud del campo eléctrico en el interior de cada alambre es uniforme.
En condiciones de régimen estacionario:

a) Determine la intensidad de corriente eléctrica en el circuito.

b) Determine la carga *Q* acumulada sobre la superficie de unión de ambos materiales en C mientras está circulando la corriente.



Problema 5 (20 puntos)

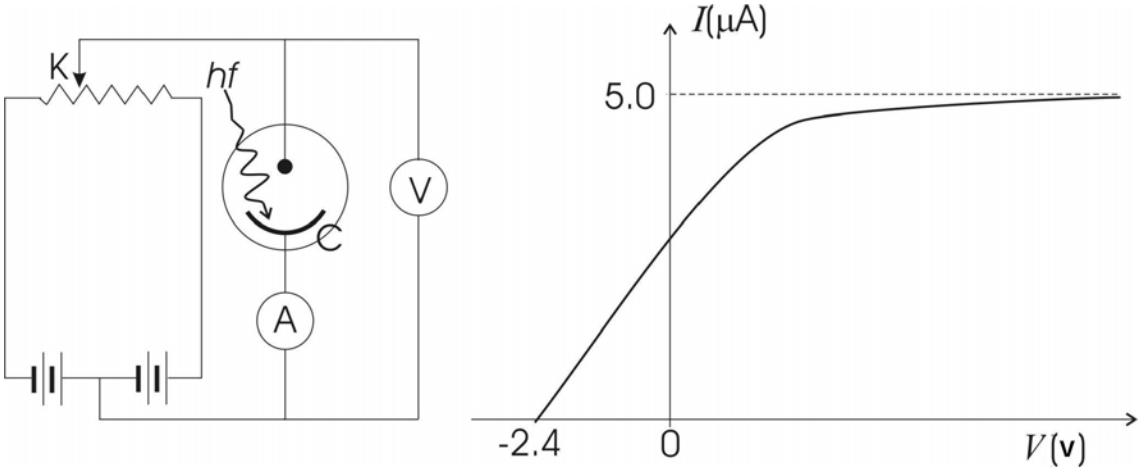
En 1905 Albert Einstein publicó varios trabajos[1] entre los que se incluía una original explicación para el efecto fotoeléctrico, por el cual recibió el premio Nobel de Física en 1921. Una versión simplificada de este experimento consta de una celda (célula) fotoeléctrica que se conecta a un circuito como el indicado en la figura. El cátodo C emisor de electrones tiene un área de 2,00 cm^2 y es irradiado con una radiación monocromática de intensidad constante. La mínima energía para extraer un electrón del cátodo es 1,90 eV. Al mover el cursor K del potenciómetro se varía la diferencia de potencial (ddp o voltaje) *V* entre el cátodo y el ánodo de la celda, la cual es medida por el voltímetro. El microamperímetro A indica la intensidad *I* de la corriente cátodo-ánodo. En estas condiciones, al variar la diferencia de potencial *V* entre cátodo y ánodo se obtiene una curva *I(V)* como la indicada en la gráfica de la figura.
Datos:
Carga elemental $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Constante de Planck $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js.

a) Determine la frecuencia de la radiación que se ha utilizado en este experimento para extraer los electrones del cátodo.

[1] El centenario de este *annus mirabilis* ha sido el motivo de la declaración de 2005 como Año Mundial de la Física.

b) Calcule la intensidad de la radiación que incide sobre la superficie del cátodo C.

c) Un estudiante pretende utilizar la misma fuente de radiación para determinar la distancia entre dos planos consecutivos de un cristal, que es del orden de 10^{-10} m. Discuta la factibilidad de esta idea. Justifique su respuesta.



XI Olimpiada Iberoamericana de Física

Coimbra, Brasil. Septiembre 23-30 de 2006-11-03

EXPERIENCIA 1: Pesavinos

(10 puntos)

OBJETIVO

El objetivo de esta experiencia es la determinación de la densidad de un líquido por dos métodos diferentes, uno estático y otro dinámico.

INTRODUCCIÓN

Es bien conocida la leyenda sobre Arquímedes que, habiéndole solicitado el Rey Herón de Siracusa que se pronunciase sobre si una determinada corona estaba hecha o no de oro macizo, consiguió descubrirlo sin destruir la corona. Las reflexiones de Arquímedes sobre este tema le llevaron a descubrir la denominada ley del empuje. Es conocida la leyenda de Arquímedes corriendo por las calles de Siracusa gritando "Eureka! ... Eureka!" ("¡Lo encontré! ... ¡Lo encontré!").

Portugal es un país productor de magníficos vinos. Para determinar el grado alcohólico del mosto es habitual utilizar un aparato (*pesavinos*) cuyo uso se basa en la ley de Arquímedes.

MATERIAL

- Recipiente grande con un líquido de densidad desconocida
- Tubo de ensayo grande
- Bolitas de plomo
- Calibre o pie de rey (nonius)
- Cronómetro
- Papel milimetrado
- Tijeras
- Balanza (a compartir)

DATOS
Aceleración de la gravedad: $g = (9{,}81 \pm 0{,}01)$ m/s^2
Masa de cada bolita de plomo: $m_{Pb} = (0{,}88 \pm 0{,}01)$ g

PRECAUCIONES:

1 - Cuando introduzca las bolitas de plomo en el tubo de ensayo no las deje caer en vertical, pues el tubo podría romperse.
2 - El plomo es tóxico por ingestión.
3 - ¡Evite que el líquido se introduzca dentro del tubo de ensayo!
4 - El acceso a la balanza debe hacerse de forma ordenada sin hablar con los otros participantes y sin causar ningún tipo de perturbación.

MEDIDAS Y ANÁLISIS

A) MÉTODO ESTÁTICO:

1 - Pese el tubo de ensayo vacío. Coloque en su interior bolitas de plomo en número suficiente como para que flote verticalmente. Anote el número de bolitas de plomo introducidas.

2 – Vaya añadiendo bolitas de plomo y mida la profundidad (h) que se sumerge el tubo en función del número de bolitas añadidas (n).

3 - Construya un gráfico, en papel milimetrado, que muestre la dependencia de la profundidad con la masa añadida.

4 - A partir de sus datos experimentales obtenga el valor de la densidad del líquido y estime el error experimental de ese valor.

B) MÉTODO DINÁMICO:

Considere que el tubo cilíndrico, con una masa considerable de plomo en el fondo, flota verticalmente con una parte del mismo fuera del líquido. Puede suponer, en lo que sigue, que el tubo es cilíndrico.

5 - Demuestre que al apartar verticalmente el tubo de su posición de equilibrio y soltarlo

posteriormente, el movimiento observado es armónico simple y que su período viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M_{\text{total}}}{A\rho_{\text{L}}g}}$$

donde M_{total} es la masa total tubo+plomos, A es el área de su sección al nivel del líquido, ρ_{L} es la densidad del líquido y g es la aceleración de la gravedad (debe despreciar las fuerzas de rozamiento).

6 - Mida el período de las oscilaciones verticales del sistema tubo+plomo, de masa total M_{total}, masa que usted puede elegir. Indique la masa total que ha elegido, M_{total}, y el período obtenido, T, con sus errores correspondientes.

7 - A partir de los datos que haya obtenido determine la densidad del líquido y compárela con el valor de la densidad que previamente ha obtenido por el método estático. Indique una o más razones físicas que pudieran explicar eventuales diferencias entre los valores de la densidad obtenidos por los dos métodos.

EXPERIENCIA 2: Diodos Emisores de Luz (LED) y la constante de Planck
(10 puntos)

OBJETIVO

Los objetivos de esta experiencia son:

- Determinar la longitud de onda de la luz emitida por un LED;
- Determinar la constante de Planck

INTRODUCCIÓN

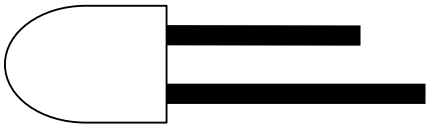
Los diodos emisores de luz o LED (*Light Emitting Diode*) emiten luz cuando son atravesados por una corriente eléctrica. Esta emisión de luz se produce cuando electrones saltan entre diferentes estados de energía en la unión entre las dos bandas (n y p) del material semiconductor de que está construido el diodo. La diferencia de energía entre estos estados es una propiedad del material semiconductor. En un diodo, la intensidad de corriente que circula sólo es significativa cuando el diodo está polarizado en sentido directo (corriente eléctrica convencional de la banda p, a potencial mayor, hacia la n a potencial menor) y, en estas condiciones, tiene lugar la emisión de luz. En la polarización directa se aplica una diferencia de potencial (tensión) V y, para que un electrón atraviese la banda prohibida, es necesario realizar un cierto trabajo W. Este trabajo se convierte, en su mayor parte, en energía de los fotones emitidos. Sin embargo, hay pequeñas pérdidas de energía, debidas al efecto Joule y a procesos que tienen lugar en la unión, y que tiene un valor prácticamente constante para un LED de un mismo tipo cuando **son atravesados por una misma intensidad de corriente eléctrica**. En estas condiciones,

$$W = E_{\mathrm{f}} + k \ ,$$

donde E_{f} es la energía del fotón emitido y k una constante que representa otras pérdidas de energía.

La luz emitida por un LED es prácticamente monocromática. Se pueden fabricar LED que emiten luz de diferentes colores, variando la composición química del material semiconductor. Los LED más comunes están construidos con aleaciones de galio, arsénico y aluminio. Variando la proporción de galio y aluminio es posible fabricar LED que emitan en un color u otro dentro de la gama del visible y del infrarrojo.

Los LED comerciales son suministrados con el material semiconductor encapsulado (plástico) y con dos terminales, siendo el más largo el positivo (lado p).



Para determinar la longitud de onda, λ, de la luz emitida por un LED se puede utilizar una red de difracción. Los ángulos θ_{n} para los cuales tienen lugar los máximos de

intensidad difractada por una red con espaciamiento entre líneas d, vienen dados por la ecuación:

$$d \sin \theta_n = n\lambda \qquad n\text{: un número entero}$$

MATERIAL

- Regla graduada
- Hojas de papel blanco
- Conjunto de LED del mismo tipo montados sobre un soporte
- Pila de 9 V
- Cables y pinzas (cocodrilos) para conexiones
- Potenciómetro (470 Ω)
- Resistencia (220 Ω)
- Resistencia (11,4 kΩ)
- Dos multímetros
- Red de difracción (1000 líneas/mm) montada en un soporte
- Papel milimetrado

DATOS:
Carga elemental: $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C
Velocidad de la luz en el vacío: $c = 2{,}998 \times 10^{8}$ m s^{-1}
Constante de Boltzmann: $k_B = 1{,}381 \times 10^{-23}$ J K^{-1}

PRECAUCIONES:

1- La corriente eléctrica que atraviesa el LED no deberá exceder nunca los 50 mA, pues éste podría estropearse. Para asegurar la protección del LED, la resistencia de 220 Ω **debe estar siempre conectada en serie con el LED.**
2- Ponga atención a las escalas para una utilización correcta de los multímetros como amperímetros o como voltímetros. Un uso inadecuado del multímetro podría fundir su fusible interno, poniendo en dificultades la realización de su prueba.

INFORMACIÓN

1 - El potenciómetro dispone de 3 terminales y permite variar la diferencia de potencial (tensión) entre el terminal central y una de las extremidades, desde 0 hasta el valor máximo proporcionado por la pila.

2 - Se proporcionan LED con las siguientes características:

Tabla 1:

LED	λ / nm
Azul	470
Verde	??
Rojo	630
Infrarrojo	950

MEDIDAS Y ANÁLISIS
A) COMPORTAMIENTO ELÉCTRICO DE LOS LED:

Se pretende determinar la curva característica del LED rojo, es decir, la relación entre la intensidad de corriente, I, que lo atraviesa y la diferencia de potencial (tensión), V, aplicada a sus terminales.

1 - Monte un circuito que permita alimentar el LED rojo con una tensión variable en polarización directa. Presente un esquema del circuito eléctrico que haya montado, incluyendo los aparatos de medida.

2 - Respetando los límites de seguridad, obtenga la curva característica para el LED rojo.

3 - La expresión *teórica* que relaciona la intensidad de corriente con la diferencia de potencial es:

$$I = I_0 \left(\mathrm{e}^{\frac{eV}{\eta k_\mathrm{B} T}} - 1 \right) \approx I_0 \, \mathrm{e}^{\frac{eV}{\eta k_\mathrm{B} T}}$$

en la que I_0 y η son constantes características de cada LED, e es la carga elemental, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura ambiente (considere $T = 293$ K). La expresión aproximada anterior es válida solo para $V > 50$ mV. Por otro lado, para diferencias de potencial por encima de un cierto valor, el comportamiento del LED se desvía de la expresión teórica debido a su resistencia interna. Determine el valor de las constantes η e I_0 para el LED rojo.

4 – Conecte los LED en serie entre sí y también en serie con la resistencia de 11,4 kΩ y aplique al circuito una diferencia de potencial de 9 V (puede usar los cocodrilos para hacer las conexiones entre los LED). Indique la intensidad de corriente que atraviesa el circuito y registre en una tabla el valor de la tensión, V, en los terminales de cada LED.

B) DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD DE ONDA DEL LED **VERDE**:

5 - Para determinar la longitud de onda del LED **verde** coloque el soporte con la red de difracción delante del LED y compruebe visualmente que se presentan máximos de intensidad a uno y otro lado de la dirección frontal. Utilice las hojas blancas para

proyectar el espectro de difracción. Determine la longitud de onda de la luz emitida por el LED verde. Describa el procedimiento que ha empleado, anote las medidas, indique los cálculos y el resultado obtenido con el error correspondiente.

C) DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE DE PLANCK, h :

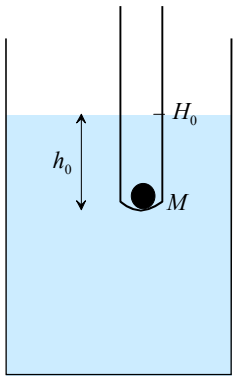
6 - Utilizando los datos de la tabla 1 y los resultados obtenidos en las partes A y B, construya en el papel milimetrado la gráfica apropiada para calcular la constante de Planck, h.

7 - Determine, a partir de esta gráfica, el valor de la constante de Planck. (El valor de esta constante, obtenida por métodos muy precisos, es $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J s.)

EXPERIÊNCIA 1: Pesa-espíritos

EXEMPLO DE RESOLUÇÃO:

Esquema da montagem:



As seguintes considerações devem ser feitas inicialmente ou ao longo do trabalho:

M = massa do tubo + massa adicionada necessária para o equilibrar na vertical.
$V_0 = h_0\ \pi\ r^2$ volume de tubo imerso em equilíbrio com a massa M (r é o raio externo da secção do tubo de ensaio e h_0 o comprimento da parte imersa do tubo).

Nestas condições de equilíbrio o peso total do tubo é igual à força de impulsão do líquido:

$$P = I$$

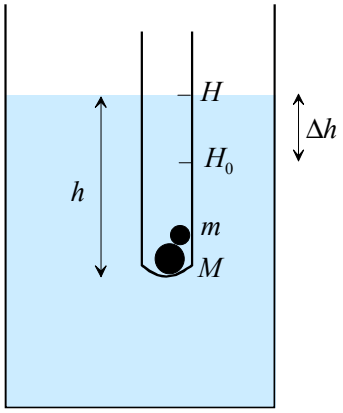
ou

$$M\,g = V_0\,\rho_L\,g$$

em que ρ_L é a densidade do líquido e g a aceleração da gravidade. Ou seja

$$M = V_0\,\rho_L$$

Ao adicionarmos uma massa m o tubo mergulha até atingir uma nova posição de equilíbrio.



Na nova posição de equilíbrio:

$$(M + m)\, g = V\, \rho_L\, g$$
$$M + m = V_0\, \rho_L + \Delta V\, \rho_L$$
$$m = \Delta V\, \rho_L$$

Como $\Delta V = \pi\, r^2\, \Delta h$ vem

$$m = \pi\, r^2\, \Delta h\, \rho_L$$

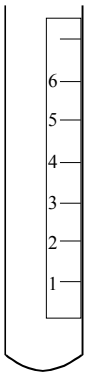
$$\boxed{\Delta h = \frac{1}{\rho_L\, \pi\, r^2}\, m}$$

A constante de proporcionalidade entre a altura a que mergulha o tubo e a massa adicionada depende da densidade do líquido e do raio da secção do tubo.

A) MÉTODO ESTÁTICO

1 -

Para se poder determinar o nível a que o tubo está mergulhado foi introduzido dentro deste um pedaço de folha de papel milimétrico com uma escala marcada:



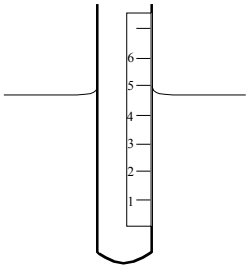
Massa do tubo já com o papel milimétrico, M_{tubo} = 78,8 g ± 0,1g
Nº de grãos de chumbo adicionados = 80
Massa de chumbo adicionado: 80 × (0,88 g ± 0,01 g) = 70,4 g ± 0,8 g
Massa total do tubo+chumbo:

M = (78,8 g ± 0,1 g) + (70,4 g ± 0,8 g) = 149,2 g ± 1,7 g
M = 0,1492 kg ± 0,0017 kg

Diâmetro do tubo de ensaio (paquímetro): d = 29,70 mm ± 0,05 mm

Raio do tubo: r = 14,85 mm ± 0,03 mm
r = 0,01485 m ± 0,00003 m

Profundidade a que mergulha o tubo com a massa M: h_0 = 11,9 cm ± 0,1 cm (o valor de h foi sempre medido na parte superior do menisco)



2 -

Para determinar a dependência da profundidade a que o tubo mergulha em função da massa adicionada fomos adicionando 10 esferas de cada vez e registando a profundidade a que o tubo atingia o equilíbrio. Os resultados estão na seguinte tabela

Nº de esferas de chumbo adicionadas	**Profundidade *h* /cm (± 0,1 cm)**
0	11,9
10	10,9
20	10,0
30	9,0
40	7,9
50	6,9
60	5,9
70	4,9
80	3,8
90	2,8
100	1,8

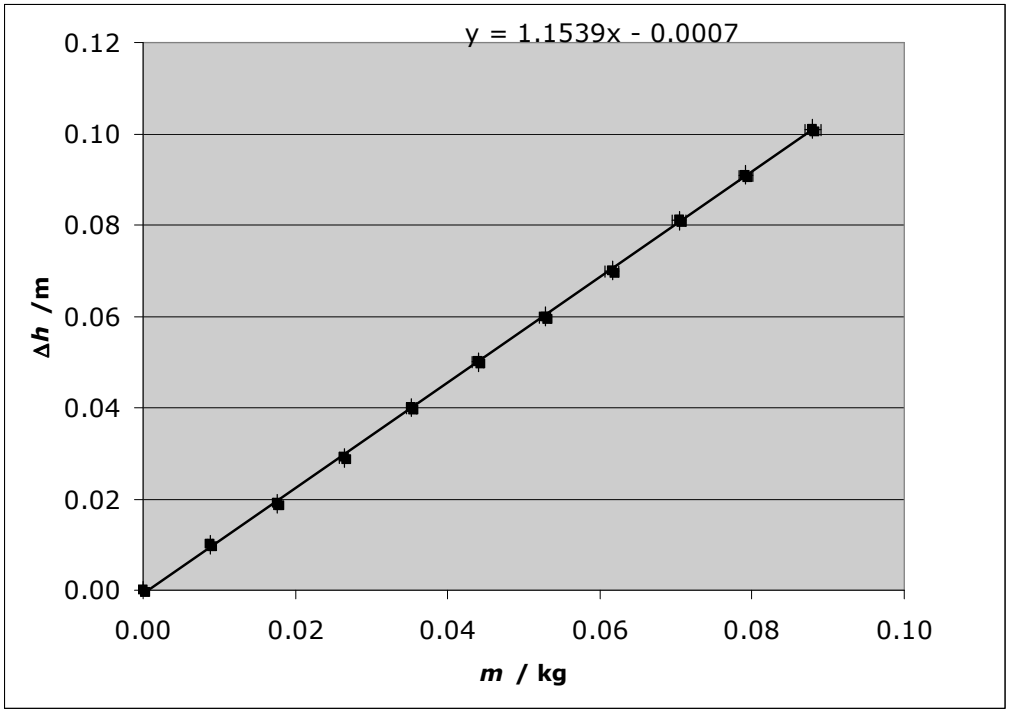
Na seguinte tabela mostram-se os valores determinados bem como a massa total adicionada, m, e a variação de altura, Δh:

Nº esferas	***m* ×10^3 / kg**	***h* / m (± 0,001 m)**	**Δ*h* / m (± 0,002 m)**
0	0	0,119	0
10	8,80 ± 0,03	0,109	0,010
20	17,60 ± 0,05	0,100	0,019
30	26,40 ± 0,05	0,090	0,029
40	35,20 ± 0,06	0,079	0,040
50	44,00 ± 0,07	0,069	0,050
60	52,80 ± 0,08	0,059	0,060
70	61,60 ± 0,08	0,049	0,070
80	70,40 ± 0,09	0,038	0,081
90	79,20 ± 0,09	0,028	0,091
100	88,0 ± 0,1	0,018	0,101

3 -

Na figura seguinte mostra-se o gráfico dos resultados com a indicação do erro nas medidas. O erro nas massas (Δm) é muito pequeno e está incluído no símbolo do

ponto. Está indicada a equação da melhor recta que se ajusta aos pontos experimentais.



O declive da recta é m = 1,154 m kg^{-1}. Portanto,

$$1{,}154 = \frac{1}{\rho_{\mathrm{L}}\,\pi\, r^2}$$

de onde se extrai o valor da densidade do líquido: $\rho_{\mathrm{L}} = 1/(1{,}154\ \pi\ r^2)$. Substituindo pelos valores conhecidos:

$$\boxed{\rho_{\mathrm{L}} = 1251 \text{ kg m}^{-3}}$$

4 -

Como a regressão linear não indica o erro na inclinação da recta vamos fazer uma estimativa calculando essa mesma inclinação a partir de dois valores do gráfico, os pontos (x,y) = (0,0352; 0,040) e (0,088; 0,101):

$$m = \frac{(0{,}101 \pm 0{,}002) - (0{,}041 \pm 0{,}002)}{(0{,}088 \pm 0{,}002) - (0{,}035 \pm 0{,}002)} = 1{,}15 \pm 0.06$$

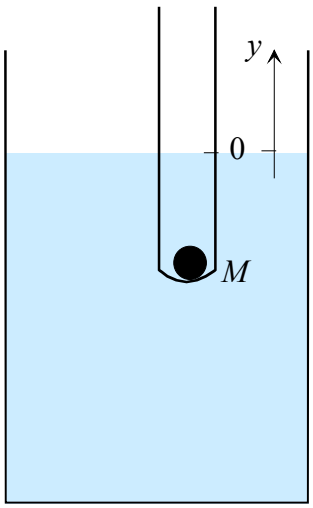
Com este valor para o erro podemos calcular de novo a densidade do líquido:

$\rho_{\mathrm{L}} = 1/[1{,}154 \pm 0.06 \times 3.1416 \times (0{,}01485^2) \pm 4\text{x}10^{-5}]$ = (**1251 ± 211) kg m^{-3}**

B) MÉTODO DINÂMICO

5 -

Com a massa do tubo de ensaio+chumbos constante, se afastarmos, na vertical, o tubo do seu ponto de equilíbrio, a variação na força de impulsão vai traduzir-se numa força de restauro da posição de equilíbrio da forma: $F = -\Delta V\, \rho_L\, g$



O sinal menos na expressão anterior garante que, ao mergulhar $\Delta V < 0$ ($y < 0$) e $F > 0$, e o simétrico se $y > 0$. Substituindo ΔV pelo seu valor em função do raio do tubo e de y obtemos:

$$F = -(\pi r^2 y)\, \rho_L\, g$$
$$F = -(\pi r^2 \rho_L\, g)\, y$$

Que é uma força elástica do tipo $F = -k\,x$, com

$$k = \pi r^2 \rho_L\, g$$

e o movimento oscilatório tem frequência angular $w = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ em que M é a massa total do sistema (tubo+chumbos) que oscila. O período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\pi r^2 \rho_L g}}$$

onde r, g e M são conhecidos pelo que, se determinarmos T, podemos calcular ρ_L:

$$\rho_L = \frac{4\pi M}{T^2 r^2 g}$$

6 -

Para equilibrar o tubo na vertical foram adicionadas 100 esferas de chumbo.

Massa total do tubo + esferas de chumbo: $M = 166{,}8\ \text{g} \pm 0{,}1\ \text{g}$

Procedimento para medir T: mergulha-se o tubo, mantendo-o vertical, e larga-se começando a contar o tempo com o cronómetro. Regista-se o tempo que o tubo demora a completar 5 oscilações. Os resultados estão na tabela seguinte:

Nº oscilações	tempo (/s)	T (/s)
5	4,72	0,944
5	4,62	0,924
5	4,69	0,938
5	4,53	0,906
5	4,53	0,906
5	4,69	0,938
5	4,53	0,906
5	4,61	0,922
5	4,52	0,904

Fazendo a média e determinando o desvio padrão obtemos:

$$T = 0{,}92\ \text{s} \pm 0{,}02\ \text{s}$$

Note-se que este valor do erro inclui apenas desvios estatísticos, podendo haver erros sistemáticos.

7 -

Da equação que relaciona a densidade do líquido com o período T, $\rho_{\text{L}} = \dfrac{4\pi M}{T^2 r^2 g}$, e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\rho_{\text{L}} = \frac{4 \times \pi (0{,}1668 \pm 0{,}0001)}{(0{,}92 \pm 0{,}02)^2 \times (0{,}01485 \pm 0{,}00003)^2 \times (9{,}81 \pm 0{,}01)}$$

$$\boxed{\rho_{\text{L}} = (1143 \pm 185)\ \text{kg m}^{-3}.}$$

Os dois valores obtidos para a densidade do líquido

A) 1251 kg m^{-3} ± 211 kg m^{-3} e **B) 1143 kg m^{-3} ± 185 kg m^{-3},**

são consistentes dentro do erro experimental.

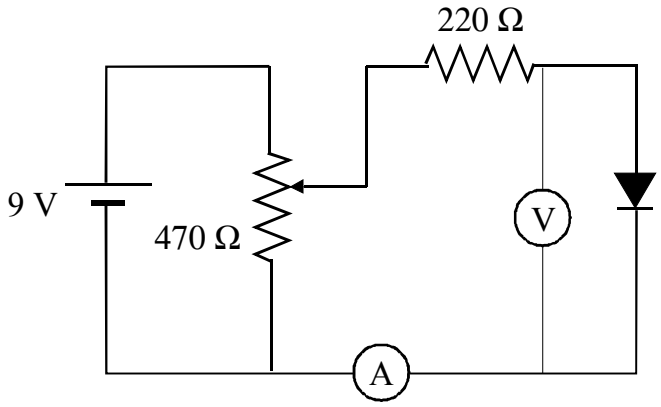
No segundo método não se entrou em conta com a viscosidade da água. Esta tem duas consequências: 1) o movimento passa a ser amortecido em vez de harmónico simples (como se verifica); 2) há um certo volume de água que passa a oscilar, esta oscilação da água pode ser traduzida num factor correctivo à massa M do tubo no sentido de a aumentar; como estamos a usar o valor medido de M e não o corrigido, que seria maior, o valor encontrado para a densidade por este método deve ser inferior ao valor real.

EXPERIÊNCIA 2: Díodos Emissores de Luz (LED) e a constante de Planck

Exemplo de resolução

O aluno deve medir as resistências para identificar a de 220 Ω e a de 11,4 kΩ.

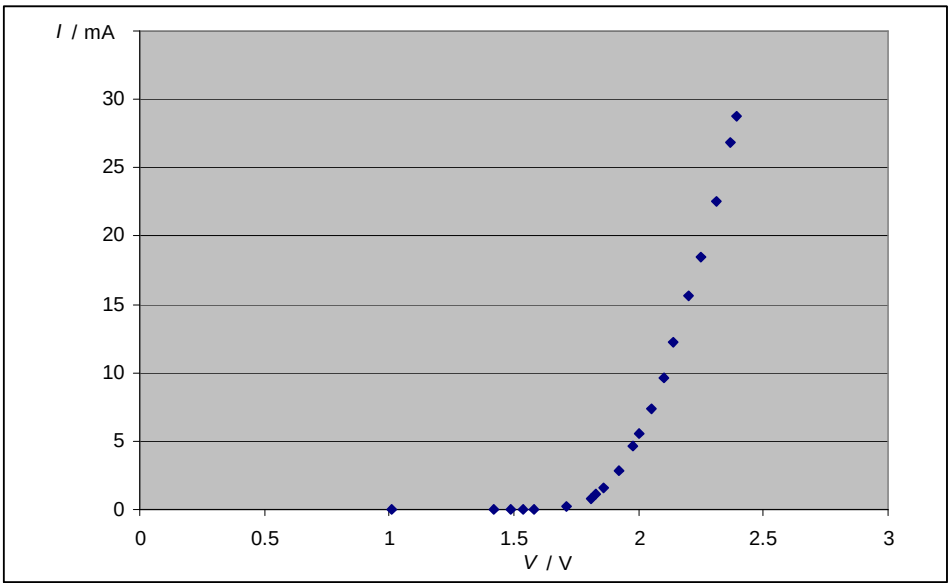
A)
1 – Monta-se o seguinte circuito, utilizando o potenciómetro como divisor de tensão, de acordo com a figura:



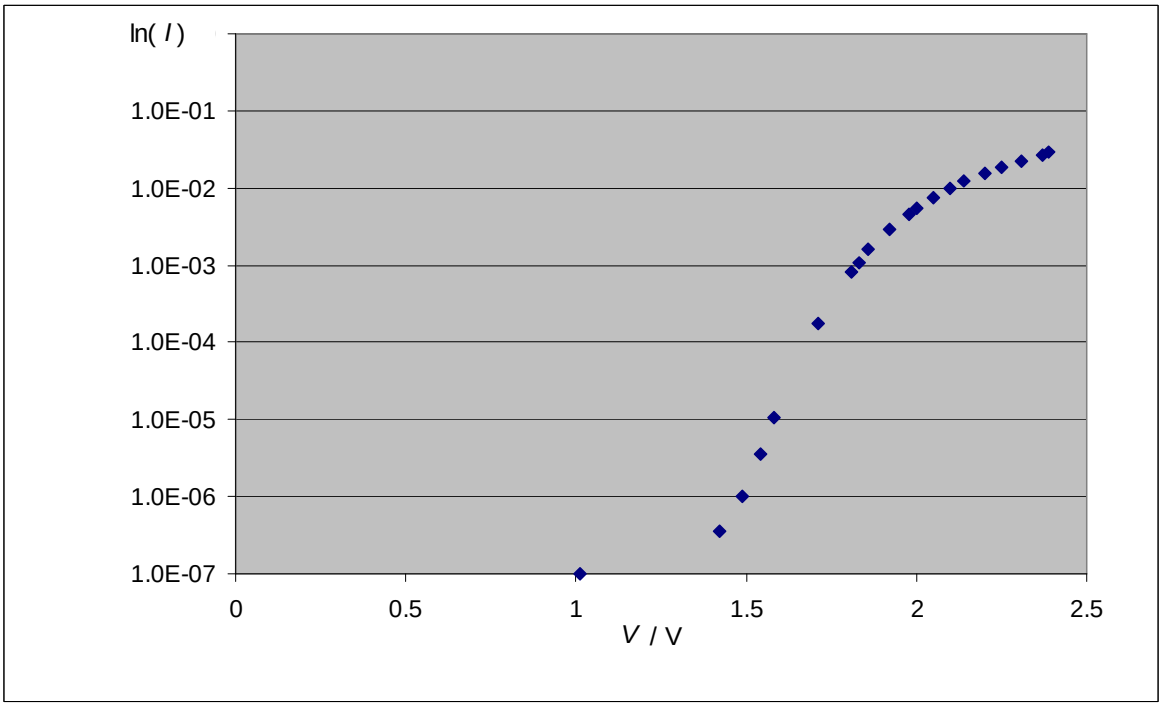
2 - Curva característica do LED vermelho:
Com a montagem acima variou-se a tensão aplicada ao díodo vermelho por meio do potenciómetro e registaram-se os seguintes valores para a corrente, *I*, que passa no díodo e a diferença de potencial, *V*, nos seus terminais (apresenta-se também o logaritmo da corrente em amperes):

V **/ V**	***I*** **/ mA**	**ln *I***
1,01	0,00010	-16,118
1,42	0,00035	-14,865
1,49	0,00102	-13,796
1,54	0,00365	-12,521
1,58	0,01065	-11,450
1,71	0,17180	-8,669
1,81	0,82400	-7,101
1,83	1,09500	-6,817
1,86	1,63700	-6,415
1,92	2,85000	-5,860
1,98	4,64000	-5,373
2,00	5,50000	-5,203
2,05	7,37000	-4,910
2,10	9,67000	-4,639
2,14	12,23000	-4,404
2,20	15,58000	-4,162
2,25	18,42000	-3,994
2,31	22,50000	-3,794
2,37	26,90000	-3,616
2,39	28,80000	-3,547

A figura mostra o gráfico com estes valores:

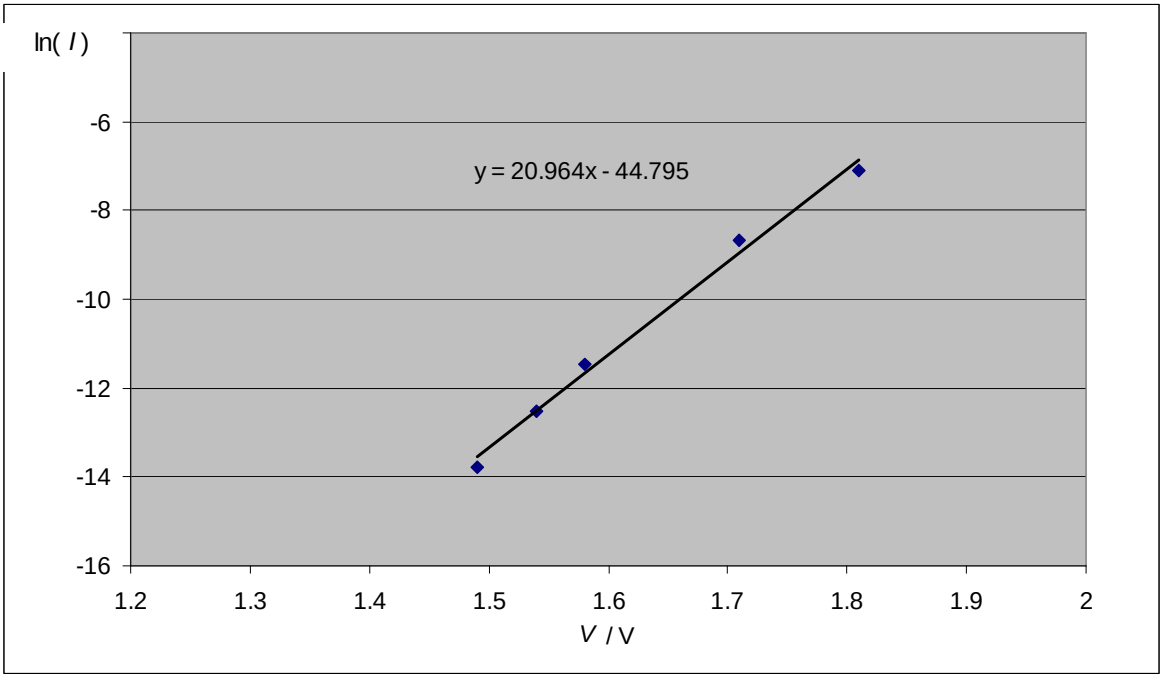


A curva característica pode ser apresentada num gráfico semi-logarítmico como o da figura seguinte:



A escala vertical é logarítmica pelo que, de acordo com a expressão dada deveria obter-se uma recta acima de uma certa diferença de potencial. Este regime linear ocorre entre cerca de 1,5 e 1,8 V. O declive muda acima de ~1,8V devido ao facto de o díodo entrar num regime (regime resistivo) diferente daquele em que a expressão é válida.

3 - Para determinar as constantes η e I_0, utilizam-se os pontos em que o comportamento é linear, ou seja em que a expressão teórica é válida (assinalados na tabela). Usando esses pontos obtém-se o seguinte gráfico:



Da equação da recta que melhor se ajusta a estes pontos ($y = m\,x + b$) obtemos η e I_0. De

$$I = I_0\ \mathrm{e}^{\frac{eV}{\eta\, k_\mathrm{B} T}}$$

tomando o logaritmo

$$\ln(I) = \ln(I_0) + \frac{e}{\eta\, k_\mathrm{B} T} V$$

vem

$$b = \ln(I_0) \qquad m = \frac{e}{\eta\, k_\mathrm{B}\, T}$$

donde se obtém:

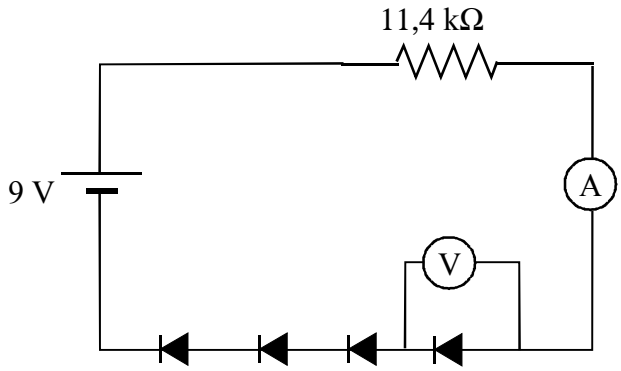
$$I_0 = \mathrm{e}^{b}$$

$$\eta = \frac{e}{m\, k_\mathrm{B}\, T}$$

ou seja, para os valores de declive e ordenada na origem obtidos na regressão linear,

$$I_0 = 3{,}5 \times 10^{-20}\ \mathrm{A} \qquad \eta = 1{,}9$$

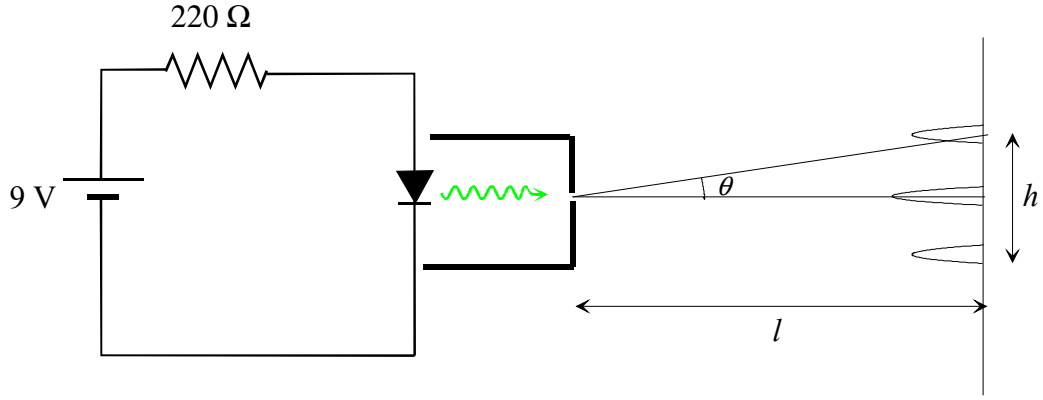
4 -
Esquema da ligação dos LEDs em série:



A corrente que passa em cada LED tem o valor de I = 118 μA. Na seguinte tabela estão os valores das tensões medidas nos terminais de cada LED, bem como o valor do comprimento de onda e frequência da radiação que cada um emite:

LED	λ / nm	ν / Hz	*V* /V
Infra-vermelho	950	3,16E+14	1,178
Vermelho	630	4,76E+14	1,755
Verde	??	??	2,359
Azul	470	6,38E+14	2,475

B) Determinação do comprimento de onda do LED Verde:
5)
Ligou-se o LED verde à pilha em série com a resistência de 220 Ω.



Colocou-se a rede de difracção com o tubo preto como indicado na figura e um alvo (folha A3) à distância l. A distância entre os dois primeiros picos de difracção de cada lado do máximo central designa-se por h.

Resultados:
l = 0,278 m ± 0,002 m
h = 0,350 m ± 0,005 m
d = 1/1000 mm = 1×10^{-6} m (dado)

O valor de θ é:

$$\theta = \arctan\left(\frac{h}{2l}\right), \qquad \theta = 0{,}56 \pm 0{,}02 \text{ rad}$$

A partir da expressão ($n = 1$)

$$d \sin\theta = \lambda$$

obtém-se

$$\lambda = 533 \text{ nm} \pm 20 \text{ nm}$$

supondo que a rede de difracção tem um espaçamento d com erro desprezável.

C)
6 -

A frequência do LED verde é $\nu = \frac{c}{\lambda} = 5{,}62 \times 10^{14}$ Hz. Como a intensidade de corrente é a mesma nos 3 LEDs é válida a expressão

$$W = E_f + k$$

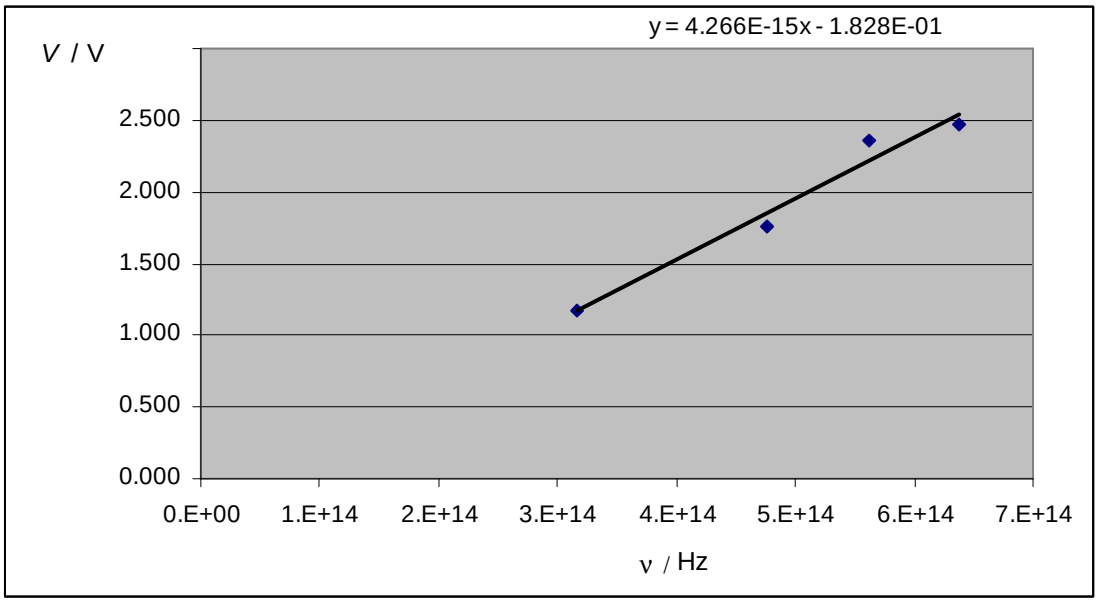
de onde obtemos

$$eV = h\nu + k$$

ou ainda

$$V = \frac{h}{e}\nu + k$$

O seguinte gráfico mostra os valores medidos de V em função da frequência ν para os quatro LEDs.



Da inclinação da recta, m, que melhor se ajusta a estes pontos obtemos:

$$h = m\,e = (6{,}83 \pm 0{,}89) \times 10^{-34}\ \text{J s}$$

O valor obtido é cerca de 3% superior ao tabelado mas o desvio está dentro da incerteza experimental.

XI Olimpiada Iberoamericana de Física

Coimbra, Brasil. Septiembre 23-30 de 2006-11-03

1. Planeta-disco (8 puntos)

Los libros de la serie *Discworld* de Terry Pratchett se desarrollan en un planeta con la curiosa forma de un disco plano.

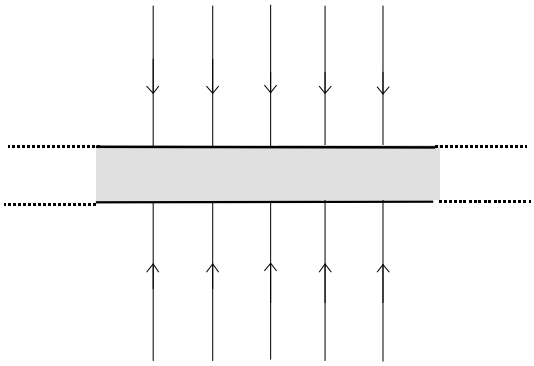


Figura 1: Un planeta con forma de disco plano.

Dicho planeta se cree que se encuentra apoyado en cuatro grandes elefantes que viajan por el espacio sobre una enorme tortuga. Pero estos detalles no son importantes.

Lo que interesa en este caso es explorar aspectos del campo gravitatorio de un planeta plano, utilizando las semejanzas entre la ley de gravitación universal de Newton y la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{\mathrm{g}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathrm{e}}_r \text{ (gravitación)}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathrm{e}}_r \text{ (Coulomb)}$$

donde $\hat{e}_r$ designa vector unitario.

(Dato: radio de la Tierra, $R_{\mathrm{T}} = 6{,}4 \times 10^6$ m)

(a) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

donde q es la carga encerrada por la superficie.

Escriba la forma correspondiente de la ley de Gauss para el campo gravitatorio.

(b) Empleando el teorema de Gauss, determine el valor del campo gravitatorio en el exterior de un planeta con la forma de un disco, cerca de la superficie y lejos de los bordes. El espesor del disco es mucho menor que su radio y puede ser despreciado. Denote por μ la densidad superficial de masa del planeta (masa por unidad de área).

(c) En esta parte se va a considerar el espesor, *d*, de *Discworld*, que es un planeta con una densidad igual a la de la Tierra, ρ_T, y una aceleración de la gravedad en su superficie, g_D, igual a la de la Tierra, *g*. Encuentre la relación entre el espesor de *Discworld* y el radio de la Tierra.

(d) Suponga que hay un agujero que atraviesa todo el espesor de *Discworld,* como indica la figura 2. Suponiendo que el interior del planeta tiene una densidad uniforme, utilice la Ley de Gauss para demostrar que el campo gravitatorio en un agujero perpendicular a la superficie tiene la forma $\vec{g} = g(z)\,\hat{e}_z$, con

$$g(z) = -\frac{2g_D}{d} z\,,$$

donde *z* es la coordenada vertical con origen en el plano medio del planeta y g_D es el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie.

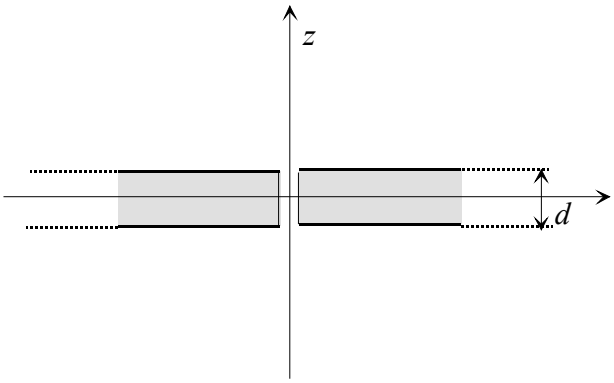


Figura 2: Un agujero atraviesa todo el espesor de *Discworld*.

(e) Muestre que un objeto cualquiera que se deja caer desde el borde del pozo va a oscilar armónicamente. Determine el período del movimiento.

2. Disco de Faraday (8 puntos)

Un disco metálico (de masa *m* y radio *a*) se encuentra situado en una región en la que existe un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, dirigido según su eje. Si el disco se pone a girar con velocidad angular $\vec{\omega}$, se establece una diferencia de potencial, ΔV, entre el borde del disco y su eje de rotación.

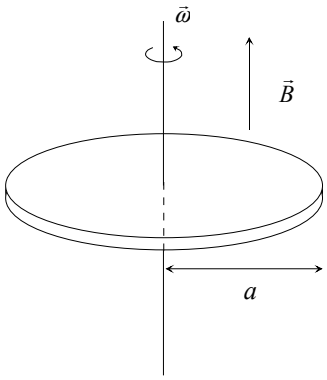


Figura 1: Disco metálico en rotación en un campo magnético uniforme.

(a) Determine la fuerza magnética, $\vec{F}_{\mathrm{m}}$, sobre las cargas libres del metal.

(b) Cuando se alcanza el estado estacionario, la resultante de las fuerzas eléctrica y magnética sobre las cargas libres del metal es nula. Si la velocidad angular $\vec{\omega}$ y el campo magnético $\vec{B}$ tienen el mismo sentido, como se muestra en la figura, demuestre que la diferencia de potencial es

$$\Delta V = \frac{\phi}{T}$$

en la que ϕ es el flujo del campo magnético a través del disco y T es el período de rotación.

(c) Imagine que se conecta una resistencia exterior, *R*, entre el eje y el borde del disco, de forma que se permita el paso de corriente. La diferencia de potencial y la velocidad angular disminuyen con el tiempo, pero en cada instante ΔV es la misma que existiría con el circuito abierto para esa velocidad angular. Llevando a cabo un balance de

energía, demuestre que la energía cinética de rotación del disco, E_c, disminuye con el tiempo, por efecto Joule, de acuerdo con

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}$$

donde τ es un tiempo característico. Exprese τ en función de los parámetros conocidos.

(d) Los resultados obtenidos para discos son válidos para cilindros. Se comprobó experimentalmente que un cilindro de cobre de masa m = 1 kg y radio a = 2 cm, colocado en un campo B = 1 T y puesto a rotar con una resistencia R = 10 Ω conectada entre el eje y el borde, se detenía al cabo de unos 10 minutos. ¿Se puede explicar esta observación experimental considerando solamente la disipación de energía por efecto Joule? Justifique su respuesta.

3. Precisión de la datación por carbono 14 (6 puntos)

Se dice que un isótopo es radiactivo cuando, por ejemplo, por emisión (o captura) de alguna partícula, se puede transformar en otro. En este tipo de transformaciones, o decaimientos, la tasa de desintegración, i.e., el número de átomos que experimentan el proceso por unidad de tiempo, es proporcional al número de átomos existentes, *N*. Matemáticamente, el proceso viene descrito por

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

donde λ es una constante característica de cada proceso, que se denomina *constante de decaimiento* (o *constante de desintegración*).

Como consecuencia del constante bombardeo de la parte superior de la atmósfera por rayos cósmicos, el nitrógeno 14 se puede transformar en carbono 14 según la reacción ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + n \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + p$. A su vez, el carbono 14 es radiactivo, con un tiempo de vida media de 5700 años, y decae en nitrógeno 14 según la reacción

$${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \beta^{-} + \overline{\nu}$$

($\overline{\nu}$ representa un antineutrino).

El carbono 14 se mezcla con los otros isótopos de carbono existentes en la naturaleza, como el carbono 12, pasando con ellos a formar parte de los compuestos orgánicos. El porcentaje de este isótopo del carbono en los seres vivos es prácticamente constante a lo largo de su vida. Cuando el ser vivo muere, cesa el intercambio de carbono con el exterior y el contenido en carbono 14 va disminuyendo debido a su decaimiento radiactivo, mientras que la cantidad de carbono 12 permanece constante. De esta forma, es posible llevar a cabo la datación de una muestra a través de la medida de la radiactividad presente.

(a) Relacione el tiempo de vida media de una muestra (tiempo en que el número de núcleos radiactivos se reduce a la mitad) con la constante de decaimiento y calcule el valor de ésta para el carbono 14.

(b) Determine la edad de una muestra que contiene un 10% del carbono 14 existente en un ser vivo.

(c) Tomando en consideración que actualmente se consigue detectar un porcentaje mínimo del 0,06% del carbono 14 existente en una muestra, estime cuál es la máxima edad que se consigue determinar con esta técnica de datación.

(d) La actividad es el número de desintegraciones por unidad de tiempo. ¿Cuál es la actividad de una muestra de carbono en la que existan 10^{15} átomos de carbono 14?

4. Enfriamiento de átomos (8 puntos)

En 1997 el Premio Nóbel de Física les fue concedido a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y Willian D. Philips por su contribución al desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos. Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle y Carl E. Wieman utilizaron estos métodos para obtener la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos alcalinos, por lo que recibieron el Premio Nóbel de Física en 2001. El fundamento de estos métodos es la técnica que se denomina "*laser cooling*", en la cual se utiliza la colisión entre fotones (provenientes de un láser) y los átomos del gas que se pretende enfriar. El láser emite fotones con una energía tal que un fotón puede ser absorbido cuando colisiona con un átomo del gas.

Se pretende enfriar un gas de átomos de sodio (M = 23 g/mol) que se encuentra a la temperatura de 300 K con un láser que emite fotones con una energía tal que un átomo de sodio, al absorber un fotón, salta del estado fundamental ($E_{\text{fund}} = -5{,}14$ eV) hasta el primer estado excitado ($E_{\text{exc}} = -3{,}04$ eV).

Puede considerar que la temperatura, T, del gas se relaciona con la energía cinética media, E_c, de los átomos de sodio a través de la expresión

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T$$

donde k_B es la constante de Boltzmann.

Datos: $N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}; $c = 3{,}00\times10^{8}$ m s^{-1}; $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J K^{-1}.
1 eV = $1{,}60\times10^{-19}$ J.
Considere que los átomos son no relativistas.

(a) ¿Cuál es la velocidad media de un átomo de sodio en un gas a 300 K?

(b) Obtenga una expresión para la variación de la velocidad de un átomo de sodio cuando colisiona frontalmente con un fotón del citado láser. Calcule el valor numérico para esa variación, considerando que la energía del fotón absorbido es *exactamente igual* a la energía de la transición. ¿Cuántas colisiones de este tipo serían necesarias para detener un átomo de sodio?

(c) En realidad, como la variación de la energía cinética del átomo no es nula, la energía del fotón *no es exactamente igual* a la energía de la transición.

(c.1) Demuestre que la variación de la energía cinética del átomo asociada a la absorción del fotón en una colisión frontal se puede escribir como

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = -m|v_{\mathrm{i}}||\Delta v| + \frac{1}{2}m|\Delta v|^2,$$

donde las magnitudes $|v_{\mathrm{i}}|$ y $|\Delta v|$ son los módulos de los vectores *velocidad inicial* y *variación de la velocidad del átomo*, respectivamente.

(c.2) Calcule la razón $\Delta E_{\mathrm{c}} / E_{\mathrm{fotón}}$ para los átomos con la velocidad obtenida en (a), considerando que, en este caso, el primer término de la expresión anterior para ΔE_{c} es la dominante (es decir, que el segundo término del segundo miembro de esta expresión es despreciable) y que puede utilizar para la variación de la velocidad del átomo el resultado obtenido en la parte (b).

(d) La temperatura final alcanzada en un enfriamiento de este tipo está limitada inferiormente por lo que se denomina límite de retroceso (*recoil limit*) relacionado con el retroceso de los átomos en el proceso de absorción y emisión.

(d.1) Obtenga una expresión para la variación de la energía cinética de un átomo con velocidad inicial nula que absorbe un fotón y demuestre que, en este caso, la energía del fotón debe ser mayor que la energía de la transición atómica.

(d.2) Calcule la diferencia de energía cinética del apartado anterior, sabiendo que $E_{\mathrm{fotón}}^2 / mc^2$ se puede aproximar por $E_{\mathrm{transición}}^2 / mc^2$, donde *m* representa la masa del átomo de sodio y $E_{\mathrm{fotón}}$ la energía del fotón absorbido.

(d.3) Considere que el átomo que absorbió un fotón en las condiciones del apartado anterior, que quedó en estado excitado, emite un fotón en la misma dirección y en sentido opuesto al de su velocidad. Calcule la variación de la energía cinética del átomo. También en este caso puede utilizar la aproximación $E'^2_{\mathrm{fotón}} / mc^2 \approx E^2_{\mathrm{transición}} / mc^2$, en la que $E'_{\mathrm{fotón}}$ es la energía del fotón emitido.

(d.4) Considerando este proceso de absorción y de emisión, calcule la ganancia de energía final del átomo y la temperatura a que corresponde. ¿Cuál es la importancia del proceso en el enfriamiento de átomos?

1. Planeta-disco

(a) Fazendo as correspondências

$$q \rightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow -G$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \rightarrow -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Se, por um lado, para o campo eléctrico, se tem

$$\Phi_e = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

a forma da Lei de Gauss para o campo gravítico é

$$\boxed{\Phi_g = -4\pi G m\,.}$$

(b) Usando uma superfície gaussiana que contenha as duas superfícies do planeta (ver figura mais à frente, esquema 1))

$$\Phi_g = 2g(z)\,A$$

em que $g(z)$ é a componente z da aceleração da gravidade à altitude z e A é a área da base da superfície gaussiana (superfície cilíndrica, por exemplo). Como a massa no interior da superfície gaussiana é

$$\Delta m = \mu A$$

vem

$$2g(z)\,A = -4\pi G\mu A \qquad \text{ou} \qquad g(z) = -2\pi G\mu$$

de onde resulta

$$\boxed{g(z) = -g_{Dw} = -2\pi G\mu\,.}$$

O campo é uniforme e não varia com a distância à superfície (desde que a aproximação de planeta "sem espessura" seja razoável).

(c) Se o planeta tiver massa volúmica ρ, então μ = ρ d, em que d é a espessura do planeta. Como

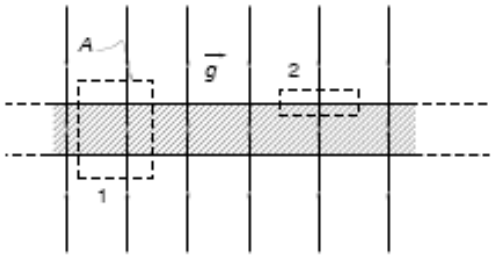
$$g_{Dw} = 2\pi G\rho_{Dw} d\,,$$

e sendo $g_{Dw} = g$ e $\rho_{Dw} = \rho_T = \rho$,

$$g = 2\pi G\rho d\,.$$

Por outro lado, à superfície da Terra, $g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{4}{3}\pi R_T G\rho$. Inserindo na expressão acima,

$$\boxed{d = \frac{2}{3}R_T = 4{,}3 \times 10^6 \text{ m.}}$$



(d) Usando novamente uma superfície de Gauss com uma base fora do planeta, onde o campo é $-g_{\mathrm{Dw}}$ e a outra dentro e à distância z do plano central (figura acima, esquema 2), onde o campo é $-g(z)$, vem

$$\Phi = -g_{\mathrm{Dw}} A - g(z) A .$$

A massa contida no interior da superfície de Gauss é $\Delta m = A\rho(d/2 - z)$ pelo que o fluxo de campo gravítico também é dado por

$$\Phi = -4\pi G A \rho \left(\frac{d}{2} - z \right).$$

Igualando agora as duas expressões obtidas para o fluxo, vem (notar que $g_{\mathrm{Dw}} = 2\pi G \rho d$)

$$g_{\mathrm{Dw}} + g(z) = 4\pi G \rho \left(\frac{d}{2} - z \right) = g_{\mathrm{Dw}} \left(1 - \frac{2z}{d} \right)$$

e, finalmente,

$$\boxed{g(z) = -g_{\mathrm{Dw}} \frac{2z}{d}}$$

(e) Como mostra a última expressão, a aceleração gravítica é proporcional à distância ao plano central, ou seja pode escrever-se na forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z .$$

O movimento de uma partícula largada da superfície do planeta para dentro do poço é harmónico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g_{\mathrm{Dw}}}{d}} .$$

O período é, pois,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{2g_{\mathrm{Dw}}}}$$

Usando a expressão $d = \frac{2}{3} R_{\mathrm{T}}$ e substituindo valores, encontra-se

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\mathrm{T}}}{3g_{\mathrm{Dw}}}} = 48{,}9 \text{ minutos}}$$

2. Disco de Faraday

(a) Na ausência de corrente a velocidade dos electrões é igual à velocidade de cada ponto do cilindro:

$$\vec{v} = \omega\, r\, \hat{e}_\theta$$

Como $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$ a força magnética sobre os electrões é dada por

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = -e\vec{v} \times \vec{B} = -evB\,\hat{e}_r$$

ou seja

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = -eB\omega r\,\hat{e}_r\,.}$$

(b) Para que a força electromagnética $\vec{F}_{\mathrm{em}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ seja nula surge um campo eléctrico induzido tal que

$$\vec{E} = -B\omega r\,\hat{e}_r\,.$$

Este campo depende da distância ao eixo de rotação, $E(r) = -B\omega r$. O campo eléctrico aponta do exterior para o interior. Logo, a periferia do cilindro fica a um potencial maior do que o seu centro. A diferença de potencial entre qualquer ponto da periferia do cilindro (P) e o centro (C) é

$$V_{\mathrm{P}} - V_{\mathrm{C}} = \Delta V = \frac{1}{2}\omega B a^2\,.$$

Designando a secção recta do cilindro por A, tem-se $A = \pi a^2$ e a equação acima pode escrever-se $\Delta V = \frac{\omega}{2\pi} BA$. Por um lado, $\frac{\omega}{2\pi} = T^{-1}$ é o inverso do período de rotação; por outro lado, $BA = \phi$ é o fluxo do campo magnético através da secção recta do cilindro. Portanto,

$$\boxed{\Delta V = \frac{\phi}{T}}$$

(c) Se o gerador de Faraday estiver ligado a uma resistência externa, R, a corrente que passa na resistência é

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

e a potência dissipada por efeito Joule é

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R}$$

Como a energia se conserva, esta potência dissipada corresponde à variação da energia cinética do cilindro por unidade de tempo. A energia cinética do cilindro é

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

sendo $I = \frac{1}{2} m a^2$ o momento de inércia do cilindro de massa m. A conservação de energia permite escrever

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R} = -\frac{\phi^2}{2\pi^2 I R} E_\mathrm{c}$$

e, finalmente,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_\mathrm{c}}{\tau},} \qquad \text{com } \tau = \frac{2\pi^2 I R}{\phi^2} \qquad \text{ou ainda} \qquad \boxed{\tau = \frac{m R}{B^2 a^2}.}$$

(d) Para $B = 1$ T, e $A = \pi a^2 = 4\pi \times 10^{-4}$ m^2, vem $\phi = 4\pi \times 10^{-4}$ Wb. Por outro lado, $I = m a^2 / 2 = 1 \times 4 \times 10^4 / 2 = 2 \times 10^4$ kg m^2 e $R = 10\ \Omega$. Portanto,

$$\tau = \frac{4\pi^2 \times 10^{-3}}{16\pi^2 \times 10^{-8}} = 25\,000 \text{ s} \approx 6{,}9 \text{ horas.}$$

Sendo este o valor da constante de tempo, o cilindro, para parar ao fim de 10 minutos, terá de existir um outro mecanismo de dissipação de energia.

3. Datação por carbono-14

A lei do declínio radioactivo escreve-se

$$N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Por definição, para $t = T_{1/2}$ (tempo de meia-vida) tem-se $N = N_0 / 2$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \, e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Tomando logaritmos, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda T_{1/2}}\right)$ que é equivalente a

$$\ln(1) - \ln(2) = -\lambda T_{1/2}$$

e, finalmente,

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

A constante de decaimento é $\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = \ln 2 / 5700$ anos^{-1}:

$$\boxed{\lambda = 1{,}216 \times 10^{-4} \text{ anos}^{-1}.}$$

(b) Admitindo que o fóssil tinha, quando morreu, o mesmo teor de carbono-14 que o ser vivo actual, podemos escrever

$$N_{\text{fóssil}}(t) = N_{\text{ser vivo}} \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

No caso em análise, $N_{\text{fóssil}} / N_{\text{ser vivo}} = 0{,}1$ e portanto $0{,}1 = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ ou

$$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}1)}{1{,}216\times10^{-4}}$$

e

$$\boxed{t = 1{,}89\times10^{4}\ \text{anos.}}$$

(c) Escrevemos agora $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \dfrac{0{,}0006\times N_{\text{ser vivo}}}{N_{\text{ser vivo}}}$, donde

$$t = -\frac{\ln(0{,}0006)}{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}0006)}{1{,}216\times10^{-4}}$$

e

$$\boxed{t \approx 61\,000\ \text{anos.}}$$

(d) A actividade é $R = -\dfrac{dN}{dt} = \lambda N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ ou $R = R_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ com $R_0 = \lambda N_0$ (e $R = \lambda N$). Para $N = 10^{15}$ e $\lambda = 3{,}856\times10^{-12}$ vem

$$\boxed{R = 3856\ \text{desintegrações/segundo}}$$

4. Arrefecimento de átomos

a) De

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$$

obtém-se

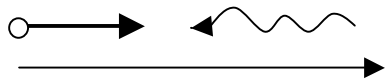
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}}}$$

e, substituindo valores (a massa do átomo de sódio é $m = 3{,}819\times10^{-26}$ kg), vem

$$\boxed{v = 570\ \text{m/s.}}$$

(Nota: considerou-se a velocidade média igual à velocidade quadrática média.)

b)



A conservação do momento linear segundo a direcção do movimento permite escrever:

$$\vec{p}_{\text{final átomo}} = \vec{p}_{\text{fotão}} + \vec{p}_{\text{inicial átomo}}$$

ou ainda $\Delta\vec{p}_{\text{átomo}} = \vec{p}_{\text{fotão}}$. Segundo o eixo O$x$, $\Delta p_{\text{átomo}} = -h/\lambda = -E_{\text{fotão}}/c$ pelo que a variação da velocidade do átomo é

$$\boxed{\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}.}$$

De acordo com a aproximação sugerida no enunciado, $E_{\text{fotão}} \approx E_{\text{transição}} = E_{\text{exc}} - E_{\text{fund}} = -3{,}04+5{,}14 = 2{,}10$ eV $= 3{,}36 \times 10^{-19}$ J. A variação de velocidade em cada colisão frontal, $\Delta v = -E_{\text{fotão}} / mc$, é, substituindo valores,

$$\boxed{\Delta v = -2{,}93\times 10^{-2} \text{ m/s}}$$

Seriam necessárias $570/(2{,}93\times 10^{-2}) =$ $\boxed{1{,}94\times 10^{4} \text{ colisões.}}$

c) Vamos considerar todas as grandezas vectoriais projectadas na direcção 0x.

(c.1) A energia cinética final do átomo é

$$E_{\text{c final}} = \frac{1}{2} m\left(|v_{\text{i}}| - |\Delta v|\right)^2 = \frac{1}{2} m\left(|v_{\text{i}}|^2 - 2v_{\text{i}}|\Delta v| + |\Delta v|^2\right) = E_{\text{c inicial}} + \frac{1}{2} m\left(-2v_{\text{i}}|\Delta v| + |\Delta v|^2\right)$$

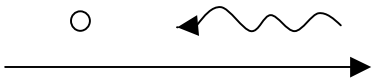
e, portanto,

$$\boxed{\Delta E_{\text{c}} = -m|v_{\text{i}}||\Delta v| + \frac{1}{2} m|\Delta v|^2}$$

(c.2) Desprezando o segundo termo na expressão anterior $\Delta E_{\text{c}} \approx -m|v_{\text{i}}||\Delta v|$ e usando o resultado da alínea (b), $\Delta v = -\dfrac{E_{\text{fotão}}}{mc}$, encontra-se

$$\boxed{\frac{\Delta E_{\text{c}}}{E_{\text{fotão}}} \approx -\frac{|v_{\text{i}}|}{c} = -1{,}9\times 10^{-6}.}$$

(d.1)



A conservação de momento linear permite concluir que a variação de velocidade do átomo é, tal como encontrámos na alínea (b), $\Delta v = -\dfrac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Esta é, pois, a velocidade final do átomo depois de absorver o fotão. A variação de energia cinética do átomo é, portanto,

$$\boxed{\Delta E_{\text{c}} = \frac{1}{2}\frac{E_{\text{fotão}}^2}{mc^2}}$$

Esta energia tem de ser fornecida pelo fotão, logo $E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \Delta E_{\text{c}}$

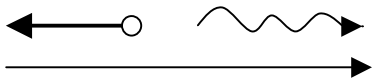
$$E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \frac{1}{2}\frac{E_{\text{fotão}}^2}{mc^2} \quad \text{de onde se conclui que} \quad \boxed{E_{\text{fotão}} > E_{\text{transição}}}$$

(d.2) Como $\frac{E_{\text{fotão}}^2}{mc^2} \approx \frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2} = 3{,}28\times10^{-29}$ J, a variação de energia cinética do átomo é $\Delta E_{\text{c}} = \frac{1}{2}\frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2}$, ou seja

$$\boxed{\Delta E_{\text{c}} = 1{,}64\times10^{-29}\ \text{J}.}$$

(d.3) Na emissão do fotão, tal como na absorção há conservação do momento linear.

$\vec{p}_{\text{inicial átomo}} = \vec{p}_{\text{final átomo}} + \vec{p}_{\text{fotão}}$



$m\,\vec{v}_{\text{i}} = m\,\vec{v}_{\text{f}} + \vec{p}_{\text{fotão}}$

A velocidade inicial do átomo aponta agora no sentido negativo de 0*x*. Vimos em (d.1) que esta velocidade inicial é $-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Como o fotão é emitido no sentido positivo, podemos escrever

$$mv_{\text{f}} + \frac{E'_{\text{fotão}}}{c} = -\frac{E_{\text{fotão}}}{c}$$

onde $E'_{\text{fotão}}$ é a energia do fotão emitido ($E_{\text{fotão}}$ é a energia do fotão absorvido). Portanto,

$$v_{\text{f}} = -\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc}$$

A variação da energia cinética do átomo é

$$\Delta E'_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv_{\text{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{i}}^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(-\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc}\right)^2 - \left(-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}\right)^2\right]$$

ou ainda

$$\Delta E'_{\text{c}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2E_{\text{fotão}}E'_{\text{fotão}}}{mc^2} + \frac{E'^2_{\text{fotão}}}{mc^2}\right)$$

e, finalmente, na aproximação sugerida,

$$\Delta E'_{\text{c}} = \frac{3}{2}\frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2}$$

Esta variação de energia cinética na emissão é o triplo da encontrada na alínea (d.2):

$$\boxed{\Delta E'_{\text{c}} = 4{,}92\times10^{-29}\ \text{J}.}$$

(d.4) Devido ao processo de absorção e emissão consecutiva, o átomo, inicialmente em repouso, adquire uma energia cinética $E_{\text{c}} = \Delta E_{\text{c}} + \Delta E'_{\text{c}} = 4{,}92\times10^{-29} + 1{,}64\times10^{-29}$ ou

$$\boxed{E_{\mathrm{c}} = = 6{,}56\times10^{-29}\ \mathrm{J}}$$

A temperatura correspondente é $T = \dfrac{2E_{\mathrm{c}}}{3k_{\mathrm{B}}}$, ou seja

$$\boxed{T = 3\ \mu\mathrm{K}\ .}$$

Este valor é muito pequeno (ordem dos microkelvins) pelo que o processo pode ser desprezado no arrefecimento. Só tem importância próximo do zero absoluto (não sendo possível atingi-lo).

XII Olimpíada Iberoamericana de Física
Argentina 2007

Prueba Experimental

Determinación de la estructura cristalina y la concentración de un cristal coloidal, por medio de difracción de luz visible.

-Duración 4 h
- **NO** escriba su nombre en ninguna hoja.
- Enumere todas las hojas indicando también el total de hojas que se entregan sin considerar el enunciado. Por ejemplo si entrega un total de 12 hojas a la hoja 7 identifíquela con el número 7/12, etc.
- Si necesita más hojas pídalas al Bedel.
- Al finalizar guarde la calculadora y todos los útiles de escritura proporcionados en la bolsa de los útiles, junto con la tarjeta que tiene su nombre.
- Escriba su nombre con letra clara en el sobre blanco y guarde la prueba en el mismo.

Objetivo:

Determinación de la estructura cristalina y la concentración de un cristal coloidal, por medio de difracción de luz visible.

Material suministrado:

- Un difractómetro integrado por:
  - Una fuente de luz láser, fija a una base de altura y nivel regulables.
  - Una rendija de cartulina azul para colimar el haz láser.
  - Un tubo, con orificio para el ingreso de un haz de luz, fijo sobre una base.
- Un portamuestras.
- Una linterna.
- Una regla.
- Lápiz, hojas de papel blanco y papel milimetrado .
- Una calculadora.

Datos:

Longitud de onda de la luz de láser $\lambda=(659\pm1)\ 10^{-9}$ m
Índice de refracción del agua $n=(1{,}332\pm0{,}003)$

ATENCIÓN

Lea detenidamente los párrafos que describen el funcionamiento de las distintas partes del difractómetro. Vaya mirando e identificando las partes, pero **no toque nada** hasta que haya terminado de leer íntegramente las siguientes secciones:

-Difracción de Bragg.

-Cristales coloidales.

En esta sección se hace hincapié sobre el cuidado extremo con el que deberá realizar el experimento, debido a las propiedades de la muestra que usará.

-Descripción del funcionamiento del difractómetro.

-Procedimiento.

Esta sección lo guiará en la realización de la experiencia.

Mucho cuidado y suerte.

La difracción de Bragg

Cuando un haz de luz incide sobre un cristal, es dispersado, en todas las direcciones, por todas las partículas que lo constituyen. Si la longitud de onda de la luz tiene un valor adecuado, entre los rayos dispersados se produce interferencia. En algunas direcciones la interferencia es constructiva y entonces habrá un máximo de intensidad luminosa, en otras, las más, será destructiva y habrá oscuridad. Este fenómeno se denomina difracción de la luz (la más común es la de rayos X).

En la figura 1 se esquematizan algunos de los centros dispersores de un cristal que está siendo irradiado.

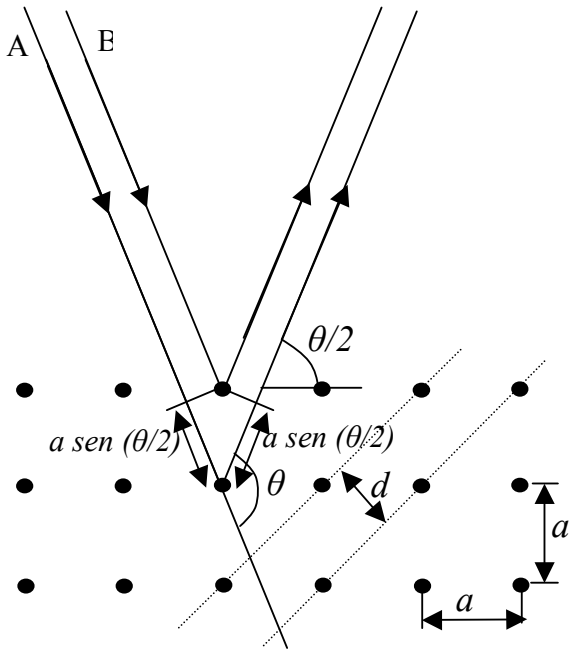


Figura 1

Según se observa en la figura 1, habrá interferencia constructiva entre el rayo A y el B (o lo que es lo mismo, un máximo de difracción) cuando la diferencia de camino óptico entre ambos (*2 a sen(θ/2))* satisfaga la expresión:

$$2\ a\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\lambda}{n} \qquad (1)$$

donde *n* el índice de refracción del medio, λ/n la longitud de onda de la luz en el medio y *a* la separación entre los dispersores (ver Figura 1) . A esta expresión se la conoce como "Ley de Bragg".

Aunque obtenida de un ejemplo sencillo, esta expresión resulta de la contribución de todos los dispersores que forman el cristal.
Note que la expresión anterior resulta como surgida de reflexiones de rayos paralelos (A y B), sobre "planos paralelos" del cristal, separados por la distancia *a*. Estos "planos cristalinos" se consideran formados por las partículas que están contenidas en ellos.
En el caso en que se considere la incidencia del haz, por ejemplo, sobre los planos indicados por las líneas punteadas, en la Fig. 1, los cuales están separados por una distancia $d=a/\sqrt{2}$, se tendrá que reemplazar a $\underline{a}$ por $\underline{d}$, en la ecuación (1).

$$2\ d\ sen\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\lambda}{n} \qquad (2)$$

El ejemplo esquematizado en la figura 1 es bidimensional. En tres dimensiones se puede obtener que la expresión genérica para *d,* en el caso de redes cristalinas cúbicas, es :

$$d=\frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

donde *h, k,* y *l* son enteros mayores o iguales a cero, denominados índices de Miller.

Reemplazando esta expresión para *d*, en la ecuación (2), queda

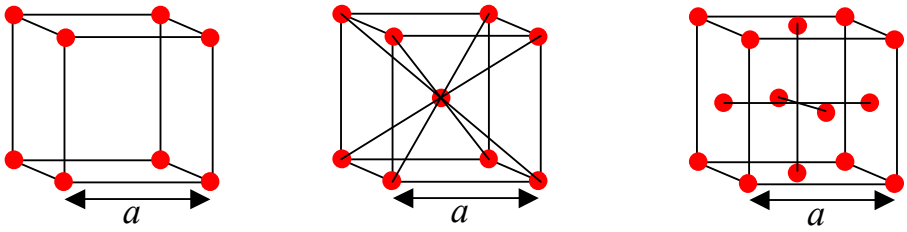
$$\frac{2a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\,sen\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\lambda}{n}$$

Definiendo $h^2+k^2+l^2=N$ es inmediato que

$$sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\left(\frac{\lambda}{2a\,n}\right)^2 N \qquad (3)$$

De esta ecuación es importante notar que ***para cada N corresponde un único θ*** para *a* y λ fijos **.**

Una de las formas más simples en la que se ordenan las partículas, es según redes cristalinas cúbicas. Estas redes pueden ser cúbicas simples (CS), cúbicas centradas en el cuerpo (BCC), o cúbicas centradas en las caras (FCC). Los esquemas de las celdas elementales de dichas redes están graficados en la Figura 2.



CS BCC FCC

Figura 2

Según se observa en esta figura, para el caso CS las partículas se ubican en los vértices de un cubo de lado *a*. En el caso BCC se agrega una partícula en centro del cubo, mientras que en el caso de una FCC, a las partículas de una CS se agregan partículas en el centro de cada una de las caras del cubo.
A la longitud de la arista del cubo, *a*, se la conoce con el nombre de *parámetro de red*.

Para que se produzca un máximo de difracción, no es suficiente con que se satisfaga la Ley de Bragg (ecuación 1). Además, es necesario que los índices de Miller (*h,k,l*) cumplan ciertas reglas, que surgen de la ubicación de las partículas que forman la celda elemental. Estas reglas, para las estructuras cúbicas, son las siguientes.

BCC- Si la suma $h+k+l$ es par, la reflexión existe; si es impar, no existe.

FCC- Si *h.k,l* son todos pares o todos impares, la reflexión existe; si hay mezcla de paridad, no existe. (al cero se lo considera como par)

CS- No hay restricciones.

Estas reglas permiten obtener los valores de N permitidos correspondientes a los máximos de difracción.

Como ejemplo se muestra la Tabla 1, para la estructura BCC y FCC, con algunos de los valores de índices de Miller para haces difractados.

h	k	l	$N = h^2 + k^2 + l^2$ BCC	$N = h^2 + k^2 + l^2$ FCC
1	0	0	-	-
1	1	0	2	-
1	1	1	-	3
2	0	0	4	4
2	1	0	-	-
2	1	1	6	-
2	2	0	8	8
2	2	1	-	-
3	1	0	10	-
3	1	1	-	11
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Tabla 1
Valores permitidos de N en redes BCC y FCC

Cristales coloidales

Un cristal coloidal es un arreglo ordenado de partículas en el seno de un líquido. En nuestro caso las partículas son esferas de látex y el líquido es agua, sin iones. Las esferas de látex tienen una cierta cantidad de carga negativa adherida y distribuida uniformemente sobre su superficie. Todas las esferas tienen la misma carga. Como el agua que las rodea no contiene iones positivos que neutralicen la carga negativa de las esferas, éstas se repelen mediante fuerzas de Coulomb.

Las paredes del recipiente que contiene a las esferas de látex en agua, impiden que aquellas se aparten indefinidamente. Esta restricción hace que las esferas alcancen posiciones de equilibrio que minimizan la energía de repulsión coulombiana, para el volumen V que ocupan las N_0 esferas.
Bajo estas condiciones y dependiendo de la concentración o densidad numérica de esferas en el volumen V, $c = \frac{N_0}{V}$, las esferas se acomodarán formando estructuras BCC o FCC.
Un cristal con estructura, por ejemplo, cúbica centrada en el cuerpo, se "arma" repitiendo esa celda elemental, un gran número de veces (Figura 3-b). Cuando muchos de estos

cristales se agrupan, con orientaciones al azar, como en el caso de la muestra de este experimento, se dice que se forma un policristal.

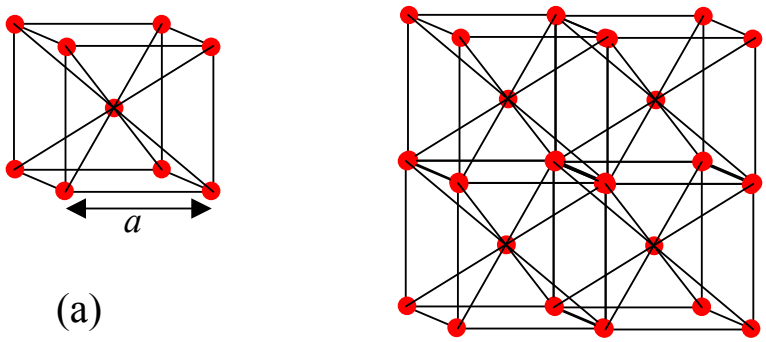


Figura 3

a-Esquema de una celda elemental BCC
b-porción de un cristal con estructura BCC

En nuestro caso tenemos un policristal de esferas de latex en agua. Las fuerzas que mantienen "armado" los cristales del policristal son muy débiles. Por esta razón, cualquier golpe o vibración destruye el ordenamiento y luego transcurre cerca de una hora hasta que vuelve a ordenarse. Por lo tanto, trate al dispositivo con mucho cuidado, sobre todo al portamuestras, rotándolo lentamente cuando deba hacerlo. Cuide de no mover ni golpear la mesa.
Respetando estas consignas conservará el policristal sobre el cual se basarán todas sus mediciones.

Descripción del difractómetro

La figura 4 muestra el esquema de un corte vertical del difractómetro del equipo experimental. Su cuerpo principal es un tubo de vidrio que en su extremo inferior está fijado a una base de aluminio y en el superior tiene un tapón de plástico de color negro. La base de aluminio está apoyada dentro de un alojamiento que la contiene y que le permite girar según un eje vertical. Para ello, se debe tomar al portamuestras por el tapón negro (superior) y **sin levantarlo**, hacerlo girar. En el tubo de vidrio está incertada una placa de acrílico transparente que tiene una línea marcada en dirección radial. Esta línea permite medir los ángulos girados en una escala graduada o goniómetro, que está fija al borde superior del "tubo T", el cual aloja a todo este sistema portamuestras. La placa acrílica, además, tiene adosada una pantalla de papel, sobre la que aparecerán marcas luminosas (puntos y líneas) debidos a la luz difractada por la muestra.

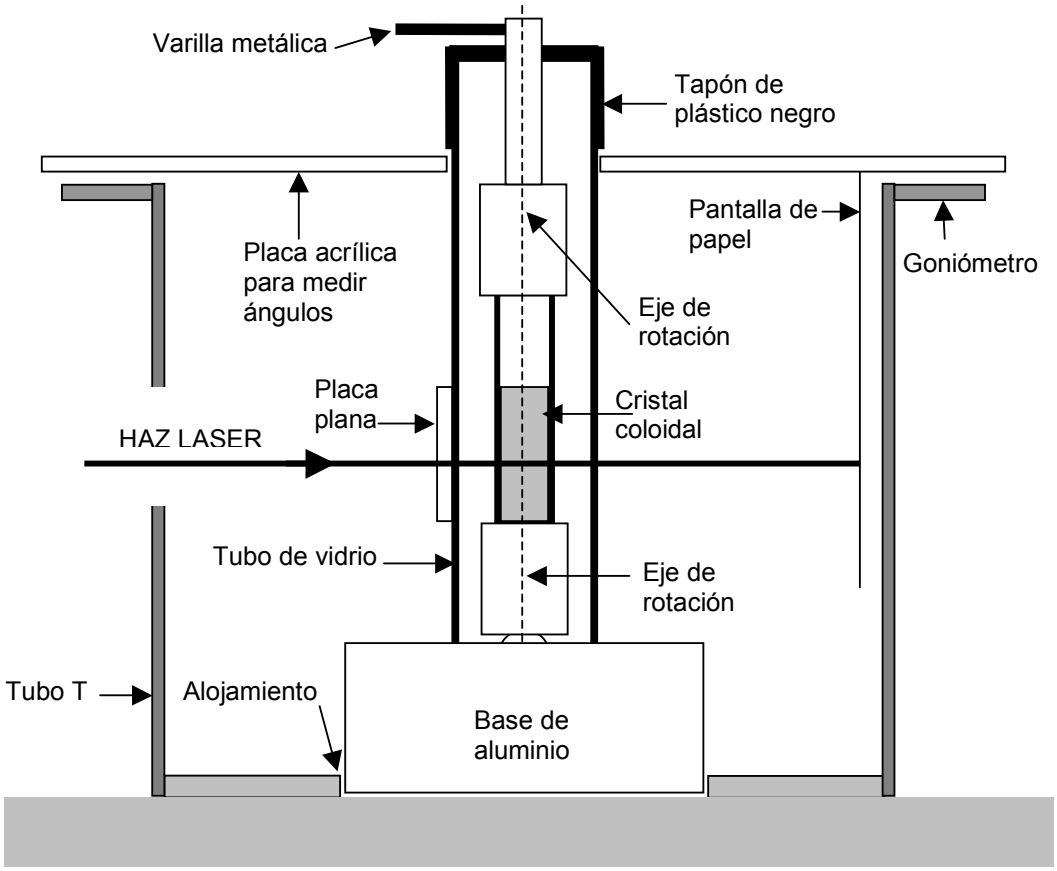


Figura 4
Esquema del corte vertical del difractómetro.

Dentro del tubo de vidrio está el recipiente que contiene la muestra, la cual es un "cristal coloidal". Por el centro del tapón negro sobresale una varilla blanca, que tiene un perno metálico, transversal. A esta varilla está fijado el recipiente que contiene la muestra. Con la ayuda del perno se puede girar suavemente la varilla y de esta forma rotar la muestra.
Es conveniente que el haz de luz de la fuente incida perpendicularmente a la pared del recipiente que contiene la muestra. Para ello se ha adherido a la pared del tubo de vidrio, una pequeña placa plana, de vidrio, para ayudar a verificar esta incidencia normal.
La fuente láser está montada sobre un dispositivo que posee tres tornillos, con los que se puede corregir la altura y el ángulo de incidencia del haz sobre la pequeña placa plana de vidrio. Junto a la fuente láser está adosada una pequeña pantalla graduada, en ella se podrá observar el haz parcialmente reflejado en la placa plana de vidrio y así poder corregir su dirección (Ver figura 5).
Por último se dispondrá de una rendija, confeccionada con un trozo de cartulina azul, que, una vez que el difractómetro esté listo para medir, se podrá colocar junto al tubo "T", para colimar el haz láser y mejorar, de este modo, el contraste de los haces difractados respecto de un fondo rojizo de luz dispersada.

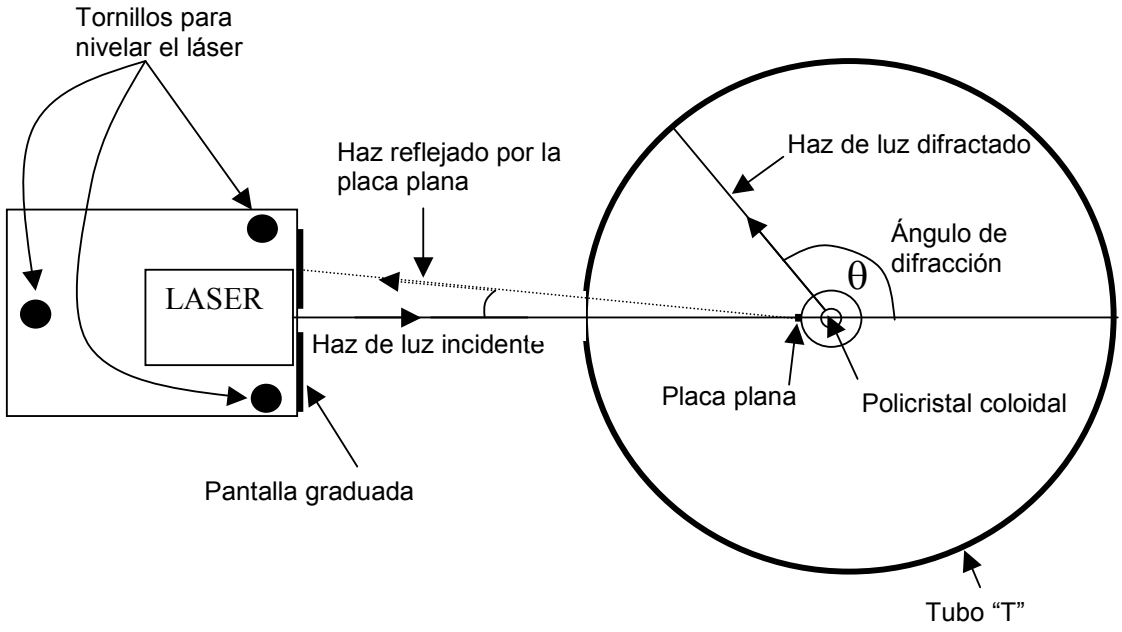


Figura 5
Esquema del corte horizontal del dispositivo experimental

Procedimiento:

Actividades preliminares

Las actividades y observaciones que continúan, enumeradas del 1 al 8, le servirán para familiarizarse con el equipo, razón por la cual debe regular el tiempo invertido en esta tarea.

1- Encienda la fuente de luz láser accionando la llave del portapilas, que se encuentra junto al puntero láser.
2- Haciendo uso de los tornillos y/o desplazando cuidadosamente la base en donde está apoyado el puntero láser, haga incidir el haz de luz perpendicularmente sobre la placa de vidrio plana, que tiene pegado el portamuestras.
3- Para que el haz incida perpendicularmente sobre la placa plana podrá girar el portamuestra tomándolo (sin levantarlo) del tapón negro y variando la posición de los tornillos que nivelan el láser.
4- Sobre la pantalla de papel se pueden ver los puntos luminosos donde inciden los haces difractados por la muestra. Estos puntos se ven formando arcos luminosos, verticales. A cada uno de ellos le corresponde un único valor de N. Los arcos luminosos se deberían presentar en posiciones simétricas respecto al punto de incidencia del haz directo. Es decir que se observa el mismo diagrama de difracción a derecha e izquierda del haz incidente.
5- Al rotar la muestra por medio de la varilla metálica usted observará que algunos puntos luminosos, que corresponden a los haces difractados, aparecen y otros desaparecen. Esto le permitirá medir ángulos de difracción correspondientes a algunos de los valores de N posibles.
6- Mediante los tornillos para nivelar el láser podrá variar la altura del haz incidente para iluminar distintas zonas de la muestra y obtener otros puntos luminosos de haces difractados.
7- Si se coloca la rendija de cartulina para colimar el haz de la fuente, los puntos de difracción quedarán mejor definidos, con lo cual, las mediciones serán más precisas.
8- La intensidad de los haces difractados para valores de $\theta > 70^0$ es baja, por lo que las mediciones son difíciles. Extreme sus habilidades experimentales.

Actividades que se evaluarán

I- Mida y tabule todos los ángulos de difracción θ observables. Mediante un esquema describa brevemente el procedimiento que usó para realizar la medición.
II- Determine la incertidumbre $\Delta\theta$ de cada una de las mediciones obtenidas en I.
III- Suponiendo que la estructura cristalina sea BCC, construya una tabla con valores de θ, $\Delta\theta$ y los N asociados.

IV- Mediante la ecuación (3) obtenga el valor del parámetro de red, a, y su incertidumbre, haciendo uso del par (θ,N) que produzca la menor incertidumbre en el parámetro de red.

V- Con los datos de la tabla del item III construya la gráfica que estime adecuada para obtener el parámetro de red. Compare los valores obtenidos por ambos métodos.

VI- Desarrolle un método de análisis para descartar la estructura FCC, en favor de la BCC.

VII- Obtenga el valor de la concentración o densidad numérica de esferas ($c = N_0/V$) en la muestra.

Problema 1: Elevador Espacial Electrodinámico

Toda nave utilizada en una misión espacial debe llevar consigo la energía requerida para lograr sus objetivos, la cual se encuentra, usualmente, en forma de propelentes químicos, celdas fotovoltaicas o reactores nucleares. Un servicio espacial de entrega de energía puede ser sumamente costoso. Por ejemplo, la Estación Espacial Internacional necesitará, a lo largo de su vida útil, de aproximadamente 77 toneladas de propelentes químicos, sólo para evitar una gradual caída de su órbita.

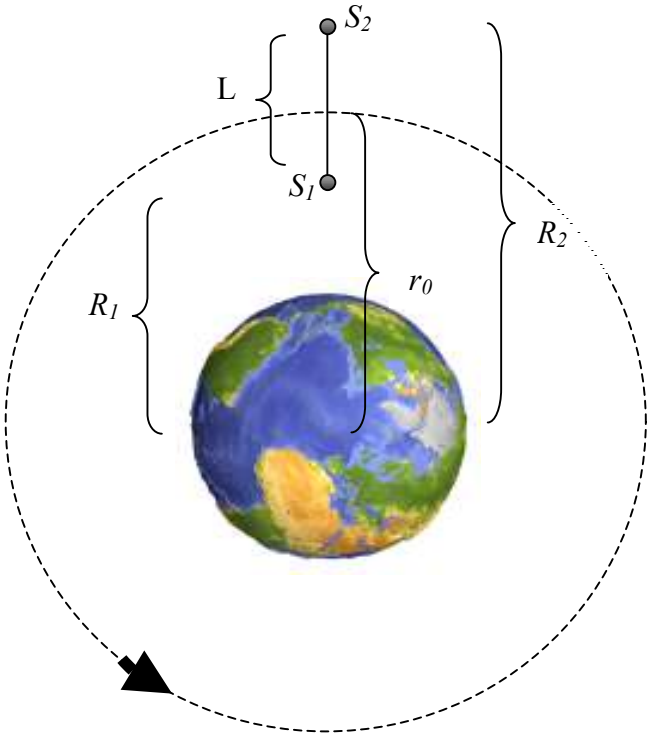


Figura 1: Sistema Elevador – Tierra (Dibujo no a escala)

Para solucionar este tipo de inconvenientes, se ha propuesto un dispositivo alternativo de propulsión, conocido en la literatura inglesa como Tether y que nosotros llamaremos Elevador Espacial. Los elevadores espaciales son sistemas en los cuales dos masas que orbitan alrededor de la Tierra, están unidas por un cable. (ver figura 1). Cuando el cable es un conductor eléctrico, hablaremos de una Elevador Espacial Electrodinámico (EEE). A diferencia de los sistemas convencionales, en el cual los motores químicos o eléctricos intercambian momento entre la nave espacial y el propelente, un EEE intercambia momento con el planeta por intermedio de su campo magnético.

Para fijar ideas, consideremos dos satélites S_1 *y* S_2, ambos de masa M = 500 kg. Un cable conductor de largo L = 50 km, de masa despreciable, une a ambos satélites, los cuales orbitan en torno a la

Tierra. Ésta se considerará como una esfera de masa M_T y radio R_T. El centro de masa del sistema de satélites se encuentra a 1000 km por encima de la superficie terrestre. Esto hace que valgan las desigualdades

$$L << R_1 \; y \; L << R_2 \qquad (1)$$

A lo largo de todo este problema supondremos que el movimiento orbital de los dos satélites ocurre en un único plano que pasa por el ecuador terrestre y que ellos pueden tomarse como masas puntuales.

1) Suponga que el movimiento de los dos satélites S_1 y S_2 es tal que la prolongación de la línea que las une (y que coincide con la dirección del cable que las mantiene unidas) pasa siempre por el centro de la Tierra.

Bajo esta condición, determine analíticamente y calcule

a) La velocidad angular del sistema alrededor de la Tierra, y
b) La tensión del cable que une a los dos satélites.

Nota: para realizar aproximaciones puede usar la siguiente expresión, válida cuando $\delta << a$:

$$\frac{1}{(a+\delta)^2} \approx \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)$$

2) Para un observador fijo a un objeto en una órbita estable, la fuerza de inercia (ficticia o aparente) se equilibra con la fuerza de gravedad. En un sistema como el EEE, todas las fuerzas están equilibradas respecto al centro de masa. Pero en el satélite más alejado de la Tierra, la fuerza aparente, es superior a la fuerza de gravedad. Como resultado, un objeto ubicado en él sentirá una fuerza neta de sentido opuesto a la de la gravedad terrestre (gravedad artificial o aparente).

a) Encuentre la expresión analítica de esa fuerza para un objeto de masa m ubicado en el interior del satélite S_2.

b) Compruebe que esa fuerza es aproximadamente proporcional a la longitud del cable, L.

3) En órbitas bajas (R ~1000 km), cuando el cable conductor que mantiene a los dos satélites unidos atraviesa el campo magnético terrestre, se induce en él una fuerza electromotriz. Debido a la presencia de la ionosfera conductora, se establece una corriente eléctrica que circula por el cable conductor.

Además, esta corriente interactúa con el campo magnético terrestre y experimenta una fuerza.

a) ***Calcule la magnitud y sentido de la corriente eléctrica inducida en el cable conductor. Suponga que la resistencia eléctrica efectiva del sistema conductor-ionosfera es $R = 10$ kΩ y que el cable está recubierto por un material aislante excepto en sus extremos. Aquí utilice la aproximación dipolar del campo magnético terrestre, al cual supondremos de magnitud $B_0 = 2 \times 10^{-5}$ T sobre el ecuador y a una altura de 1000 km por encima de la superficie terrestre. Suponga que el EEE gira hacia el Este y que los dos satélites S_1 y S_2 están fabricados de un material no conductor (ver figura 2).***

b) ***Determine la magnitud, dirección y sentido de la fuerza resultante de la interacción entre la corriente calculada en el punto a) y el campo magnético terrestre.***

c) ***¿Qué efecto tiene esa fuerza sobre el EEE?***

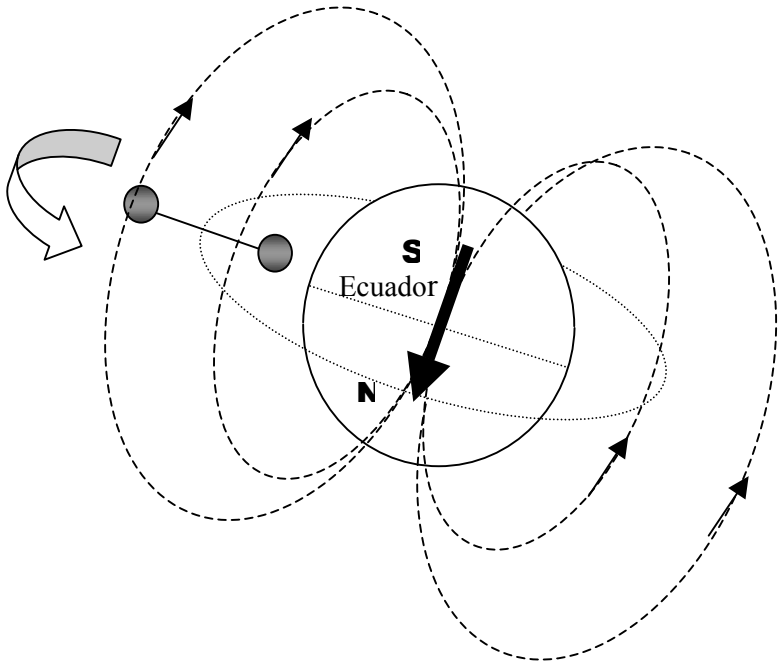


Figura 2: Diagrama del campo magnético terrestre: N y S indican el polo norte y el polo sur magnético, respectivamente.

4) Considere ahora que el cable forma un ángulo φ con la dirección radial a la Tierra, tal como se muestra en la figura 3.

a) ***Determine el valor del ángulo φ para el cual el sistema se encuentra en una orientación estable. Justifique.***

b) ***Determine la frecuencia de oscilación del sistema cuando se aparta ligeramente de su posición de equilibrio.***

Nota: Puede serle de utilidad el siguiente desarrollo, válido para *x* pequeño:

$$\frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \approx 1 - \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}a^2 - b\right]\frac{x^2}{2}$$

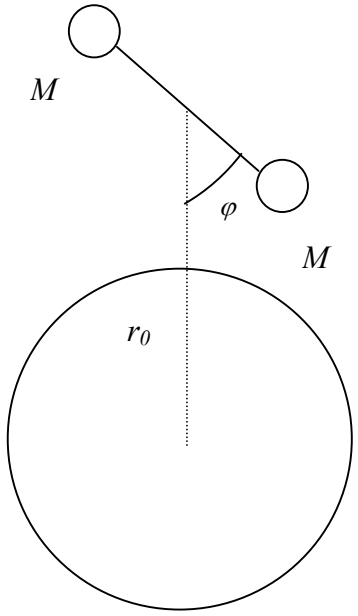


Figura 3: Sistema EEE-Tierra (Dibujo no a escala)

Datos Útiles:

***G = Constante de Gravitación Universal* = 6,67 x 10^{-11} Nm^2/kg^2**

***M_T =Masa Terrestre* = 5,97 x 10^{24} kg**

***R_T = Radio Terrestre* = 6367 km**

Problema2 : Misión a Venus

La forma más sencilla de realizar un viaje entre dos planetas del Sistema Solar es utilizando lo que se conoce como órbita de Transferencia de Hohmann, que es, desde el punto de vista energético, la más económica. En dicha transferencia el satélite recorre, en el ambiente interplanetario, un camino que es una semi-elipse, con el Sol en uno de los focos, entre el planeta interior en la posición más cercana al Sol (perihelio) y el planeta exterior en el punto más apartado de esa cónica (afelio) (Ver Figura 1). En nuestro caso, el de una supuesta misión satelital a Venus, se puede suponer que las órbitas de los planetas involucrados están en el mismo plano y pueden ser consideradas círculos perfectos. Además supondremos que es posible esperar la configuración ideal para la transferencia de Hohmann, donde la posición de Venus (a la llegada de la nave) es diametralmente opuesta a la posición en la que estaba la Tierra en el instante de la partida del satélite.

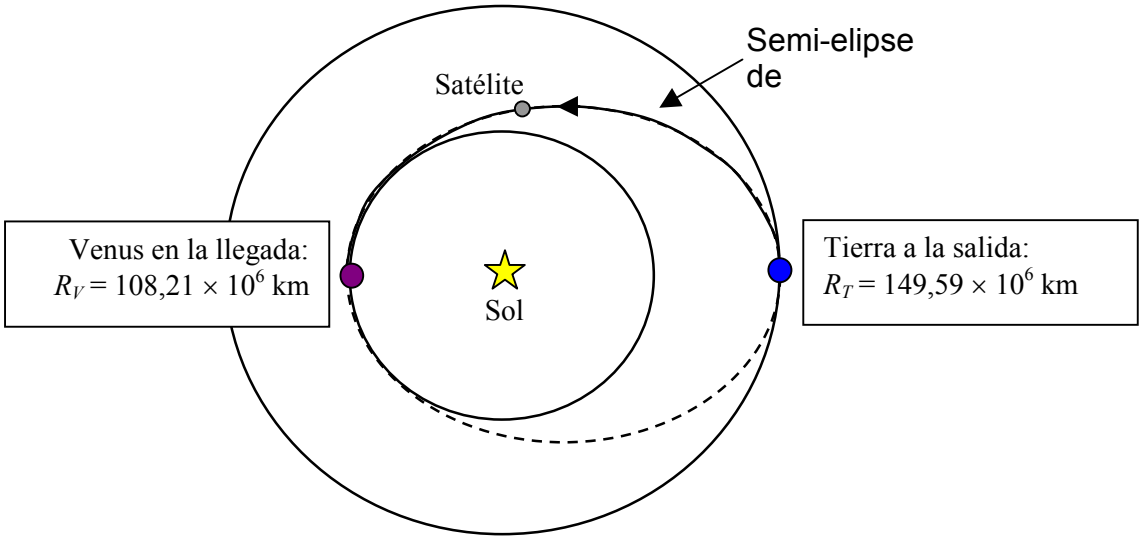


Figura 1

a) **Determine el tiempo de vuelo de una misión desde la Tierra al planeta Venus en una trayectoria de Hohmann, considerando que el movimiento del satélite cumple con las mismas leyes que cualquier astro del sistema solar y despreciando las perturbaciones gravitatorias de todos los planetas.**

Con el objeto de suministrar energía a la nave se instalan 2 paneles solares idénticos para aprovechar la potencia que irradia el Sol, que es de 4 x 1023 kW. Las celdas fotovoltaicas, que convierten la luz del Sol en electricidad, absorben solamente una fracción de ese total para suministrar energía a la nave espacial. En la actualidad se usan celdas de arseniuro de galio que alcanzan una eficiencia de alrededor del 35%

b) Determine el área mínima que debe tener cada panel solar para poder hacer su viaje a Venus. Suponga que tras abandonar la atmósfera terrestre, la nave necesita una potencia mínima de 2 kW para el correcto funcionamiento de su instrumental y que los paneles solares siempre se orientan perpendiculares a la luz solar.

Una de las propuestas mas interesantes que existen para el desarrollo de una nave interplanetaria es lo que se conoce como "velero solar" o "vela de fotones" (nave espacial del Conde Duku en la Guerra de las Galaxias episodio II). Es un tipo de propulsión espacial que se basa en el aprovechamiento de la presión de la radiación del Sol. Cuando los fotones chocan con un objeto, le transfieren momento lineal o cantidad de movimiento. El empuje que así se genera tiene la ventaja de que es permanente y gratuito, y puesto que en el espacio no existe rozamiento, cualquier velocidad adquirida mediante este procedimiento permanecerá así casi indefinidamente.

c) Encuentre una expresión para la presión de radiación en función de la energía radiante por unidad de tiempo y área, suponiendo que la superficie es perfectamente absorbente.

En la actualidad, los paneles solares de las naves espaciales o satélites son ocasionalmente usados como velas solares para ayudar a los satélites a hacer correcciones menores a su órbita sin usar combustible.

El diseño esquemático de la nave se muestra en la Figura 2. La masa de la nave es $M = 480$ kg, su radio es $r = 1$ m y la masa de cada panel es $m = 30$ kg

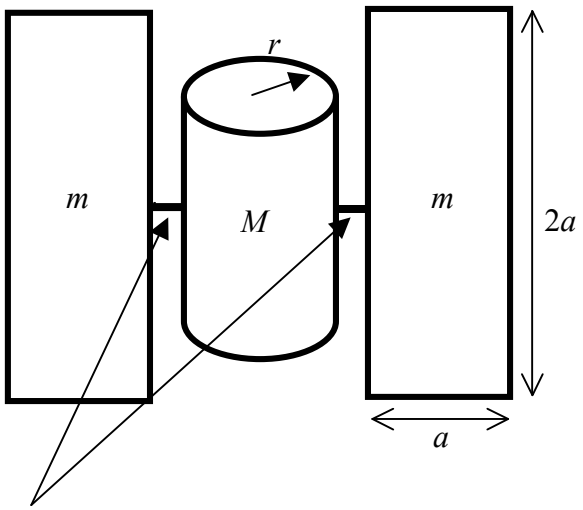


Figura 2

d) Calcule la aceleración angular inicial de la nave cuando se encuentra orbitando alrededor de Venus, si uno de los paneles absorbe totalmente y el otro refleja el 50 % de la radiación incidente. Suponga los paneles solares orientados perpendicularmente a la luz solar.

Debido a un desperfecto, la nave se sale de su órbita e interesa conocer cuánto se aproximará al Sol antes de que se fundan sus paneles.

Se sabe que la energía emitida por unidad de tiempo y por unidad de área por un objeto a temperatura T está dada por la ley de Stefan-Boltzmann

$$S = \sigma T^4 e$$

donde σ es una constante universal y e es la emisividad. Un cuerpo en equilibrio con sus alrededores irradia y absorbe la misma cantidad de energía en la unidad de tiempo, manteniendo su temperatura constante. Para un absorbente ideal $e = 1$.

Considerando que las placas solares están sólo constituidas por arseniuro de galio, que su espesor es despreciable y que el Sol emite energía uniformemente en todas direcciones:

e) Encuentre la distancia al Sol a la que comienzan a fundirse las celdas solares, teniendo en cuenta que la temperatura de fusión del arseniuro de galio es de 1511 K. Suponga que los paneles están siempre orientados perpendicularmente a la luz solar.

Datos útiles:

- $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}\,K^{-4}}$
- Momentos de inercia:

  - Cilindro respecto a su eje: $MR^2/2$

  - Placa respecto eje mayor: $ML^2/12$ (L ancho de la placa)

Problema 3: Criostato para bajas temperaturas

Un sistema simple para controlar la temperatura de una muestra entre 77 K y 300 K consiste en sumergir el recipiente que la contiene en un baño de nitrógeno líquido (NL) contenido en un termo de vidrio.

En nuestro caso, el recipiente que contiene la muestra es un cilindro de 5 cm de radio conectado con el exterior por medio de un tubo cilíndrico de 1 cm de radio. Las paredes laterales del cilindro y del tubo son adiabáticas (aislantes térmicos). La temperatura de la muestra en el interior del cilindro se mantiene a 100 K mediante un sistema que regula la corriente que pasa por una resistencia. Un esquema simplificado de dicho sistema es mostrado en la figura 1.

Las tapas del cilindro interior están compuestas de dos materiales, cobre y alúmina (óxido de aluminio), siendo de cobre la parte externa. El cobre tiene un espesor de 1 cm. y la alúmina 3 cm. A 77 K las conductividades térmicas del cobre y la alúmina son k_{cu} = 600 W/m K y k_A = 26 W/m K respectivamente.

Experimentalmente se encuentra que, en condiciones de régimen estacionario, el flujo de calor, es decir, la cantidad de calor por unidad de tiempo y por unidad de área, que pasa a través de una pared plana de espesor ***e*** y coeficiente de conducción térmica ***k***, está dado por:

$$\frac{1}{A}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k\frac{\Delta T}{e}$$

donde $\boldsymbol{\Delta T}$ es la diferencia de temperatura existente entre las caras de la pared de espesor ***e*** y área A.

Obtenga la expresión y calcule:

a) **La temperatura en la interfase entre el cobre y la alúmina.**
b) **La cantidad de calor que por unidad de tiempo atraviesa las dos tapas del cilindro interior.**

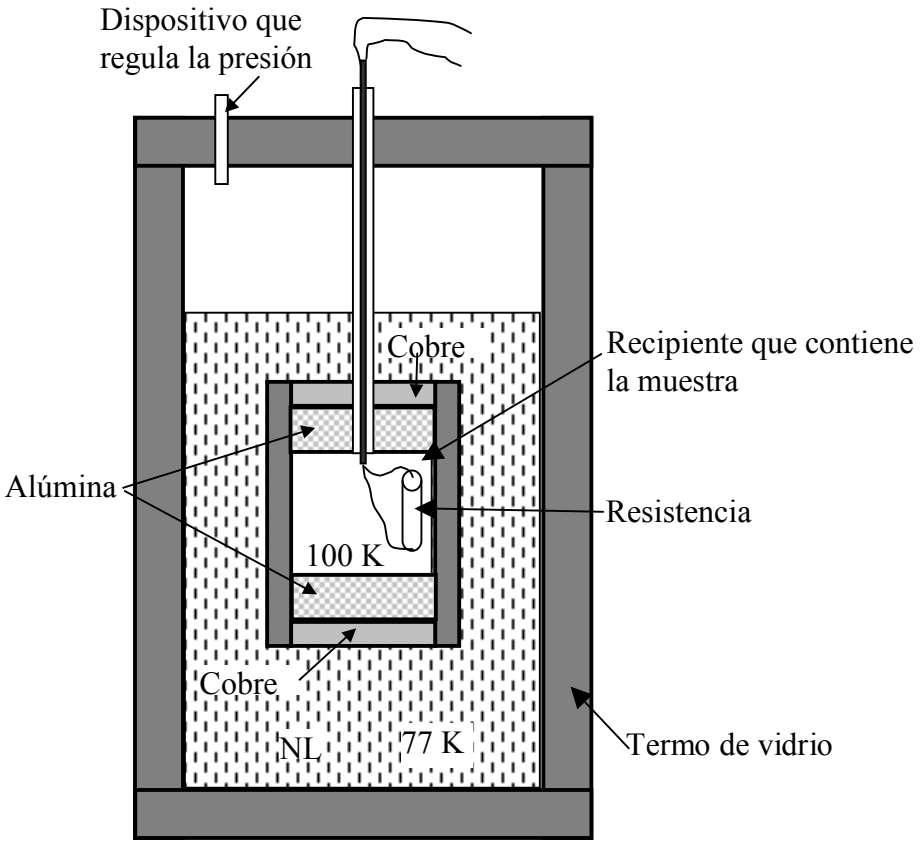


Figura 1

El radio interior del termo que contiene el nitrógeno líquido es de 15 cm. Las paredes y tapa del termo son adiabáticas. En la tapa del termo existe un dispositivo que permite mantener la presión en su interior igual a la atmosférica, p_a.

Obtenga la expresión y calcule:

c) La masa de nitrógeno líquido que se vaporiza por unidad de tiempo.

d) El cambio del nivel de nitrógeno líquido por unidad de tiempo.

e) El número de moles de gas que salen por unidad de tiempo a través del dispositivo.

Otros datos útiles:

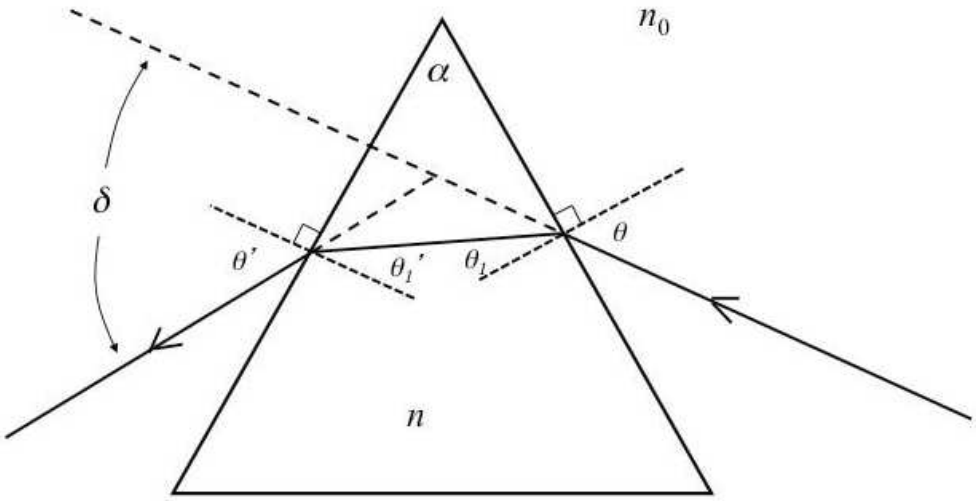
- Temperatura de ebullición del nitrógeno líquido a presión atmosférica es 77 K
- Calor de vaporización del NL: $\lambda_v = 198{,}38$ kJ/kg.
- Densidad del nitrógeno líquido: $\delta_L = 808{,}61$ kg/m^3
- Densidad del nitrógeno gaseoso a 77 K: $\delta_G = 4{,}61$ kg/m^3
- Masa molecular del nitrógeno gaseoso: $m_N = 28{,}01$ g/mol
- Constante de los gases: $R = 8{,}31$ J/mol K
- Presión atmosférica: $p_a = 1{,}01 \times 10^5$ Pa

Problema Experimental

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

Índice de refracción

El propósito del problema es medir el índice de refracción n de un material transparente, así como la dependencia del ángulo del haz emergente como función del ángulo del haz incidente. Dicho material es un prisma triangular hecho de una resina. La física del problema es muy sencilla. Vea la figura.



Un haz de luz (láser) incide sobre una cara del prisma, haciendo un ángulo θ con la normal a la cara. El haz es refractado al entrar al prisma con un ángulo θ_1, subsecuentemente incide sobre la cara adyacente con ángulo θ_1' y finalmente es refractado por dicha cara con ángulo θ'. Llame α al ángulo del vértice del prisma. Denote por δ el ángulo que forma el haz refractado al salir del prisma con la dirección del haz incidente. Considere que el índice de refracción del aire es $n_0 = 1.0$.

Le recordamos que la dependencia entre los ángulos de incidencia y refracción de un haz de luz monocromático al pasar de un medio a otro, con índices de refracción n_1 y n_2 respectivamente, está regida por la Ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = n_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \qquad (1)$$

donde φ_1 y φ_2 son los ángulos respectivos que hace el haz con la normal a la superficie entre los medios.

Como consecuencia de la Ley de Snell y la geometría del sistema compuesto por el prisma y el haz de luz, puede demostrarse que existe una función que relaciona el ángulo δ con el ángulo θ, esto es, $\delta = \delta(\theta)$. Dicha función tiene la propiedad de exhibir un mínimo en un ángulo θ_c. Llame $\delta_{\min}$ a dicho valor, es decir, $\delta_{\min} = \delta(\theta_c)$. Se puede demostrar que al evaluar la función $\delta(\theta)$ en θ_c, $\delta_{\min}$ obedece la siguiente relación:

$$n \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = n_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

ADVERTENCIA: ¡NUNCA MIRE DIRECTAMENTE EL HAZ DEL LASER!

MATERIAL (No tiene que usar necesariamente todo lo que se provee, sólo lo que necesite)

- Prisma
- Láser
- Base de madera
- Pantalla larga de madera
- Pantalla chica de cartón (10 cm x 10 cm)
- Regla con graduación
- Escuadras
- Papel blanco
- Papel milimétrico ó milimetrado
- Tijeras
- Cinta adhesiva
- Lápices
- Sacapuntas
- Goma para borrar
- Calculadora
- Hilo

Debido a las posibles imperfecciones del prisma, asegúrese de que el haz incida siempre sobre la misma cara del prisma.

Procure que el haz incidente lo haga siempre sobre la parte media de la cara del prisma.

Determine siempre los ángulos considerando el centro de la mancha luminosa del haz. Esto permite que la incertidumbre sea en la medida de los ángulos y que el ancho del haz genere sólo a un error sistemático.

TAREA 1. Dibuje un esquema del montaje experimental que le permita determinar los ángulos δ y θ. (3 puntos)

TAREA 2. Determine el índice de refracción *n* del prisma usando la fórmula del ángulo mínimo, ecuación (2). (8 puntos en total)

(2.a) Determine el ángulo α del prisma. (1 punto)
(2.b) Realice mediciones experimentales del ángulo mínimo. Reporte sus datos en forma de tabla. (4 puntos)
(2.c) Calcule las incertidumbres (errores) del ángulo α y del ángulo mínimo δ_{min}. (1.5 puntos)
(2.d) Obtenga el valor del índice de refracción *n* y su incertidumbre. (1.5 puntos)

TAREA 3 Determinación experimental de la dependencia $\delta(\theta)$. (6 puntos total)

(3.a)Realice las mediciones experimentales de parejas de ángulos (δ, θ) suficientes para el objetivo. Reporte sus resultados en forma de tabla.
(3.b) En una hoja de papel milimétrico marque sus puntos experimentales.

TAREA 4 Determinación teórica de la función $\delta = \delta(\theta)$ y comparación con la experimental. (3 puntos)

(4.a) Deduzca una fórmula para la función $\delta = \delta(\theta)$. *Sugerencia:* Use las siguientes relaciones que pueden deducirse de la figura,

$$\delta = \theta + \theta' - \alpha \quad \text{y} \quad \alpha = \theta_1 + \theta_1' \qquad (3)$$

(2 puntos)

(4.b) Reporte los valores de δ calculados para los valores de θ obtenidos en (3.a). En la hoja de papel milimétrico de la pregunta (3.b) incluya sus valores calculados δ para los correspondientes valores de θ. Use los valores del índice de refracción n y del ángulo α obtenidos en la TAREA 2. (1 punto)

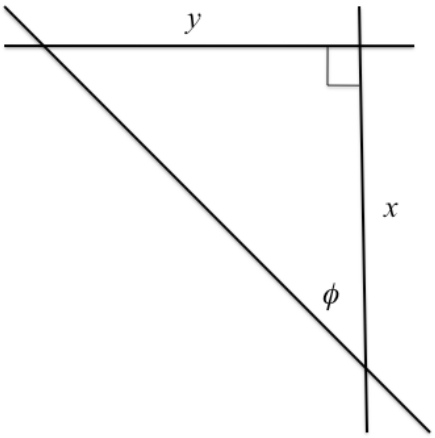
[Hoja de Respuestas] *Problema Experimental*

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

TAREA 1 Use hojas adicionales si así lo requiere. (3 PUNTOS TOTAL)

1. Dibuje un esquema Del montaje experimental que le permita determinar los ángulos δ y θ.

El ángulo se calcula usando $\phi = \arctan\frac{y}{x}$



*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Experimental*

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

TAREA 2 Use hojas adicionales si así lo requiere. (8 PUNTOS TOTAL)

(2.a) Mediciones del ángulo mínimo (EN GRADOS)

δ_{min}
35.6
36.3
36.1
35.6
36.0

(2.b) Medición del ángulo α. Pueden escoger hacer UNA medición cuidadosa y asignarle la incertidumbre proveniente de las medidas de las distancias, o pueden hacer varias mediciones y hallar un promedio.

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

(2.c) Análisis de incertidumbres

Para el ángulo $\delta_{\min}$ calculamos el promedio:

$$\overline{\delta}_{\min} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\delta_i = 35.9$$

La incertidumbre se halla con la desviación cuadrática media:

$$\Delta\delta_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\delta_i - \overline{\delta}_{\min})^2} = 0.3$$

Para el ángulo α usando una medida de distancias, obtenemos

α = 59.8 +- 0.5 grados

Las incertidumbres de ángulos individuales se realizan de la siguiente manera. Como lo que se mide son longitudes *x* y *y* , tales que el ángulo en cuestión es

ϕ = arctan (y/x)

Las longitudes típicas son 100 mm en promedio (o más grandes) y la incertidumbre en la medida es

$\Delta x = \Delta y$ = 1.0 mm

Esto implica que la incertidumbre en el cociente y/x es

$\Delta(y/x) = (\Delta y/x) + y\,\Delta x/x^2$ = 0.02

A su vez, esto nos da una incertidumbre en el ángulo ϕ (suponiendo un ángulo típico de 45º)

$\Delta\phi = \Delta(y/x)\cos^2\phi$ = 0.01 radianes = 0.01 X 180/π = 0.5º

Es decir, la incertidumbre en el ángulo puede ponerse en 0.5 grados para todos los ángulos medidos con esta técnica. Por lo tanto, los ángulos pueden tomarse hasta la primera cifra decimal,e.g. ϕ = 38.7 +- 0.5

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

(2.d) Valor del índice de refracción y su incertidumbre.

Se usa la fórmula del ángulo mínimo

$$n_1 = n_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = 1.487$$

donde se usaron los valores medios de $\delta_{\min}$ y α con $n_0 = 1.0$

Para la incertidumbre usamos la fórmula de la derivada:

$$\Delta n_1 = \frac{\cos\left(\frac{\overline{\delta}_{\min} + \overline{\alpha}}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\overline{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{\overline{\delta}_{\min} + \overline{\alpha}}{2}\right)\cos\frac{\overline{\alpha}}{2}}{\text{sen}^2\frac{\overline{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde

$$\Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\delta)^2 + (\Delta\alpha)^2} \approx 0.005 \text{ radianes}$$

Se obtiene

$$n_1 \approx 1.487 \pm 0.007 \approx 1.49 \pm 0.01$$

$$\alpha \approx 59.8 \pm 0.5 \quad \text{grados}$$

CALIFICACION:

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

TAREA 3 Use hojas adicionales si así lo requiere. (6 PUNTOS TOTAL)

(3.a) Mediciones experimentales de parejas de ángulos (δ, θ). (EN GRADOS)

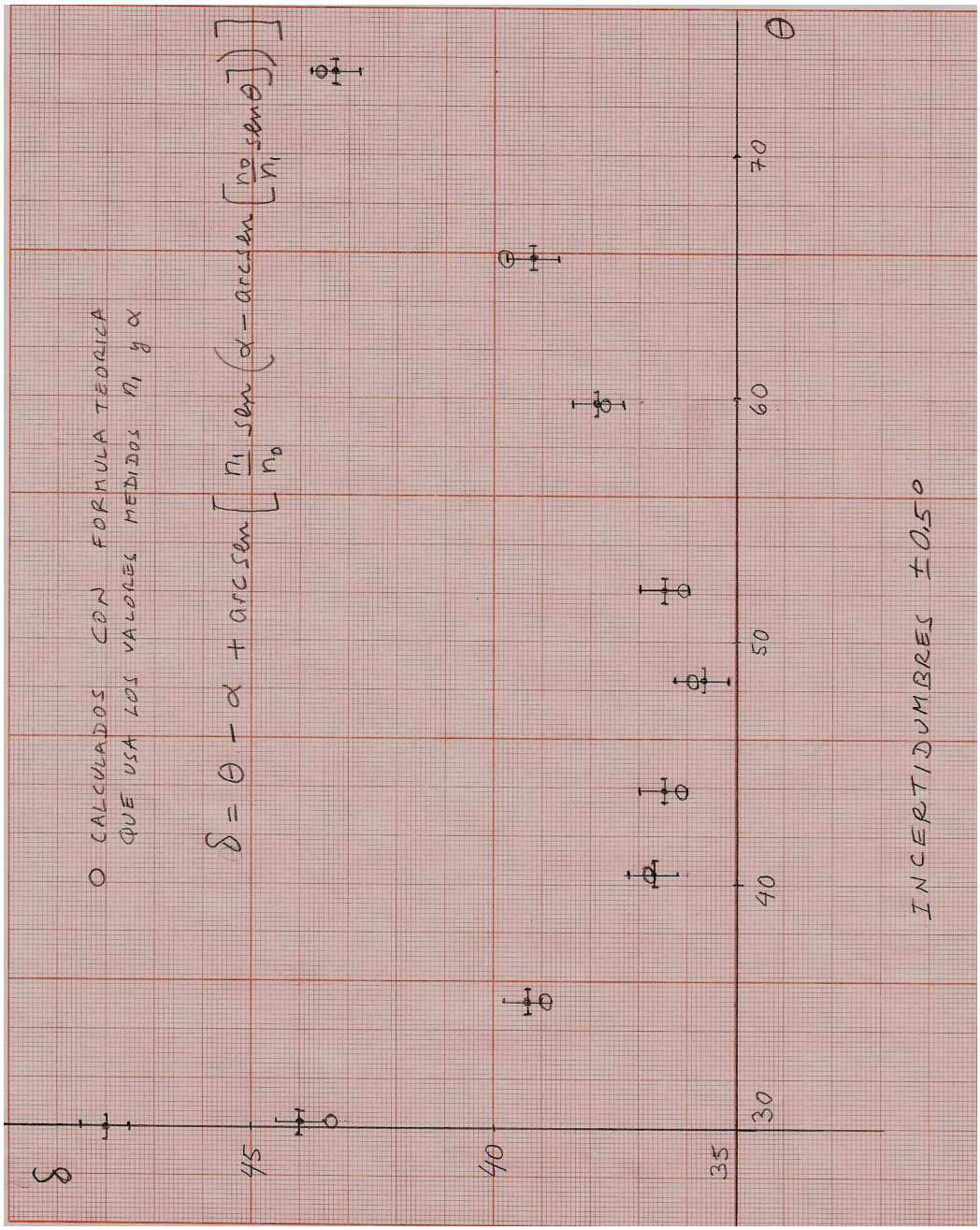
δ	θ
48.0	30.0
44.0	30.2
39.3	35.1
36.7	40.4
36.5	43.9
35.7	48.4
36.5	52.1
37.9	59.8
39.2	65.8
43.3	73.4

(3.b) Las incertidumbres son todas +- 0.5 grados. Ver (2.b)

*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Experimental*

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

(3.c) Gráfica con puntos experimentales y calculados (ver 4.b)



CALIFICACION

*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Experimental*

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

TAREA 4 Use hojas adicionales si así lo requiere. (3 PUNTOS TOTAL)

(4.b) Deducción de la fórmula teórica

De las expresiones $\delta = \theta + \theta' - (\theta_1 + \theta_1')$ y $\alpha = \theta_1 + \theta_1'$

vemos que sólo necesitamos conocer θ'. Usamos la Ley de Snell en cada cara,

$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_0 \text{sen}\theta$ y $n_1 \text{sen}\theta_1' = n_0 \text{sen}\theta'$

despejamos θ' y substituimos en δ

$$\delta = \theta + \text{arcsen}\left\{\frac{n_1}{n_0}\text{sen}\left[\alpha - \text{arcsen}\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\theta\right)\right]\right\} - \alpha$$

(4.b) Cálculo de δ con la fórmula teórica para θ dada de la tabla de (3.a)

δ_{medida}	θ	$\delta_{\text{calculada}}$
48.0	30.0	43.7
44.0	30.2	43.4
39.3	35.1	38.9
36.7	40.4	36.8
36.5	43.9	36.1
35.7	48.4	35.9
36.5	52.1	36.1
37.9	59.8	37.7
39.2	65.8	39.8
43.3	73.4	43.6

Los puntos están en la gráfica (3.c)

(4.c) Con excepción del primer punto, a un ángulo de incidencia muy pequeño,el acuerdo teórico-experimental es muy bueno, dentro del error.

CALIFICACION

Problema Teórico No. 1

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

Rayos en una tormenta eléctrica

Introducción

La fascinación y temor por los fenómenos meteorológicos es un hecho que nos acompaña desde la antigüedad. Los antiguos griegos, por ejemplo, asociaban los rayos con Zeus, su dios más poderoso. Según la mitología nórdica, el dios Thor producía los relámpagos al cortar con su espada las nubes en su lucha contra otros dioses.

Por otro lado, el hecho de que haya tantas tormentas eléctricas en el planeta y que los rayos lleven consigo tanta energía, resultan peligrosos para el hombre. En los Estados Unidos, por ejemplo, mueren unas 100 personas al año a causa del impacto por rayos, siendo el estado de Florida el que presenta un mayor número de casos, con un número mayor de muertes al causado por los huracanes y tornados combinados.

El rayo corresponde a una descarga eléctrica en la atmósfera, que se produce entre una nube y la superficie, o entre dos nubes. El aire, desde el punto de vista eléctrico es un buen aislante. Sin embargo, cuando la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos supera un cierto valor límite, en torno a los 30000 V para una distancia aproximada de 1 cm, se produce la ruptura dieléctrica de éste, haciendo que el aire sea conductor eléctrico y se produzca una masiva descarga eléctrica en la forma de un chispazo.



En su trayectoria, el rayo transporta corrientes eléctricas que pueden llegar a varios miles de amperios durante milésimas de segundo con potenciales que se han llegado a estimar en valores que sobrepasaban los 15 millones de voltios. En el hogar, las intensidades eléctricas están en torno a unos cuantos amperios con voltajes de entre 110 y 220 V.

El paso brusco de los electrones por la atmósfera ioniza a las moléculas de aire que, al regresar a su estado normal, producen la luz que se conoce como relámpago. El aumento de temperatura (hasta un valor cercano a 30000 °C) en la zona por donde pasa la descarga y el brusco aumento de presión debido al

calentamiento producen las ondas de sonido que constituyen el trueno. La velocidad de propagación del sonido en el aire es del orden de 1200 km/h, de modo que el tiempo transcurrido entre el avistamiento del relámpago y el trueno permite estimar la distancia del observador al punto de ocurrencia del rayo.

La forma en que modelan los físicos e ingenieros a los rayos en la atmósfera que caen sobre la tierra, es considerando a las nubes y a la tierra como un gran condensador (capacitor) de placas paralelas que se descarga directamente a través del aire, produciendo un gran chispazo.

Problema*:*

Parte I: Antecedentes de laboratorio.

En un laboratorio de física se obtuvo que el voltaje necesario para producir la chispa a través del aire, en un condensador de placas paralelas de área 3.5×10^{-3} m² (35 cm²), como función de la distancia no varía linealmente. Los resultados se grafican en la figura 1 donde se muestran los puntos experimentales y la línea continua que ajusta a los puntos experimentales con la curva $V = m\left(\frac{d}{d_0}\right)^{\alpha}$, donde m = 5140.0 V, α = 0.75, $d_0 = 10^{-3}$ m.

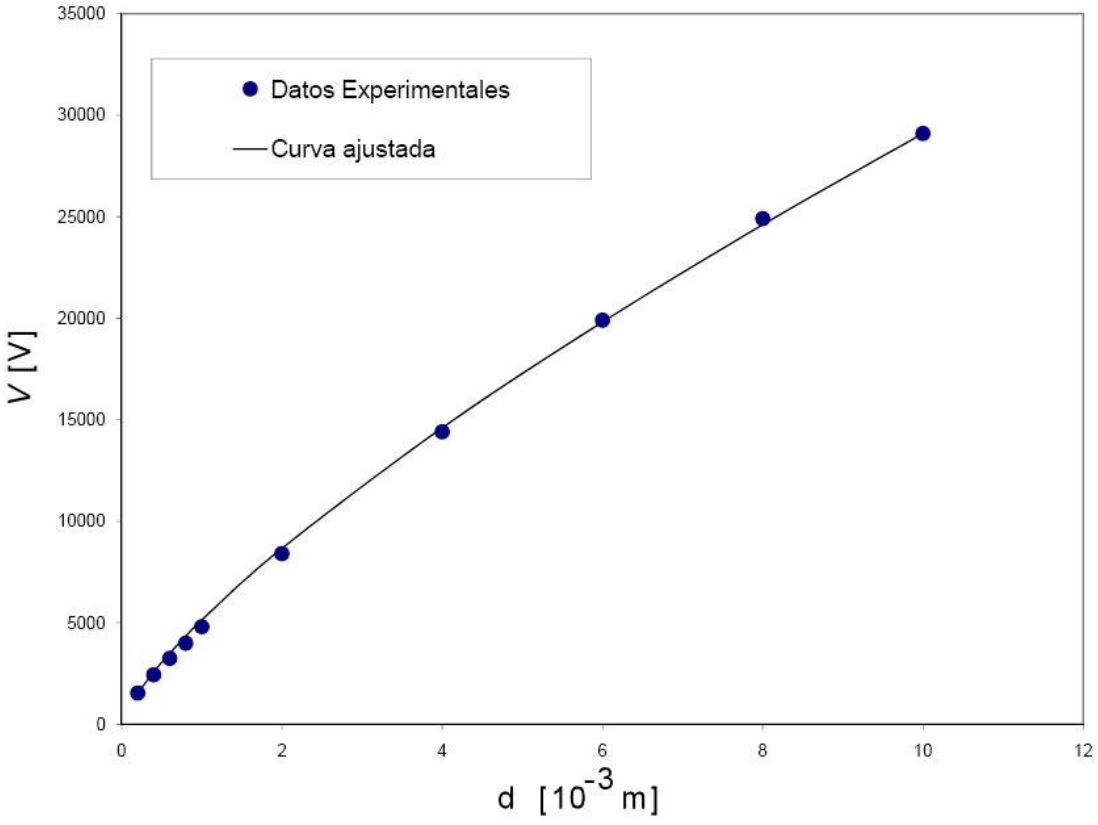


Figura 1. Rompimiento en un condensador

Para la distancia $d = 1 \times 10^{-2}$ m:

(I.a) Calcule la carga y densidad superficial de carga sobre una de las placas para el instante antes de que ocurra el chispazo. [1.0 punto]

(I.b) ¿Cuánto vale el campo eléctrico entre las placas en ese instante? [1.0 punto]

(I.c) Calcule la energía disipada en la descarga del condensador. [1.0 punto]

(I.d) Calcule la fuerza entre las placas. [1.0 punto]

(I.e) Calcule la corriente eléctrica involucrada al paso de electrones de una placa a otra, suponiendo que la descarga ocurre en $1\times10^{-4}\,\mathrm{s}$. [1.0 punto]

Parte II: Rayos de una nube típica en una tormenta

Una nube típica que produce rayos es la conocida como *Cumulonimbus* que puede tener una base de 4 km de diámetro, y estar a una altura de 2 km sobre la superficie. Esta nube tiene un crecimiento vertical muy grande que puede alcanzar varios kilómetros desde su base. Un tiempo típico para la duración de la descarga de un rayo, desde esa altura, es de 10 milésimas de segundo.

Usando el modelo anterior de condensador de placas paralelas para un rayo que sale de esta nube y cae sobre la tierra:

(II.a) Calcule la diferencia de potencial entre la nube y la tierra para que se produzca el rayo.
[1.0 punto]

(II.b) Calcule la corriente eléctrica involucrada en el rayo. [0.5 punto]

(II.c) ¿Cuál es la cantidad de electrones para dar una corriente equivalente? [1.0 punto]

(II.d) En la literatura de divulgación sobre los rayos, se encuentran aseveraciones como que la energía involucrada en el rayo es tal que podría iluminar a una ciudad de tamaño medio durante un año.

Suponiendo que una ciudad de tamaño medio utiliza aproximadamente 2000 GWh para su iluminación durante 1 año, ¿es cierta la aseveración? Calcule la energía involucrada en el rayo para justificar su respuesta.
[1.0 punto]

(II.e) El consumo mundial de energía al año es de 10^{21} J. Suponiendo que caen a la tierra 100 rayos por segundo, calcule la energía involucrada en las tormentas de rayos en un año. ¿Qué porcentaje del consumo mundial de energía podría sustituirse por esta fuente alternativa de energía?
[0.5 punto]

(II.f) Considere que un 50% de la energía que libera el rayo se disipa en la trayectoria en forma de calor. Suponga que la trayectoria fuese un cilindro recto de 0.1 m de diámetro. El calor específico del aire puede considerarse como constante. Calcule el aumento de temperatura en el aire en esa zona suponiendo que el volumen es constante.
[1.0 punto]

Calor específico del aire: 1214 J/m³ K.

$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$

$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$

Rayos en una tormenta eléctrica

Parte I: Antecedentes de laboratorio.

Usando la formula $V = md^{\alpha}$, con m = 5140.0 V, α = 0.75 para una distancia d = 10 mm (1 cm), da el voltaje V = 28900 = 2.9 x 10^3 V.

La capacitancia C de un capacitor de placas planas paralelas es $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ con $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ la constante de permitividad, d la separación entre las placas, A el área de las placas.
Por otro lado, se tiene que $q = CV$ donde q es la carga del capacitor y V la diferencia de potencial.

RESPUESTA VALOR CALIF.

(I.a) La carga y densidad superficial de carga son:

	1.0	

(I.b) El campo eléctrico entre las placas es:

	1.0	

(I.c) La energía disipada en la descarga es:

	1.0	

(I.d) La fuerza entre las placas es:

	1.0	

(I.e) La corriente entre una placa y la otra:

	1.0	

Parte II: Rayos de una nube típica en una tormenta

(II.a) La diferencia de potencial es:

	0.5	

(II.b) La corriente eléctrica involucrada es:

	1.0	

(II.c) La cantidad de electrones es:

	0.5	

(II.d) La energía involucrada en el rayo es:

	1.0	

(II.e) El porcentaje de energía es:

	1.0	

(II.f) El aumento de temperatura es:.

	1.0	

*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Teórico No. 1*

Rayos en una tormenta eléctrica

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

Parte I: Antecedentes de laboratorio.

Usando la formula $V = md^{\alpha}$, con $m = 5140.0$ *V*, $\alpha = 0.75$ para una distancia $d = 10$ *mm* (1 *cm*), da el voltaje $V = 29100$ *Voltios.*

La capacitancia *C* de un capacitor de placas planas paralelas es $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ con

$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$ la constante de permitividad, *d* la separación entre las placas, *A* el área de las placas.

Por otro lado, se tiene que $q = CV$ donde *q* es la carga del capacitor y *V* la diferencia de potencial.

RESPUESTA VALOR CALIF.

En el instante antes del chispazo:

(I.a) La carga y densidad superficial de carga son $q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} V = 9.0 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$ y $\sigma = \frac{q}{A} = 2.6 \times 10^{-5}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$	1.0	

(I.b) El campo eléctrico en un capacitor de placas planas paralelas es $E = \frac{V}{d} = 2.9 \times 10^{6} Vm^{-1}$	1.0	

(I.c) La energía almacenada en el capacitor es $U = \frac{1}{2} CV^{2} = 1.3 \times 10^{-3} J$	1.0	

(I.d) La fuerza entre las placas es $F = -\frac{dU}{dd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{AV^{2}}{d^{2}} = 0.13\,N$	1.0	

(I.e) La corriente entre una placa y la otra al descargarse completamente en 0.1 milésimas de segundo es $I = \frac{q}{t} = 9.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$	1.0	

Parte II: Rayos de una nube típica en una tormenta

(II.a) Usando la formula $V = md^{\alpha}$, con $m = 5140.0$ *V*, $\alpha = 0.75$ para cuando la distancia es $d = 2$ *km*, da el voltaje $V = 2.7 \times 10^8$ *V*.	1.0	
(II.b) La carga almacenada en las nubes, suponiendo que es un capacitor de placas paralelas, de sección transversal circular es, $q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} V = 15.6\ C$ donde se uso $A = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = 1.3 \times 10^7 \text{ m}^2$, con $D = 2$ *km* el diámetro de la nube. Usando 0.01 segundos como tiempo de descarga, la corriente es $I = \frac{q}{t} = 1.4 \times 10^3 A$	0.5	
(II.c) Como la carga de un electrón es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ *C*, el número de electrones es $n = q/e = 9.7 \times 10^{19}$, donde se usó $q = 15.6$ *C*.	1.0	
(II.d) La energía liberada por el rayo es $U = \frac{1}{2} C V^2 = 2.1 \times 10^9 J$ donde se usó $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 5.8 \times 10^{-8} F$. En un año una ciudad consume de energía $2000\ GWh = 2000 \times 10^9 \times 3600 = 7.2 \times 10^{15} J$ que es 6 órdenes de magnitud mayor que la energía de un rayo.	1.0	
(II.e) Suponiendo que 100 rayos caen cada segundo, usando el resultado de (II.d), la cantidad de energía que se obtendría en un año es $2.1 \times 10^9 J \times 100 \times 3600 \times 24 \times 365 = 6.6 \times 10^{18} J$, que es como una centésima del consumo mundial	0.5	
(II.f) Del concepto de calor específico se tiene que $c \Delta V = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ donde *c* es el calor específico, ΔV es el volumen de la cuerpo, ΔQ es el calor suministrado y ΔT el cambio de temperatura resultante. Considerando $\Delta Q = 0.5U$, con *U* dada en el inciso (II.d), $\Delta V = \pi(0.1m/2)^2(2000m) = 1.6 \times 10^1 m^3$ el volumen del aire calentado, se obtiene $\Delta T = 5.4 \times 10^4$ °*C*.	1.0	

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

Problema Teórico No. 2

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

¿Cuánta energía tienen y de qué tan lejos provienen los Rayos Cósmicos Ultraenergéticos?

Introducción:

El proyecto Auger es una colaboración internacional que busca entender a los rayos cósmicos ultraenergéticos, partículas que viajan por el espacio a velocidades muy cercanas a la de la luz. Estas partículas se detectan indirectamente, por los chubascos (lluvias) de otras partículas y de fotones que se producen al llegar a la parte alta de nuestra atmósfera y chocar con las moléculas del aire ahí existentes (ver Figura 2.1). Sus energías son de muchos órdenes de magnitud mayores que las de las partículas más energéticas creadas en los aceleradores terrestres y existe gran interés en comprender cómo se aceleran a estas velocidades tan cercanas a las de la luz y de qué cuerpos cósmicos provienen.

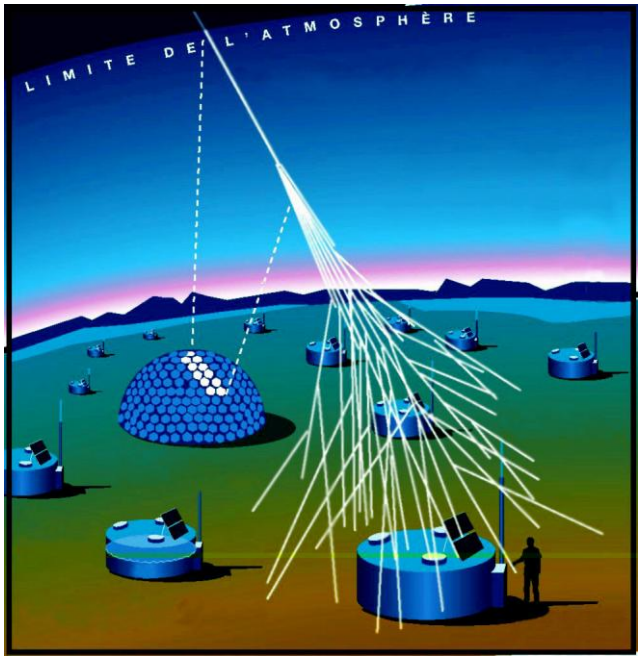


Fig. 2.1 Diagrama artístico del proyecto Auger, en construcción en Argentina.

Se sabe que los rayos cósmicos por encima de cierto umbral de energía NO pueden provenir de cuerpos cósmicos muy remotos. Esto se debe a que por encima de una cierta energía (conocida como el “corte” GZK por las iniciales de los físicos que predijeron este efecto en 1966), estos rayos

cósmicos ultraenergéticos pueden chocar con fotones de la radiación cósmica de fondo, perdiendo parte de su energía al crear nuevas partículas. En otras palabras, en estas colisiones dejan de ser ultraenergéticos.

En este problema calculamos cuál es el umbral de energía para que los rayos cósmicos puedan tener estas colisiones que los degradan a menores energías y la distancia que pueden recorrer como ultraenergéticos, antes de sufrir una de estas colisiones.

Problema:

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

La radiación cósmica de fondo es una energía en forma de fotones que llena el espacio y se produjo cuando el Universo era muy joven. Su intensidad como función de la longitud de onda del fotón se ajusta a un cuerpo negro con temperatura T de 2.7 K. La radiación de cuerpo negro tiene la propiedad, descrita por la ley de desplazamiento de Wien, en la cual su máximo de emisión ocurre a una longitud de onda $\lambda_{\max}$ inversamente proporcional a la temperatura:

$$\lambda_{\max} = \frac{0.0029}{T},$$

donde $\lambda_{\max}$ está en metros y T en Kelvin.

(I.a) Suponga que los fotones de $\lambda_{\max}$ son típicos de la radiación de cuerpo negro de fondo y calcule esta longitud de onda.

[0.3 puntos]

(I.b) Calcule la energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo. La constante de Planck es $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s y la velocidad de la luz es $c = 3.0 \times 10^{8}$ m s^{-1}.

[0.7 puntos]

Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

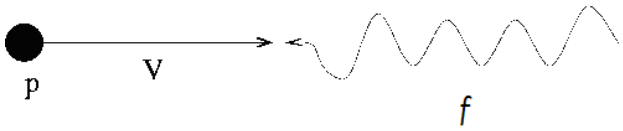
Por simplicidad suponga que el proceso de pérdida de energía es debido a que un protón *(p)* colisiona de frente con uno de los fotones *(f)* de la radiación cósmica de fondo, resultando de esta colisión el protón más un pión neutro *(π^0)*:

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

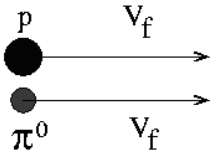
$$p + f \rightarrow p + \pi^0$$

Las situaciones inicial y final se muestran en la siguiente figura:

SITUACION INICIAL:



SITUACION FINAL:



La velocidad inicial del protón es V y su momento es $\gamma m_p V$, donde $\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Las masas de las partículas son:

$$m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\pi^0} = 2.4 \times 10^{-28} \text{ kg}$$

Suponga que el problema es en una sola dimensión y que el protón y el pión neutro se mueven con la misma velocidad V_f después de la colisión. Se trata de determinar cuál es la energía mínima que debe de tener el protón para lograr producir al pión neutro.

(II.a) Escriba las ecuaciones que rigen la colisión.

[2.0 puntos]

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

(II.b) Determine la energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma\, m_p\, c^2$. Dado que $V \approx c$, puede usar la aproximación $1 + \frac{V}{c} \approx 2$.

[3.0 puntos]

(II.c) Encuentre el valor de la energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts. Para esto necesita saber que $1\,\mathrm{J} = 6.2 \times 10^{18}\ \mathrm{eV}$. Los protones a ésta y mayores energías son considerados ultraenergéticos porque pueden producir partículas al chocar con los fotones de la radiación cósmica de fondo.

[1.0 puntos]

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía (la energía en fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo está dada por:

$$u_E = a\,T^4$$

donde $a = 7.6 \times 10^{-16}\ \mathrm{J\ m^{-3}\ K^{-4}}$ es la constante de radiación. Calcule la densidad de energía de la radiación cósmica de fondo.

[0.3 puntos]

(III.b) Determine la densidad de fotones u_f (el número de fotones por unidad de volumen) de la radiación cósmica de fondo.

[1.0 puntos]

(III.c) La sección eficaz para estas colisiones entre protones y fotones es $\sigma = 2.0 \times 10^{-32}\,\mathrm{m^2}$. El camino libre medio está definido como la distancia promedio que recorre una partícula entre una colisión y la siguiente y puede estimarse como la altura de un cilindro que tiene como base la sección eficaz de colisión y que contiene a un fotón en su volumen. Los protones ultraenergéticos no pueden viajar distancias mucho más grandes que este camino libre medio sin perder energía y dejar de ser ultraenergéticos.

Estime el camino libre medio l, de un protón antes de sufrir una colisión con un fotón.

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

[1.2 puntos]

(III.d) Los cuásares son objetos cósmicos que tienen fenómenos de altas energías y que podrían ser responsables de la producción de los rayos cósmicos ultraenergéticos. Los cuásares son objetos lejanos, el más cercano está a una distancia de 2.0×10^{25} m . ¿Pueden los rayos cósmicos ultraenergéticos provenir de los cuásares o no? ¿Por qué?

[0.5 puntos]

J = Joule = Julio
K = grado Kelvin

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

¿Cuánta energía tienen y de qué tan lejos provienen los Rayos Cósmicos Ultraenergéticos?

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

(I.a) La longitud de onda λ_{max} de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

RESPUESTA	VALOR	CALIF.
	0.3	

(I.b) La energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

	0.7	

Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

(II.a) Las ecuaciones que rigen la colisión son:

	2.0	

(II.b) La energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma\, m_p\, c^2$, es

	3.0	

(II.c) La energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts es:

Folio:	Número de Página:	Total de Páginas:

	1.0	

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía de la radiación cósmica de fondo es:

	0.3	

(III.b) La densidad de fotones de la radiación cósmica de fondo es:

	1.0	

(III.c) El camino libre medio para una colisión es:

	1.2	

(III.d) Comparación entre el camino libre medio y la distancia a los cuerpos lejanos en el Universo:

	0.5	

*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Teórico No. 2*

¿Cuánta energía tienen y de qué tan lejos provienen los Rayos Cósmicos Ultraenergéticos?

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

Parte I: Características de los fotones de la radiación cósmica de fondo.

(I.a) La longitud de onda de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

RESPUESTA	VALOR	CALIF.
$\lambda_{\max} = \frac{0.0029}{T} = 0.0011 \ \ m$	0.3	

(I.b) La energía de un fotón típico de la radiación cósmica de fondo es:

$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda_{\max}} = 1.8 \times 10^{-22} \ J$	0.7	

Parte II: Colisiones entre protones ultraenergéticos y fotones de la radiación cósmica de fondo.

(II.a) (II.a) Las ecuaciones que rigen la colisión son:

$\gamma m_p V - h\frac{\nu}{c} = \gamma_f \left(m_p + m_{\pi^0}\right) V_f$ $\gamma m_p c^2 + h\nu = \gamma_f \left(m_p + m_{\pi^0}\right) c^2$	2.0	

(II.b) La energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma \, m_p \, c^2$, es

Primero se multiplica por *c* la ecuación de conservación de momento:

$$\gamma \, m_p V c - h\nu = \gamma_f \, (m_p + m_{\pi^0}) \, V_f \, c$$

y luego se eleva al cuadrado:

$$(\gamma m_p V c)^2 - 2\gamma m_p V c h\nu + (h\nu)^2 = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) V_f c]^2$$

Se eleva al cuadrado la ecuación de conservación de energía:

$$(\gamma m_p c^2)^2 + 2\gamma m_p c^2 h\nu + (h\nu)^2 = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2$$

A esta última ecuación se le resta la anterior, de modo que queda:

$$(\gamma m_p c^2)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + 2\gamma m_p c^2 h\nu \left(1 + \frac{V}{c}\right) = [\gamma_f (m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2 \left(1 - \frac{V_f^2}{c^2}\right)$$

Como

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1$$

y

$$\gamma_f^2 \left(1 - \frac{V_f^2}{c^2}\right) = 1$$

y podemos tomar

$$\left(1 + \frac{V}{c}\right) \approx 2$$

Nos queda que:

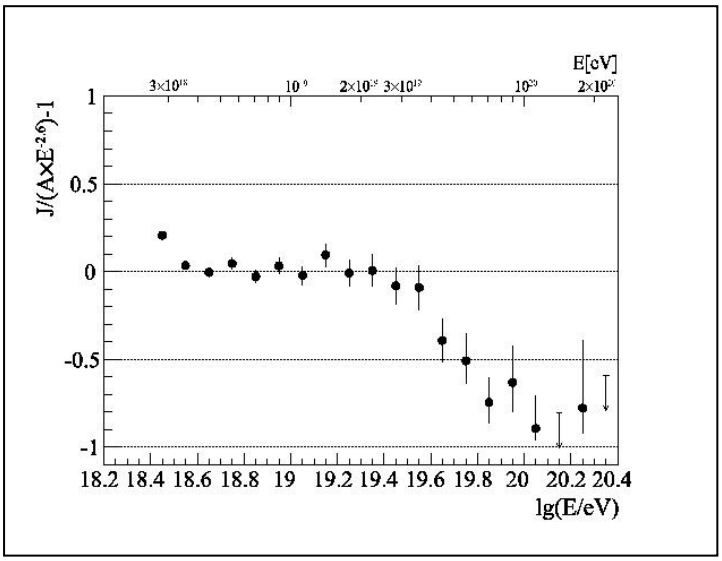
$$(m_p c^2)^2 + 4\gamma m_p c^2 h\nu = [(m_p + m_{\pi^0}) c^2]^2$$

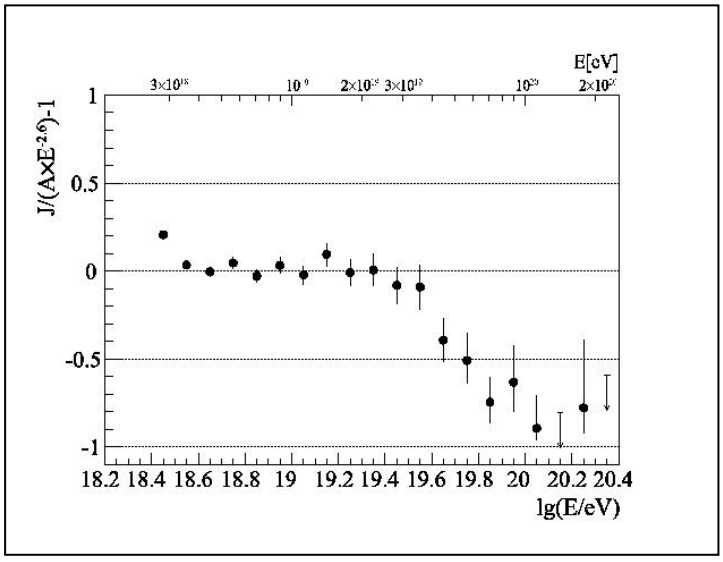
$$\gamma m_p c^2 = \frac{c^4 [(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2]}{4h\nu}$$

de donde

$\gamma m_p c^2 = 9.7\ J = 6.0 \times 10^{19}\ eV$

Este "corte" en el espectro de energía de los rayos cósmicos ha sido observado primero por el proyecto HiRes y luego por Auger, como se muestra en la siguiente figura:





Espectro de energías de los rayos cósmicos mostrando el corte GZK. Datos del proyecto Auger.

Entonces, la fórmula de la energía inicial del protón ultraenergético, $\gamma m_p c^2$ es:

$\gamma m_p c^2 = \dfrac{c^4 \left[\left(m_p + m_{\pi^0} \right)^2 - m_p^2 \right]}{4 h \nu}$	3.0	

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

(II.d) La energía inicial del protón ultraenergético en Joules y en electronVolts es:

$\gamma m_p c^2 = 9.8\ J = 6.1 \times 10^{19}\ eV$	1.0	

Parte III: Camino libre medio para una colisión

(III.a) La densidad de energía de la radiación cósmica de fondo es:

$u_E = a T^4 = 4.0 \times 10^{-14}\ J\ m^{-3}$	0.3	

(III.b) Es importante darse cuenta de que la densidad de fotones será aproximadamente igual a la densidad de energía sobre la energía típica de un fotón. La densidad de fotones de la radiación cósmica de fondo es:

$u_f = \frac{u_E}{h\nu} = 2.2 \times 10^8\ \ fotones\ \ m^{-3}$	1.0	

(III.c) El camino libre medio para una colisión es:

$l = \frac{1}{u_f\ \sigma} = 2.3 \times 10^{23}\ m$	1.2	

(III.d) Comparación entre el camino libre medio y la distancia a los cuerpos lejanos en el Universo:

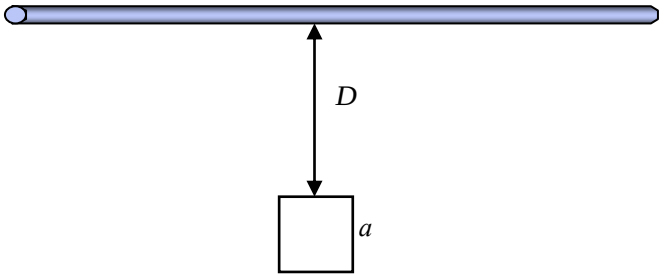
Como el camino libre medio para una colisión es mucho más corto que la distancia a los cuásares más cercanos, los rayos cósmicos ultraenergéticos tienen que provenir de objetos distintos, relativamente cercanos.	0.5	

Problema Teórico No. 3

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

Levitación de una espira (loop) conductora

En un alambre largo horizontal circula una corriente I que decrece con el tiempo. Una espira conductora es suspendida durante un intervalo de tiempo Δt pequeño. En ese intervalo la espira se mantiene en equilibrio. La espira se encuentra en un plano vertical a una distancia D por debajo del alambre, como se muestra en la figura. La espira es un cuadrado de lado a, masa m y resistencia R. La distancia D es mucho mayor que a. Desprecie la autoinductancia de la espira.



a) Haga un diagrama del sistema indicando claramente las corrientes, campos magnéticos y fuerzas involucradas.

[1.0 punto]

b) Haciendo las aproximaciones que considere oportunas, encuentre la corriente inducida en la espira en función de $\Delta I / \Delta t$.

[3.0 puntos]

c) Encuentre la fuerza magnética neta sobre la espira, indicando su magnitud (módulo), dirección y sentido.

[3.0 puntos]

Sugerencia: $\dfrac{1}{(1+x)^n} \approx 1 - nx$

d) Calcule la condición que debe satisfacer el producto $I\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ en función de las cantidades dadas y constantes electromagnéticas, para que la espira se mantenga levitando. Sea muy cuidadoso con los signos de las cantidades involucradas.

[3.0 puntos]

*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Teórico No. 3*

Levitación de una espira conductora

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

RESPUESTA	VALOR	CALIF.
a) Diagrama del sistema	1.0	

b) La corriente inducida en la espira	3.0	

c)	3.0	

d)	3.0	

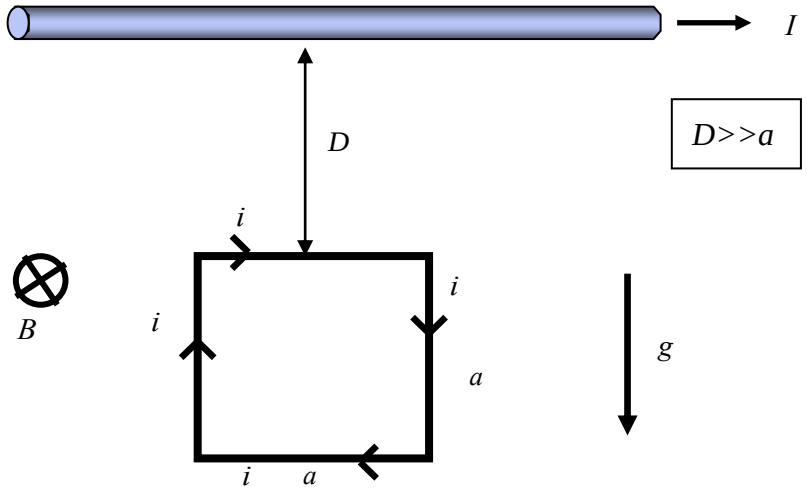
*[**Hoja de Respuestas**]* *Problema Teórico No. 3*

Levitación de una espira conductora

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:

RESPUESTA VALOR CALIF.

a) Diagrama del sistema	1.0	



El campo B a una distancia r del alambre (Ley de Ampere)

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

El flujo a través de la espira puede calcularse suponiendo que el campo es uniforme sobre la espira, debido a $D>>a$.

$$\Phi \approx Ba^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} a^2$$

La fuerza electromotriz inducida en el intervalo pequeño Δt (Ley de Faraday)

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{\mu_0 a^2}{2\pi D}\frac{\Delta I}{\Delta t} > 0$$

pero $\varepsilon = iR$ (Ley de Ohm) con i la corriente en la espira

b) La corriente inducida en la espira $i = -\frac{\mu_0 a^2}{2\pi RD}\frac{\Delta I}{\Delta t} > 0$	3.0	

La fuerza magnética entre dos alambres de longitud l separados por una distancia d es

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2 l}{d}$$

La fuerza es atractiva si las corrientes son paralelas y repulsiva si son antiparalelas. La fuerza es cero si las corrientes son perpendculares.

Por lo tanto solo existe fuerza magnetica sobre los segmentos paralelos al alambre con corriente I.

La fuerza total apunta en la dirección contraria a la gravedad y es:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{aiI}{D} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{aiI}{D-a} \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{aiI}{D}\left(1 - \left[1 - \frac{a}{D}\right]\right) = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 \frac{a^4}{RD^3} I \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

c) La fuerza magnética tiene magnitud $F = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 \frac{a^4}{RD^3} I \frac{\Delta I}{\Delta t}$ y apunta hacia ¨arriba¨ es decir hacia el alambre	3.0	

La fuerza magnética debe ser balanceada por el peso mg de la espira para que ésta mantenga levitando. Igualando dichas fuerzas se obtiene la condición requerida sobre la corriente I:

$mg = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2 \frac{a^4}{RD^3} I \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow I \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\left(\frac{2\pi}{\mu_0}\right)^2 Rmg \frac{D^3}{a^4} < 0$	3.0	

XIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA
PRUEBA EXPERIMENTAL

El Péndulo Bifilar

Objetivo del experimento

Determinar la relación funcional del péndulo bifilar, con el largo de los hilos y la distancia entre los hilos que lo sostienen.

Introducción

Un péndulo bifilar está constituido por una barra cilíndrica homogénea suspendida en posición horizontal, por dos hilos inextensibles de igual longitud L. Los hilos sostienen la barra desde puntos equidistantes del punto medio de la barra (ver figura 1).

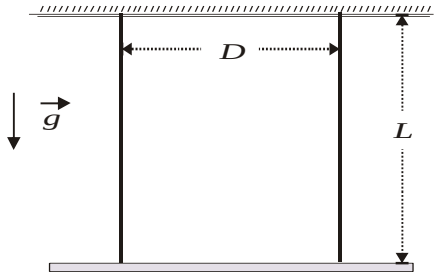


Figura 1

Se estudiarán las oscilaciones de torsión del péndulo, esto es, donde la barra tiene un movimiento oscilatorio en el plano horizontal. Las oscilaciones deben ser pequeñas (ángulos φ y γ pequeños, ver figura 2).

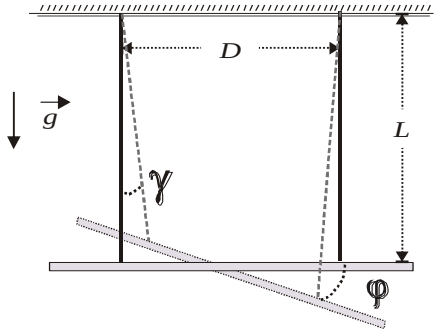


Figura 2

El periodo T, del péndulo bifilar para oscilaciones pequeñas es una función tanto del largo de las cuerdas L, como de la distancia entre ellas D, de la forma

$$T = kL^{\alpha} D^{\beta}$$

donde k, α y β son constantes.

Materiales

Una barra de acero de 30 cm con marcas
Una cinta métrica
Hilo
Una regla de 30 cm
Una nuez de conexión
Una barra larga metálica
4 argollas metálicas
Un soporte
Un cronómetro
Una calculadora
Papel milimetrado
Papel logarítmico
Papel Blanco
Una tijera

Procedimiento

1. Con los materiales que le han sido entregados, arme el montaje de la figura 1 para establecer el péndulo bifilar, cuidando que las cuerdas permanezcan siempre paralelas y equidistantes al centro de la barra.
   Precaución: cuando mueva el péndulo, desviando la varilla un pequeño ángulo φ, el centro de ella debe permanecer en reposo, esto es, la simetría debe mantenerse.
2. Manteniendo el largo *L*, de las cuerdas constante, construya una tabla de datos, del periodo *T* de oscilación y la distancia *D*, entre las cuerdas.
3. Grafique los valores de la tabla de valores obtenida en el punto 2 y obtenga β.
4. Manteniendo constante la distancia entre los hilos construya una tabla de datos, del periodo *T* de oscilación y del largo de los hilos, *L*.
5. Grafique los datos de la tabla de valores obtenida en el punto 4 y obtenga α.
6. A partir de la información obtenida en los puntos anteriores determine la constante *k*.

Presente los resultados con sus respectivas incertidumbres

XIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA, CHILE 2009

Teórico 1: Agujero negro Newtoniano

(a) Encuentre la velocidad mínima necesaria para que un proyectil disparado desde la Tierra se aleje infinitamente de ella (*velocidad de escape*), como función del radio de la Tierra (R_T) y la aceleración de gravedad en su superficie (g). Desprecie el roce con el aire y el movimiento de la Tierra. (3 puntos)
Utilice R_T =6 400 km, g=10 m s^{-2}.

(b) Usando la mecánica de Newton, en la segunda mitad del siglo XVIII se calculó el radio que debería tener una estrella para que la velocidad de escape desde su superficie sea igual (o superior) a la velocidad de la luz. Encuentre el radio de esa hipotética estrella si tuviera la misma masa que la Tierra. (3 puntos)

Teórico 2: Desintegración del 226Ra

El radio es un elemento radiactivo cuyo núcleo está formado por 88 protones. Su isótopo más estable es radio-226, el cual se desintegra en radón-222 y una partícula alfa (helio-4):

$$^{226}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}\mathrm{Rn} + {}^{4}\mathrm{He}$$

Estando un núcleo de radio inicialmente en reposo, la suma de las energías cinéticas de los productos de su desintegración es 4,87 MeV.

Considere una muestra de 1 gramo de radio-226 puro en el interior de una botella de material inerte y herméticamente cerrada. La cantidad aproximada de átomos de radio corresponde así a $(6/226) \times 10^{23}$ átomos.

Para efectos de este problema considere que las masas de radón-222 y helio-4 son $222u$ y $4u$, respectivamente, con $1u = 931\ \mathrm{MeV}/c^2$.

(a) Considerando que las velocidades involucradas son no relativistas, determine la energía cinética de la partícula alfa en un evento de desintegración de radio-226. Exprese su resultado en MeV. (3 puntos)

(b) La semivida del radio-226 es de 1 600 años. Esto significa que transcurrido ese lapso, sólo la mitad de isótopos de radio-226 quedan en la muestra. Determine la energía liberada dentro de la botella por el decaimiento de radio-226 durante 1 día. (3 puntos)

(c) Calcule el aumento de temperatura que tendría un litro de agua si se utilizara la energía calculada en la parte (b) para calentarla. El calor específico del agua es 4,2 J/gK. (2 puntos)

En este problema le pudieran resultar útiles las siguientes aproximaciones:

ln 2 0, 69; $e^b \sim 1 + b$ para $|b| < 0, 1$. Además, $1\ \mathrm{MeV} = 1, 6 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$

Teórico 3: La cadena y la balanza

Una cadena unidimensional homogénea de longitud L y masa M es sostenida desde uno de sus extremos, y con el otro extremo a punto de tocar la superficie de una balanza. La cadena se mantiene estirada e inmóvil. Súbitamente se suelta y cae verticalmente sobre la balanza.

(a) Determine la tensión en cada punto de la cadena **antes de soltarla**. Exprese su respuesta en términos de la distancia z medida desde el extremo inferior de la cadena hacia arriba. (2 puntos)

(b) Determine asimismo la tensión en los distintos puntos de la cadena **inmediatamente después de soltarla**. (2 puntos)

c) Determine y grafique la fuerza registrada por la balanza en función del tiempo, suponiendo que los eslabones no rebotan y despreciando el desplazamiento del plato de la balanza. Considere el registro tanto durante la caída de la cadena, como después que ésta se ha depositado totalmente sobre el plato. (4 puntos)

Destaque en el gráfico los puntos más significativos. Determine las expresiones algebraicas que permiten calcular los respectivos valores.

Teórico 4: El sol como fuente de energía

La potencia total radiada por la superficie del Sol es aproximadamente 4×10^{26} W y el tiempo que tarda en llegar su luz a la tierra es de 500 segundos. Consideraremos el caso especial de un día de equinoccio* en un lugar ubicado en el ecuador terrestre.

(a) Calcule la intensidad (potencia por unidad de área) de la radiación solar al llegar a la órbita terrestre. (2 puntos)

(b) La luz del sol pierde aproximadamente un 50% de la energía en la atmósfera terrestre hasta llegar a su superficie, pérdida que se supone constante en el tiempo (¡aunque no lo es!). Tomando en cuenta la rotación de la Tierra, determine, y grafique, en función del tiempo la potencia de la radiación, recibida por una superficie horizontal de 1 m^2, durante un día. (3 puntos)

(c) Suponga que la radiación es absorbida por paneles solares dispuestos horizontalmente, los cuales generan energía eléctrica con 20% de eficiencia. Evalúe aproximadamente el área total necesaria de tales paneles para que el promedio de la potencia generada durante 24 horas sea de 1 gigawatt (que es del orden del consumo residencial de una ciudad de 6 millones de habitantes en Iberoamérica). (3 puntos)

* Equinoccio: En el ecuador el sol sale a las 06:00 horas y se pone a las 18:00, pasando al mediodía por el cenit.

XIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA, CHILE 2009

SOLUCIÓN PRUEBA TEORICA

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1:

a) De la conservación de energía, se tiene

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = \frac{m}{2}v_\infty{}^2$$

donde v_∞ es la velocidad con que el proyectil llegaría al infinito. La velocidad de escape corresponde al caso $v_\infty = 0$. Luego,

$$\boxed{v_{Esc} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = 1{,}1 \times 10^4 \, m/s}$$

b) La fórmula para el número de núcleos de Radio a tiempo ***t*** es

$$N(t) = N_0 \exp[-t/\tau],$$

de manera que $N(t=1600\ años)=N_0/2$. Eso significa $\tau \approx 846.377$ **días**. Luego, al cabo de un día, quedan

$$N_0 \exp[-1/846.377] \approx N_0(1 - 1.18 \times 10^{-6}),$$

núcleos de Radio sin decaer. En otras palabras, en un día decaen

$$\Delta N \approx (1.18 \times 10^{-6}) \times (6/226) \times 10^{23} \approx 3{,}14 \times 10^{15},$$

lo que genera una cantidad de calor equivalente a

$$\boxed{\Delta Q \approx 3{,}14 \times 10^{15} \times 4{,}87 \text{MeV} \approx 1{,}5 \times 10^{16} \times 1{,}6 \times 10^{-13} J \approx 2\,447 \text{J}.}$$

SOLUCION DEL PROBLEMA 2:

a) La energía cinética es la diferencia entre la energía de una partícula y su energía en reposo, $T = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$, que para bajas velocidades se puede aproximar por $T \approx mv^2/2$. De la conservación de energía, se tiene

$$M_0 c^2 = T_{Rn} + M_{Rn} c^2 + T_\alpha + M_\alpha c^2,$$

o bien,

$$Q \equiv (M_0 - M_{Rn} - M_\alpha)c^2 = T_{Rn} + T_\alpha = 4{,}87\text{MeV},$$

En el sistema en que el núcleo de Radio está en reposo se tiene, de la conservación de momentum,

$$0 = \boldsymbol{p}_{Rn} + \boldsymbol{p}_\alpha \Rightarrow |\boldsymbol{p}_{Rn}| = |\boldsymbol{p}_\alpha| \equiv p.$$

Dado que la energía cinética disponible es mucho menor que la masa de las partículas, la dinámica es prácticamente no-relativista. Luego,

$$T_\alpha = \frac{p^2}{2M_\alpha}, \text{ y } T_{Rn} = \frac{p^2}{2M_{Rn}},$$

Así, la energía cinética de la partícula alfa se relaciona con Q según

$$Q = T_\alpha \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_{Rn}}\right),$$

de donde se puede despejar la energía cinética de la partícula alfa:

$$\boxed{T_\alpha \approx Q\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_{Rn}}\right)^{-1} \approx 4{,}75 MeV,}$$

b) La fórmula para el número de núcleos de Radio a tiempo t es

$$N(t) = N_0 \exp[-t/\tau],$$

de manera que $N(t=1600 \text{ años}) = N_0/2$. Eso significa $\tau \approx 846.377$ **días**. Luego, al cabo de un día, quedan

$$N_0 \exp[-1/846.377] \approx N_0(1 - 1.18 \times 10^{-6}),$$

núcleos de Radio sin decaer. En otras palabras, en un día decaen

$$\Delta N \approx (1.18 \times 10^{-6}) \times (6/226) \times 10^{23} \approx 3{,}14 \times 10^{15},$$

lo que genera una cantidad de calor equivalente a

$$\boxed{\Delta Q \approx 3{,}14 \times 10^{15} \times 4{,}87\text{MeV} \approx 1{,}5 \times 10^{16} \times 1{,}6 \times 10^{-13} J \approx 2\,447\text{J}.}$$

c) Un cuerpo de masa M y calor específico C, aumenta su temperatura en ΔT cuando absorbe una cantidad de energía Q, según

$$Q = CM\Delta T$$

En este caso,

$$\boxed{\Delta T = Q/(CM) = \frac{2{,}44 \times 10^3}{4{,}2 \times 10^3} = 0{,}58°K}$$

SOLUCION PROBLEMA 3:

a) Antes de soltar la cadena, la tensión a una altura z es

$$T(z) = \frac{M}{L} gz.$$

b) Justo después de soltar la cadena, cada trozo de ella acelera en caída libre y por lo tanto la tensión es nula en todas partes.

c) La fuerza sobre la balanza es la suma de dos contribuciones:

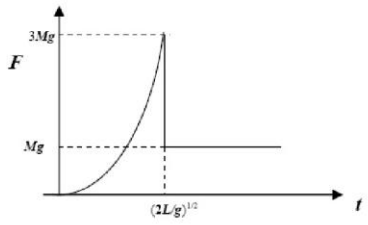
$$\text{g} \times (\text{masa depositada hasta el instante } t) = g \frac{M}{L} \frac{gt^2}{2},$$

y la fuerza debida al ir itando por unidad de tiempo,

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{M \Delta z}{L} v \frac{1}{\Delta t} = \frac{M g^2 t^2}{L}.}$$

Por lo tanto, la fuerza neta sobre el plato es $3Mg^2t^2/2L$. El tiempo que tarda la cadena en caer por completo es $t = \sqrt{2L/g}$ y en consecuencia, al caer el último eslabón, la balanza registra una fuerza de $3Mg$.

Gráfico aproximado:



SOLUCION PROBLEMA 4:

a) Si P es la potencia total radiada por el Sol, la intensidad que llega a la Tierra, antes de entrar en la atmósfera, es

$$I = \frac{P}{4\pi R^2},$$

La distancia R se encuentra de multiplicar la velocidad de la luz por el tiempo que tarde en llegar desde el Sol,

$$R = 500 \times 3 \times 10^8 m = 1{,}5 \times 10^{11} m.$$

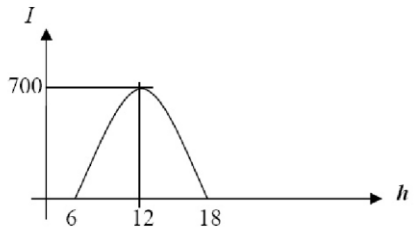
Así, la intensidad sobre la Tierra, antes de entrar en la atmósfera es

$$\boxed{I = \frac{4 \times 10^{26}}{4\pi \times (1{,}5 \times 10^{11})^2} W/m^2 \approx 1400 W/m^2.}$$

b) El 50% de esta potencia (≈ 700 W/m^2) llega a la superficie de la Tierra en el momento de máxima exposición solar. En cualquier otro momento, la sección que presenta el panel al flujo solar es proporcional al coseno del ángulo entre la vertical local y la dirección al Sol. A la hora t, medida desde el medio día, la radiación que llega al panel es

$$\boxed{I_{Suelo} = 700\left[\cos\left((t-12)\frac{\pi}{12}\right)\right] Wm^{-2},\ 6 \le t \le 18,}$$

y en el resto del día la potencia es nula.



c) Con una eficiencia de 20%, la máxima potencia convertida en electricidad es

$$\boxed{w_{elect.,\max.} = 700 \times 0{,}2 W/m^2 = 140 W/m^2}$$

El promedio diario de la potencia es $1/\pi$ veces esta cantidad. Por lo tanto, se necesitan casi 23×10^6 m^2 = 23 km^2 para producir 1 GW en promedio diario.

1 Prueba Experimental

La actividad experimental tiene muchos momentos. Incluye la exploración del comportamiento de ciertos fenómenos físicos para poder diseñar una experiencia de manera precisa. En ese sentido vamos a presentar el contexto del problema y conducirlo a realizar pruebas exploratorias del fenómeno.

1.1. Introducción

Frente a los problemas de contaminación que generan los hidrocarburos fósiles en la producción de energía eléctrica, se tienen dos opciones para resolver el problema, el uso de las llamadas energías alternas (o limpias) y el de la energía nuclear. Esta última crea, en la población, temores (quizás infundados) por razones de seguridad y las llamadas alternas generan costos muy altos para hacerlas soluciones masivas. Entre las energías alternas hay una muy popular que es la obtenida a partir de la energía solar. Sin embargo, sus características y problemas no son bien conocidos. Queremos explorar algunos elementos de esta forma de energía para la producción de electricidad.

En la literatura encontramos información como la siguiente:

La forma más común de las celdas solares se basa en el efecto fotovoltaico, en el cual la luz solar que incide sobre un dispositivo semiconductor de dos capas produce una diferencia de potencial entre las capas. Este voltaje es capaz de generar una corriente a través de un circuito externo produciendo un trabajo útil. La energía que entrega un dispositivo fotovoltaico está determinada por:

- El tipo y el área del material fotosensibles.
- La intensidad de la luz incidente.
- La longitud de onda de la luz incidente.

Las celdas solares de silicio policristalino tienen una eficiencia de menos del 20 % y las celdas amorfas de silicio tienen una eficiencia de cerca del 10 %, ambas debido a pérdidas internas de energía.

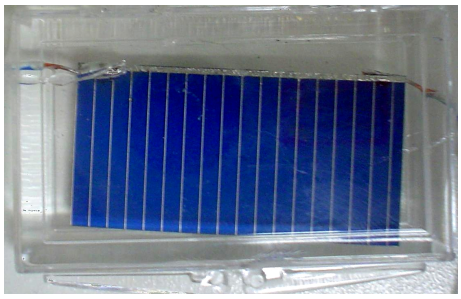
Una característica importante de las celdas fotovoltaicas es que el voltaje de la celda no depende de su tamaño, y sigue siendo bastante constante con el cambio de la intensidad

de luz. La intensidad de la corriente eléctrica en estos dispositivos, es casi directamente proporcional a la intensidad de la luz y al tamaño de la celda. Para comparar diversas celdas se les clasifica por densidad de corriente, medidas en amperios por centímetro cuadrado.

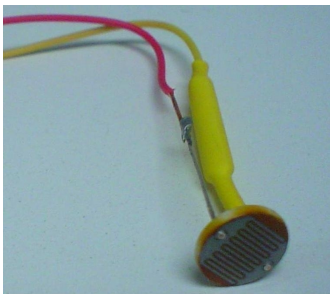
1.2. Materiales

Suministramos lo siguiente (use los que crea necesarios):

1. Un bombillo (lámpara, foco) de luz blanca de 12 V, 4 W, que simula el Sol (se te da un bombillo de repuesto).
2. Un batería de 12 V y otra de 9 V.
3. Una celda solar en miniatura.
4. Dos multímetros.
5. Un potenciómetro (reóstato) de 1 kΩ.
6. Una placa de montaje eléctrico o "*protoboard*".
7. Cables.
8. Una fotorresistencia.
9. Una regla.



Celda solar



Fotorresistencia

1.3. Primera parte del problema: estudio de la celda solar

Se pretende estudiar la relación entre la tensión (voltaje) y la intensidad de corriente eléctrica suministrada por una celda solar.

Antes de hacerlo familiarízate con el material.

1. Describe en pocas palabras el procedimiento que usarás para establecer la relación entre voltaje e intensidad de corriente eléctrica en la celda solar. (1 punto).
2. Haz un esquema del circuito (representa la celda solar como una batería). (1 punto).
3. Elabora una tabla con los valores medidos. (1 punto).
4. Construye el gráfico correspondiente. (2 puntos).
5. Compara el gráfico anterior con el que se obtendría si se sustituyese la celda por una batería de la misma tensión (voltaje) en circuito abierto. (1 punto).
6. Determina la potencia máxima suministrada por la celda solar. (2 puntos).
7. Si el aumento de la intensidad luminosa aumenta la intensidad de corriente eléctrica y no así el voltaje, ¿cómo asociarías varias celdas para obtener mayor voltaje? (2 puntos).
8. Si el aumento de intensidad de corriente eléctrica proviene del aumento de luminosidad y del tamaño de la celda solar (superficie iluminada) y no puedes aumentar la intensidad luminosa, cómo aumentarías la intensidad de corriente eléctrica del circuito, manteniendo el voltaje constante? (2 puntos).

1.4. Segunda Parte del Problema: relación entre la intensidad luminosa y la resistencia de una fotorresistencia

Se pretende obtener la relación entre la respuesta de un fotodetector y la intensidad luminosa que recibe. En nuestro caso exploraremos esta relación empleando una sencilla fotorresistencia, que es un pequeño dispositivo cuya resistencia eléctrica depende de la intensidad de la iluminación E según la ley $R = A/E^{\alpha}$, donde A es una constante y α un exponente que varía entre 0,50 y 1,0.

Para una fuente ***puntual*** de luz la intensidad luminosa varía con la distancia d a la fuente, en la forma $1/d^2$, lo que consideraremos como una aceptable aproximación en nuestro caso.

1. Haz un esquema del circuito utilizado para determinar la relación entre la intensidad luminosa y la resistencia de la fotorresistencia en función de la distancia a la fuente de luz. (2 puntos).
2. Determina el valor de α de tu dispositivo particular. (4 puntos).
3. Haz una estimación de la incertidumbre de α. (2 punto).

Problema 1: ¿Quién es más eficiente en la transferencia de energía: el Ser Humano o el Sol?

Se plantea el siguiente problema: ¿Podemos saber si el Ser Humano es más eficiente que el *Sol* en la transformación de energía por unidad de masa y por unidad de tiempo? Para ello se requiere encontrar la energía por unidad de masa emitida por el Sol, para finalmente compararla con la energía por unidad de masa procesada por un Ser Humano promedio. A continuación se les presenta un planteamiento simplificado del problema para llegar a una respuesta.

La energía emitida por unidad de tiempo por una estrella se denomina luminosidad (L). El Sol es una estrella que parece emitir mucha energía por unidad de tiempo en todas las direcciones del espacio, y lo suponemos isotrópico (es decir, que emite energía de igual forma en todas las direcciones). L se ha calculado con la siguiente relación $L = kS$ donde k es la llamada "constante solar" y S es la superficie esférica, centrada en el centro del Sol, y de radio igual a la distancia a la que se encuentra el aparato de medición al centro del Sol, en este caso en la Tierra. ¿Cómo se mide la constante solar? La constante solar es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar por unidad de tiempo y unidad de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre en un plano perpendicular a los rayos solares. Los resultados de su medición con los satélites indican un valor promedio de $k = 1\ 366\text{W/m}^2$.

Las mediciones para determinar L se realizan con telescopios que deben estar situados en lugares donde la atmósfera absorba lo menos posible la radiación solar. Lo que los telescopios reciben es una cantidad llamada "*flujo*" (F) que se define como la energía total recibida por segundo por cada metro cuadrado en el sensor, una cantidad que depende de la distancia D entre el astro y el lugar en el cual hacemos la medición. Si el Sol (estrella) tiene un flujo o brilla igual en todas las direcciones (flujo o brillo isotrópico), se utiliza la siguiente expresión para el flujo:

$$F = \frac{L}{4\pi D^2},$$

donde D es la distancia del emisor al sensor. En astronomía el valor aceptado para L (solar) es $3,827 \times 10^{26}$ W.

1. En un experimento realizado en uno de los telescopios que se encuentra sobre la superficie de la Tierra denominado VLT (Very Large Telescope) se determinó, utilizando filtros de diferentes longitudes de onda, que cada pixel de la cámara CCD (las cámaras CCD son dispositivos electrónicos muy sensibles, ideados para captar la luz y formar una imagen a partir de ella y significa "*Dispositivo de Carga Acoplada*") que

se encuentra en su foco recibe $3,021\ 1\ \times\ 10^{-7}$ W en promedio. Teniendo en cuenta que cada lado de un pixel mide $0,015\ 00$ mm, compare el valor de la constante solar determinada por medio de satélites con el valor de F medido utilizando el telescopio. (2,5 puntos).

2. En Astronomía se define el "*módulo de distancia*" como la diferencia entre los brillos aparente m y absoluto M de una estrella. Este módulo permite calcular la distancia a la estrella mediante la ecuación

$$m - M = 5\,(\log D - 1),$$

donde D está dado en parsec. Un parsec es igual a $3,085\ 68\ \times\ 10^{16}$ m. El parámetro m representa el brillo de una estrella vista desde la Tierra, mientras que M sería el brillo aparente de una estrella si estuviese localizada a 10,00 parsec del Sol. Sabiendo que para el Sol m = -26,80 y M = 4,800, calcula la distancia D del Sol a la Tierra y compara la luminosidad del Sol (L) que ha sido aceptada, con la que se obtiene mediante la medición anterior de F y el valor obtenido de D. (3 puntos).

3. A partir del valor de D encontrado en el punto 2, suponiendo que la órbita de la Tierra en torno al Sol es circular, sabiendo que el periodo de esta órbita es 365,242 días solares y que la constante de gravitación universal es $G = 6,674\ \times\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$, determina la masa del Sol, M_S. Compárala con el valor aceptado $1,989\ \times\ 10^{30}$ kg. (1,5 puntos).

4. Calcula la energía por unidad de masa y por unidad de tiempo producida por el Sol. (1,5 puntos).

5. Una persona de 80 kg necesita unas 2 000 kilocalorías por día que obtiene a través de los alimentos. Supon que el ser humano no almacena energía o almacena muy poca. Esto conduce a una transformación media de 1 W/kg. ¿Quién procesa más energía por unidad de masa y por unidad de tiempo, el Sol o una persona? Es decir, ¿cuál es más eficiente? Calcula la relación entre las dos eficiencias. (1,5 puntos).

Problema 2: Partículas contaminantes

En las salas de manufacturado de dispositivos de micro y nanotecnologías, como procesadores y memorias RAM, es esencial la ausencia de partículas en el ambiente. Actualmente el tamaño de los transistores que se integran en estos dispositivos es del orden de 30 nm, mientras que el radio de una partícula ambiental es del orden de 1 µm. Por ello, si una de estas partículas se deposita sobre el circuito durante el proceso de fabricación puede producir su pérdida. Para minimizar estas pérdidas, la fabricación se realiza en salas llamadas "blancas" donde hay un estricto control de la densidad de partículas en el aire

Considera una partícula esférica de radio $R = 1,0$ µm en una sala blanca donde no hay corrientes de aire y la temperatura es constante. El aire puede considerarse como un fluido viscoso donde se cumple la *ley de Stokes*.

1. Indica, en un diagrama, las fuerzas que actúan sobre la partícula. Considera que el eje Z está en la dirección del campo gravitatorio. (1 punto).

2. Escribe la ecuación de movimiento de la partícula y encuentra la expresión de la velocidad límite. (Coeficiente de Stokes $6\pi\mu R$ y densidad del aire $\rho_a = 1,213\ \mathrm{kg/m^3}$). (1,5 puntos).

3. Compara la velocidad límite en el caso de una partícula de Plomo $\rho_{\mathrm{Pb}} = 11\,340\ \mathrm{kg/m^3}$ y una partícula de Silicio $\rho_{\mathrm{Si}} = 2330\ \mathrm{kg/m^3}$, $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$ y $\mu = 1,829 \times 10^{-5}\mathrm{kg/s\ m}$. (1 punto).

4. Representa, en forma aproximada y en un mismo gráfico, la velocidad límite en función del tamaño de la partícula en el rango desde $R_{\mathrm{min}} = 0$ hasta $R_{\mathrm{max}} = 10\,\mu\mathrm{m}$, para el Si y para el Pb. (1,5 puntos).

5. Calcula el tiempo de caída por metro para Plomo y Silicio, una vez alcanzada la velocidad límite. (1 punto).

   NOTA: De esto se deduce que, a estas escalas tan pequeñas, incluso una partícula de uno de los elementos más pesados puede sedimentarse muy lentamente. Por ello, el flujo de aire y la presencia de partículas, deben estar muy controladas, ya que pueden quedar suspendidas en el aire por un tiempo no despreciable.

6. Considera el caso en que la partícula de radio ligeramente submicrónico, $R = 0,10$ µm, ha alcanzado su velocidad límite y que se encuentra a una altura $h = nR$ (n veces el radio) de una superficie metálica en la sala. Si se considera que la partícula está cargada superficialmente con una distribución de carga $\sigma = 1,0 \times 10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$, indique en un diagrama las fuerzas que actúan sobre la partícula. (1 punto).

AYUDA: La interacción entre un plano conductor y una partícula cargada es equivalente a la interacción entre esta partícula y otra de carga igual y signo contrario, situada simétricamente al otro lado del plano. (*Método de las imágenes*).

7. Compara la fuerza electrostática en esta situación con la fuerza gravitacional en el caso de la partícula de Silicio $R = 0,10\,\mu\text{m}$, para $n = 5$, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ N m^2/C^2, $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C. Suponga la partícula puntual y de carga $q = \sigma\, 4\pi R^2$. (2 puntos).

   NOTA: De lo anterior se deduce que, en estas circunstancias, la interacción electrostática puede ser dominante. Por ello es necesario controlar la humedad ambiente y diseñar sistemas de descarga controlada de los dispositivos metálicos de la sala.

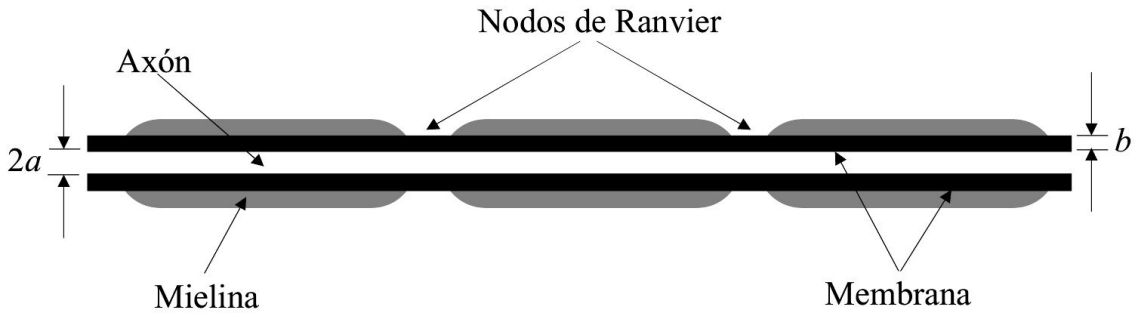
8. Representa, en forma aproximada y en un mismo gráfico, ambas fuerzas en función del tamaño de la partícula, desde $R_{\text{min}} = 0$, hasta $R_{\text{max}} = 50\,\mu\text{m}$, para el caso del Si. Determine el radio límite por debajo del cual la fuerza electrostática domina la fuerza gravitacional. (1 punto).

Problema 3: Un modelo físico sencillo del funcionamiento del axón de una neurona

En la naturaleza hay una enorme cantidad de fenómenos que pueden representarse mediante circuitos eléctricos simples, como por ejemplo el flujo de iones a través de una membrana celular. Un sistema un poco más complejo es el axón o cilindro eje de una neurona. A pesar de que el sistema nervioso es una maravilla en lo que se refiere a la trasmisión de la información, vamos a considerar un circuito simple que represente la trasmisión de la señal a lo largo del axón.

Una membrana celular, cuyo espesor es $b = 7,00$ nm, cubre un axón que tiene forma de cilindro de radio $a = 5,00$ µm. La diferencia de potencial entre el exterior y el interior de la membrana es $V_0 = 70,0$ mV. La sustancia con la que está hecha la membrana (lípido) es un dieléctrico no ideal de constante $k = \varepsilon/\varepsilon_0 = 8,00$, ($\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m) y de resistividad $\rho_m = 1,60 \times 10^7\,\Omega\,\text{m}$. Con esos datos podemos modelar la membrana como un circuito RC.

El plasma del axón es conductor (no perfecto), con resistividad $\rho_a = 0,500\,\Omega\,\text{m}$. En vista de que la membrana tiene corrientes de fuga radiales, cuando se transmite un impulso eléctrico por el axón, este impulso se atenúa. Por ello la naturaleza ha provisto una sustancia aislante que cubre la membrana del axón, llamada mielina, que juega el papel de plástico aislante del hilo conductor. En este caso la atenuación se debe solamente a la resistencia del plasma del axón y no a las corrientes de fuga que se transmiten por la membrana. Por esa razón el impulso debe ser regenerado cada cierta distancia. Para ello se origina un intercambio de carga entre el exterior y el interior del axón (flujo de iones) a través de canales en la membrana. En esos canales se tiene ausencia de mielina, y son llamados nodos de Ranvier.



1. Suponiendo que la membrana se puede considerar un condensador plano de espesor b, determina:

   a) la magnitud del campo eléctrico en el interior de la membrana del axón. (1 punto).

   b) la densidad superficial de carga. (1 punto).

2. ¿Cuál es la capacidad (capacitancia) por unidad de superficie de la membrana? (1 punto).

3. Calcula la conductancia radial (inversa de la resistencia) de la membrana por unidad de superficie. (1 punto).

4. Calcula la constante de tiempo τ del circuito RC equivalente. (1 punto).

5. Calcula la resistencia axial (longitudinal) del axón por unidad de longitud. (1 punto).

6. Calcula la longitud crítica L_C del axón para la cual su resistencia longitudinal es igual a la resistencia radial de la membrana. (2 puntos).

7. ¿Qué implicaciones tendría que la longitud del axón fuese mayor que la longitud crítica? Justifica tu respuesta. (2 puntos).

XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Experimental
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011

Instrucciones

Lea estas instrucciones antes de iniciar la prueba.

1. El tiempo disponible para esta prueba es de 5 horas.
2. La prueba consta de un único problema.
3. Utilice los materiales que se entrega para la resolución del prueba.
4. No escriba su nombre en cualquiera de las hojas o su nombre en cualquiera de las hojas de respuesta, excepto en la hoja de carátula.
5. Numere las páginas del examen (utilizando 2/5, por ejemplo, para indicar la segunda hoja de cinco).
6. Al finalizar, coloque las hojas de respuesta en el sobre y entréguelo junto con esta hoja de carátula.
7. Recuerde que no debe observar directamente el láser.

Apellidos:		
Nombres:		
País:		
Código:		
Número de hojas	Blancas	Milimetradas

XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Experimental
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011

Determinación del Índice de Refracción por el método de Pfund

Puntaje máximo: 20

El índice de refracción de un material transparente es uno de sus parámetros físicos más importantes. Existen varios métodos para determinar dicho índice. Uno de ellos, para una placa transparente plano - paralela, se debe a Pfund (A. H. Pfund, J. Opt. Soc. Am. 31, 679, 1941).

En el método de Pfund se hace incidir un haz de luz láser de manera perpendicular a la superficie de la placa transparente, que reposa sobre una superficie difusora. La luz se difunde en todas direcciones desde el punto de incidencia del haz en esta superficie, y llega a la superficie superior de la placa transparente bajo todos los ángulos, desde 0 hasta 90°.

Como se sabe, un fenómeno importante en la propagación de la luz entre dos medios es la *reflexión interna total*, caracterizada por un ángulo límite (o crítico). Si la radiación difundida en el fondo alcanza la superficie superior de la placa, con ángulos de incidencia menores que el ángulo límite, una parte se transmitirá al aire y otra parte será reflejada. Pero si la radiación difundida desde el fondo incide en la superficie superior de la placa con un ángulo mayor que el ángulo límite, no existirá luz transmitida.
Como consecuencia, desde la parte superior de la placa se observa un punto luminoso originado por la incidencia directa del haz, rodeado de un círculo de intensidad mucho menor (Figura 1). El diámetro de este círculo está relacionado con el índice de refracción de la placa.

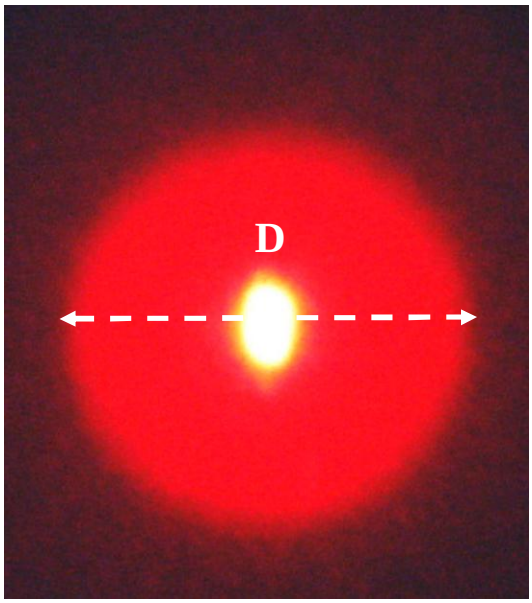


Figura 1

Para la determinación del índice de refracción de la placa se utiliza la ley de Snell:

$$n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2,$$

Si D es el diámetro del círculo (Figura 1) que se forma sobre la superficie difusora (papel), y H es el espesor de la placa (Figura 2), a partir de la ley de Snell y de la condición de reflexión total, es posible obtener la siguiente relación:

$$\frac{n_{placa}}{n_{aire}} = \sqrt{\left(\frac{4H}{D}\right)^2 + 1}$$

De esta ecuación, midiendo D para varios valores de H, es posible calcular el índice de refracción de la placa.

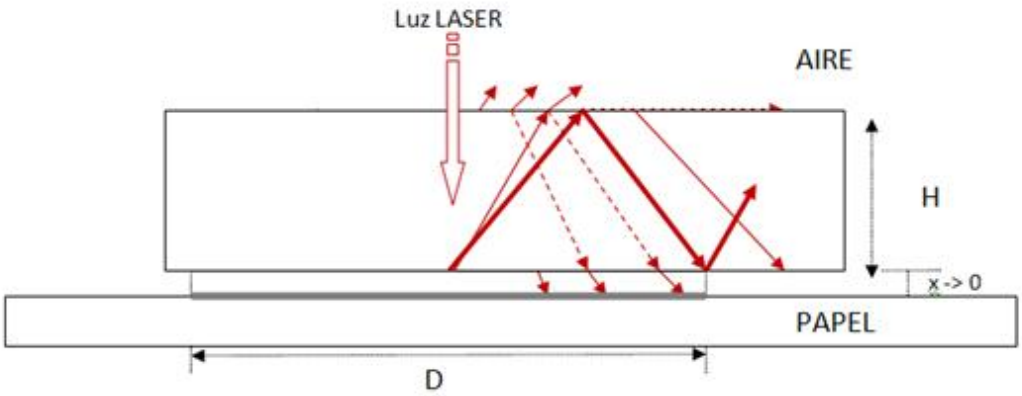


Figura 2

Los materiales de los cuales se dispone para este experimento son:

- Tres placas de vidrio de espesores: 3,0; 5,0 y 8,0 mm
- Láser rojo
- Papel milimetrado (superficie difusora)

XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Experimental
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011

Tareas

Para las siguientes tareas considere que el índice de refracción del aire es igual a 1,0.

1. Determine el índice de refracción del vidrio y estime su incertidumbre, a partir de las medidas obtenidas para las tres placas individuales. **(6 puntos)**

2. Mida los diámetros (D) al combinar las placas de 5,0 mm y 3,0 mm, en ese orden y en el orden inverso, sin humedecer la superficie de contacto. Explique sus resultados.**(2 puntos)**

3. Mida los diámetros (D) al combinar las placas de 5,0 mm y 3,0 mm, en ese orden y en el orden inverso, humedeciendo la superficie de contacto. Explique sus resultados.**(2 puntos)**

4. Compare los diámetros (D) obtenidos para la placa de 8,0 mm, y la combinación de placas de 5,0 mm y 3,0 mm unidas humedeciendo la superficie de contacto. Explique sus resultados.**(2 puntos)**

5. Determine el índice de refracción del vidrio y estime su incertidumbre a partir de las medidas obtenidas con las tres placas y con combinaciones de ellas, humedeciendo las superficies de contacto. (6 puntos)

6. Compare los resultados obtenidos en el apartado 5 con los del apartado 1. **(2 puntos)**

XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Teórica 1
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011

Energía de las Olas

Durante muchos años investigadores han intentado desarrollar un aparato para extraer la energía de las olas del mar. De los métodos usados el más simple consiste en un flotador conectado al émbolo de un cilindro de doble acción anclado al fondo del mar, como se muestra en la figura.

Cuando llega la ola, el flotador actúa tirando del émbolo hacia arriba, y luego de pasar ésta, su propio peso lo hace bajar. Debido a este movimiento y a un sistema de válvulas acoplado al cilindro, el sistema transporta agua a un tanque ubicado a una altura h = 50 m sobre el punto medio del cilindro.

El agua acumulada se utiliza para hacer funcionar una turbina ubicada a nivel de mar, transformando la energía potencial del agua en energía eléctrica para el consumo doméstico.

Considerando que las olas tienen una amplitud de 30 cm, que provocan un movimiento sinusoidal en el flotador y que pasan tres olas (crestas) por segundo, realice las siguientes tareas:

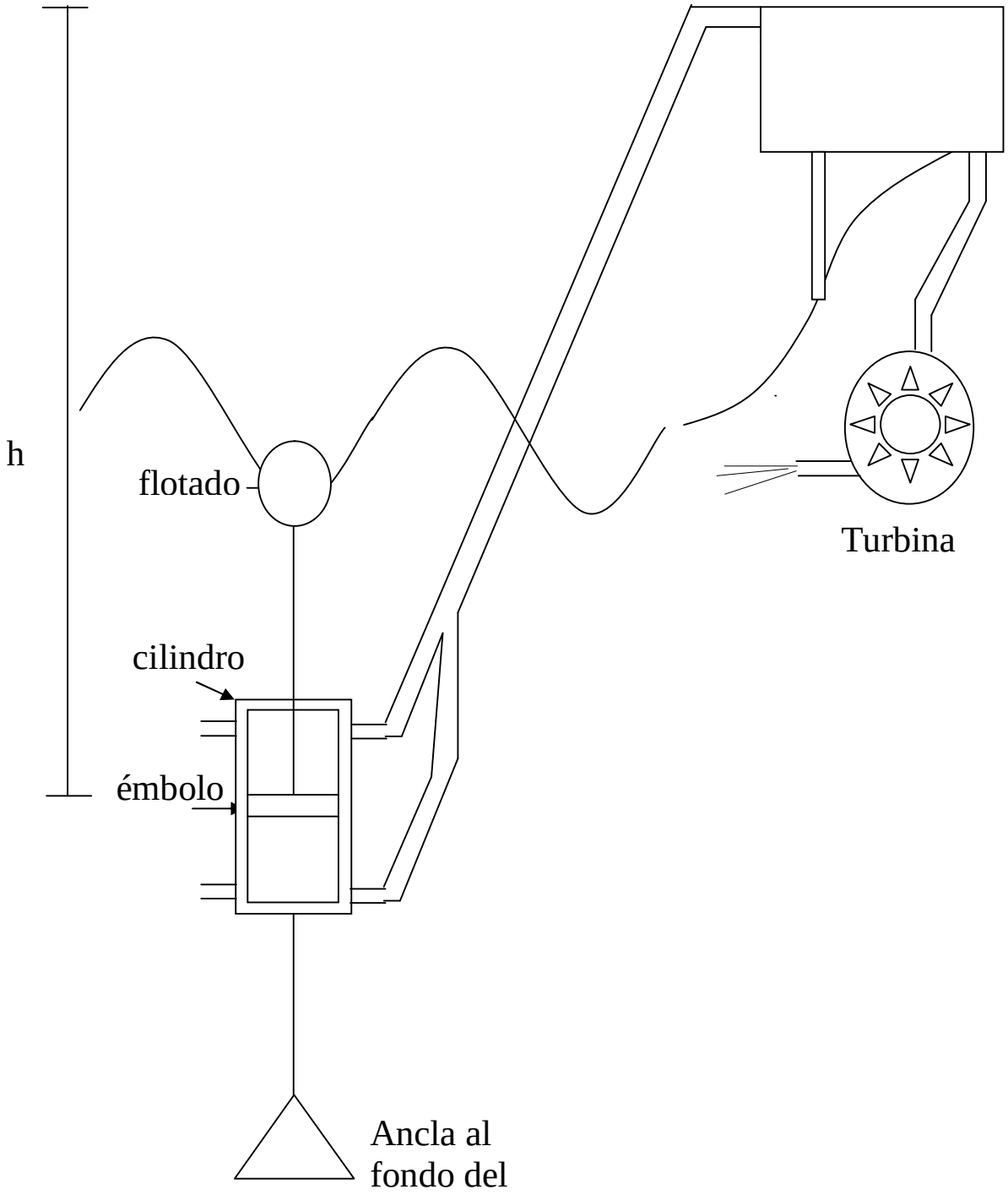
1. Si el movimiento del flotador está desfasado en ´/2 con respecto a la ola y su amplitud es del 90% de la amplitud de la misma, encuentre la expresión que describe la posición del flotador en función del tiempo. Especifique las condiciones iniciales asumidas. **[3 p]**

2. Represente en una misma gráfica la posición, velocidad y aceleración del flotador en función del tiempo. **[2 p]**

3. Considerando que el cilindro tiene 800 mm de diámetro y que el espesor del émbolo es insignificante con respecto a la altura del cilindro, determine el trabajo realizado en un ciclo sobre el agua que se eleva al tanque desde el cilindro. **[3 p]**

4. Determine la potencia media que suministra el sistema. **[2 p]**

XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Teórica 1
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011



XVI Olimpíada Iberoamericana de Física
ECUADOR 2011
Prueba Teórica 2
26 septiembre 2011 – 01 de Octubre 2011

Efecto de la distribución de la posición inicial de los iones en un espectrómetro de masas lineal de tiempo de vuelo.

Introducción

Un Espectrómetro de masas de tiempo de vuelo es un instrumento que permite medir la masa molecular de iones con alta precisión y buena resolución. Estos instrumentos constan de tres partes principales: 1) una fuente de iones, donde los iones que se analizan son producidos y acelerados, 2) un tubo de vuelo ubicado a continuación, en el cual los iones previamente acelerados en la fuente pueden volar sin campos eléctricos o magnéticos que los afecten, llamado también región de vuelo libre, y 3) un detector en el cual se registra el tiempo de llegada de los iones.

En la fuente todos los iones con la misma carga q se aceleran hasta alcanzar nominalmente la misma energía cinética. Por eso, en su vuelo los iones se separan por su masa (o mejor, su relación m/q) y llegan al detector en un tiempo que depende de su m/q. Es decir, que midiendo el tiempo de vuelo de un ion particular podemos determinar su relación m/q y, conociendo q, por lo tanto se puede determinar m.

Espectrómetro Wiley y McLaren de dos etapas

En la Figura 1 se muestra un esquema de un espectrómetro lineal simple del tipo Wiley y McLaren con dos etapas de aceleración, donde se incluyen sus dimensiones y potenciales aplicados.

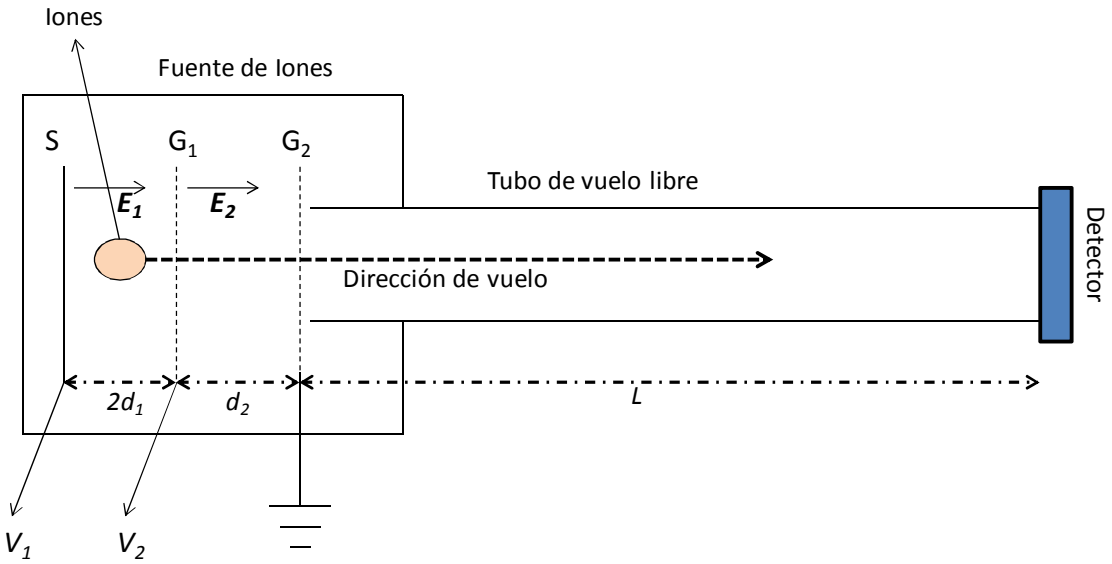


Fig. 1. Un esquema de un espectrómetro de masas de tiempo de vuelo. Se muestran la fuente de iones con dos etapas de aceleración, limitadas por el electrodo S y las rejillas metálicas G_1 y G_2, el espacio de vuelo libre y el detector al final. Los iones deben hacer una carrera para mostrar quien es el menos masivo. Típicamente, las distancias d_1 y d_2 son muy pequeñas en relación al tamaño de las rejillas.

Supondremos que en el centro de la región delimitada por S y G_1 se crea un número muy grande de iones de diferentes especies químicas (con diferentes masas moleculares). El electrodo S se encuentra a un potencial V_1. Frente a este electrodo hay dos electrodos adicionales formados por rejillas metálicas G_1 y G_2, a través de las cuales podrán pasar los iones en su camino hacia el tubo de vuelo libre.

1) Principio de funcionamiento

En la llamada configuración estática, los iones de carga positiva q y masa m se aceleran a través de las diferencias de potencial introducidas por los potenciales positivos V_1 y V_2 (con $V_1 > V_2$), que generan campos eléctricos homogéneos E_1 y E_2 entre S y G_1 y entre las rejillas metálicas G_1 y G_2.

Supongamos que los iones se crean instantáneamente en la región entre S y G_1, exactamente en el centro, a una distancia d_1 de S. Luego de su creación los iones serán extraídos en la dirección del campo eléctrico como se indica, recibiendo contribuciones sucesivas en su aceleración de los dos campos eléctricos homogéneos E_1 y E_2, respectivamente. Entre G_2 y el plano del detector, no hay campo eléctrico alguno y los iones pueden volar con libertad, esto es, en un movimiento rectilíneo uniforme. En este sistema los efectos gravitatorios y relativistas son despreciables.

La energía de un ión al salir de la fuente de iones puede escribirse como

$$U = U_0 + q\, d_1\, E_1 + q\, d_2\, E_2 \qquad (1)$$

Donde U_0 es la energía cinética inicial del ion en el momento de su creación.
Consideremos por ahora que los iones se forman todos en la mitad de la primera región de aceleración y al mismo tiempo, esto es, con posición inicial $x_0 = d_1$.

a. Encuentre expresiones para:
   i. Los campos eléctricos entre los electrodos en función de los potenciales y distancias indicadas en la figura 1. **[1 p]**
   ii. Las aceleraciones que experimentan los iones en las dos etapas de aceleración de la fuente de iones en función de los potenciales y distancias indicadas en la figura 1. **[1 p]**
   iii. La energía cinética que adquieren los iones al final de cada etapa, y muestre que si consideramos que los iones se crean con velocidad inicial nula, la energía cinética final será la misma para todo ion. **[2 p]**
   iv. La velocidad al atravesar G_1 y G_2 en función de las energías cinéticas. Note que si hay especies químicas con diferentes masas pero con la misma carga en la fuente, los iones adquieren una velocidad final que depende de su m/q.**[2 p]**

b. Encuentre una expresión para el tiempo de vuelo de los iones en cada una de las tres etapas en función de las energías cinéticas, la masa, la carga, las intensidades de los campos eléctricos y las distancias. **[3 p]**

c. Considere dos iones con masas m_1 y $m_2 = m_1+1$ (en unidades de masa atómica, u) y con la misma carga q. ¿Cuál es la diferencia entre los tiempos de vuelo totales para los dos iones?**[3 p]**

d. Calcule la diferencia entre los tiempos de vuelo para iones de masas 1 000 u y 1 001 u, $q = e$, en un instrumento en el que $V_1 = 10$ kV, $V_2 = 8$ kV, $d_1 = 3$ mm, $d_2 = 11$ mm y $L = 1$ m. **[2 p]**

2) Caso realista: Resolución afectada por dispersión espacial

En un caso realista, los iones se generan instantáneamente cerca del centro entre S y G_1, pero con una distribución aleatoria de distancias alrededor de este punto que se extiende hasta unos 50 μm.

Vamos a trabajar el caso en que $U_0 = 0$ pero $x_0 = d_1+\Delta$, siendo $|\Delta| << d_1$.

a. Escriba la expresión para el tiempo de vuelo total en estas condiciones.**[2p]**

b. Para un ión de 1 000 u que parte del centro entre S y G_1 y otro idéntico que parte a una distancia $|\Delta| = 50$ μm del primero, determine la diferencia en sus tiempos de vuelo hasta el detector, usando los datos y geometría de 1.d. **[2p]**

c. Compare el resultado anterior con la diferencia de tiempo de vuelo de los dos iones en 1.d. ¿Se puede discernir en estas condiciones la diferencia entre sus masas? Explique **[2 p]**

1 u (unidad de masas atómica) = $1.67\ 10^{-27}$ kg
1 e (carga eléctrica elemental) = $1.6\ 10^{-19}$ C

XVII Olimpiada

IBEROAMERICANA DE FÍSICA



GRANADA (España)
17 a 22 de septiembre, 2012

PROBLEMAS PROPUESTOS

- ✓ **Pruebas Experimentales**
- ✓ **Problemas teóricos**

PRUEBA EXPERIMENTAL A (10 puntos)

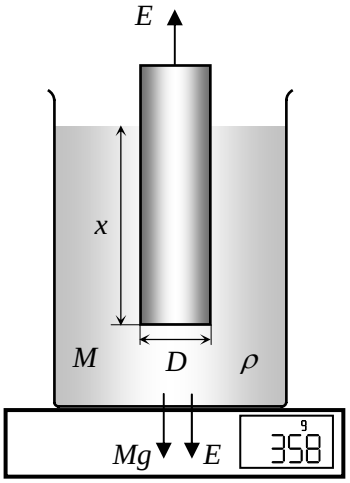
Principio de Arquímedes. Determinación de la densidad de un líquido.

Material.

- Vaso de plástico.
- Líquido problema (zumo de manzana).
- Pieza cilíndrica de plástico, con gancho de sujeción.
- Base soporte con varilla vertical, varilla y manguito roscados, nuez e hilo, para colgar el cilindro.
- Balanza digital.
- Cinta adhesiva.
- Rotulador y regla.

Fundamento teórico.

El conocido Principio de Arquímedes indica que *todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del volumen de fluido desalojado*.



En el experimento de la figura, un cuerpo cilíndrico vertical de diámetro D está parcialmente sumergido una longitud x en un líquido, desalojando un volumen

$$V = \pi (D/2)^2 x .$$

Por tanto, el empuje que experimenta hacia arriba es

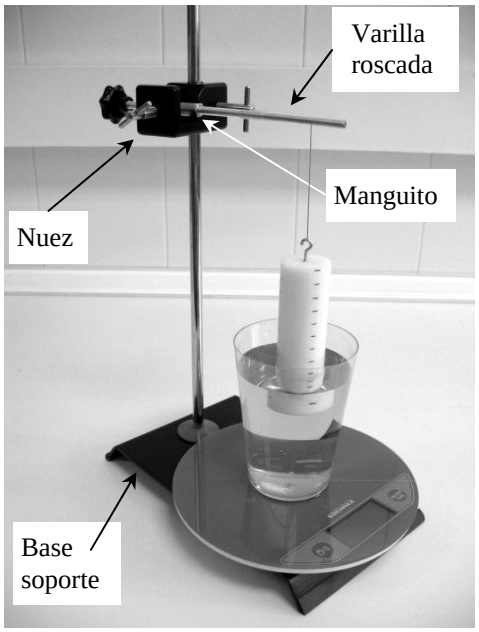
$$E = \rho V g = \rho \pi (D/2)^2 g\, x ,$$

donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad.

Este empuje puede determinarse apoyando el sistema sobre una balanza, que mide la masa aparente colocada sobre ella: si la fuerza total de apoyo sobre la balanza es F, la balanza medirá una masa aparente $M_{ap} = F/g$. Teniendo en cuenta el principio de acción y reacción, la fuerza total de apoyo en nuestro caso será el peso del vaso con el líquido, Mg, más el empuje E ejercido por el cilindro sobre el líquido, de forma que la balanza indicará una masa aparente

$$M_{ap} = M + \frac{E}{g} = M + \rho \frac{\pi D^2}{4} x .$$

Dato: Diámetro del cilindro: $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm .



Procedimiento experimental.

Para precisar la medida de la longitud sumergida, x, dibuje una escala (o varias) en la pared lateral del cilindro, con ayuda de la regla y del rotulador suministrados.

Sitúe la balanza sobre la base soporte y encima el vaso. Suspenda el cilindro sobre el centro del vaso, usando un trozo de hilo arrollado en la varilla roscada. Fije el extremo del hilo a esta varilla con cinta adhesiva, para que no pueda resbalar.

El conjunto se sujeta a la varilla vertical mediante un "manguito" hexagonal roscado y una "nuez" (véase la fotografía adjunta).

La longitud de cilindro sumergida, *x*, se puede ajustar girando la varilla roscada para enrollar o desenrollar hilo.

El nivel inicial de líquido en el vaso debe ser el adecuado para que el cilindro se pueda sumergir hasta, al menos, $x = 10$ cm, sin que el cilindro toque fondo ni el líquido se desborde.

Cuando vaya a comenzar las medidas, retire el vaso de la balanza y pulse el botón de encendido ("ON"). Asegúrese de que mide en gramos (aparece la letra g en la parte superior de la pantalla). Si no es así, pulse el botón izquierdo hasta conseguirlo. Después, apoye el vaso sobre el centro de la balanza.

Precauciones y consejos:

- La balanza tiene en su cara inferior cuatro puntos de apoyo. Para que las medidas sean correctas, los cuatro deben apoyar sobre la misma superficie horizontal, en nuestro caso la base soporte de la varilla vertical.
- Evite que el cilindro roce las paredes del vaso o toque el fondo.
- Una burbuja de aire bajo la base del cilindro, o en su lateral, puede falsear las medidas.
- La balanza dispone de la función *tara* ("TARE"): si se pulsa el botón derecho con la balanza encendida, el aparato tomará esa situación como nueva referencia de masas, anulando la lectura en pantalla. Obviamente, la tara no debe cambiar durante las medidas, por lo que no debe pulsarse la tecla "TARE" mientras se realizan.
- Al cabo de unos cuatro minutos sin que cambie la pesada, la balanza se apaga automáticamente. En este caso hay que volver a encenderla en las mismas condiciones que al principio, para que la tara sea la misma. Para evitar problemas, es mejor no demorarse de una medida a otra, hasta completar la serie.
- Para apagar la balanza, mantenga pulsado durante unos segundos el botón derecho ("OFF").
- Al terminar la prueba, deje su puesto de trabajo limpio y ordenado, tal y como lo ha encontrado.
- **Atención:** extreme el cuidado para evitar que el vaso se vuelque y el líquido se derrame. **Podría arruinar su trabajo previo.**

Cuestiones.

a) Para una serie de valores de *x*, anote la masa aparente indicada por la balanza, M_{ap}. Presente sus medidas en una tabla. (2 puntos)

b) Represente gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales $\left(x, M_{ap}\right)$ obtenidos. (2 puntos)

c) Ajuste una línea recta a estos puntos. (2 puntos)

d) A partir del ajuste anterior, obtenga la densidad del líquido, ρ. (1 punto)

e) Teniendo en cuenta únicamente la incertidumbre indicada para el diámetro del cilindro, $\Delta D = 0{,}1$ mm, calcule la incertidumbre de la densidad del líquido, $\Delta\rho_D$. (3 puntos)

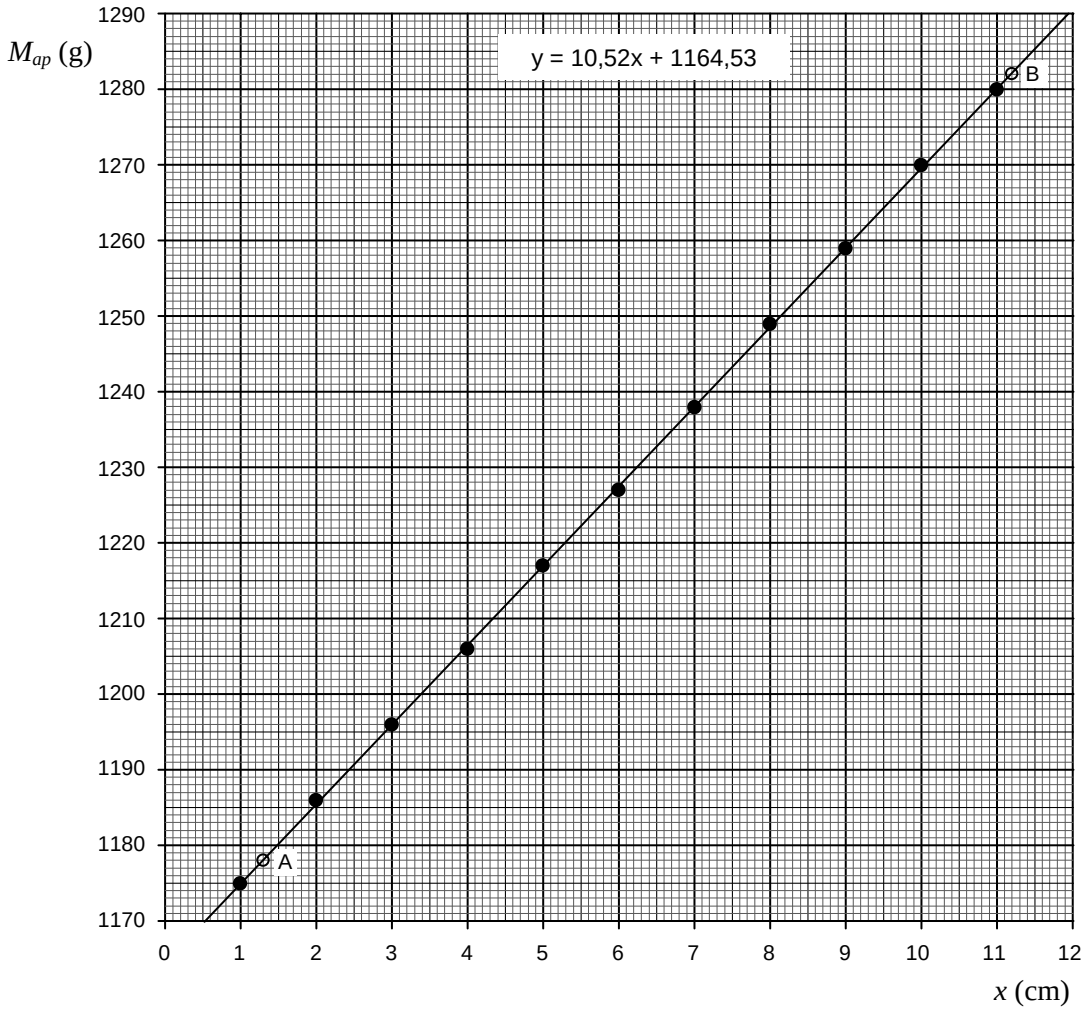
PRUEBA EXPERIMENTAL A

Principio de Arquímedes. Determinación de la densidad de un líquido. **Solución**

a) Tabla de medidas:

x **(cm)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{ap} **(g)**	1175	1186	1196	1206	1217	1228	1238	1249	1259	1270	1280

b) Se presenta a continuación la gráfica pedida, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado. No se va a tener en cuenta el punto correspondiente a $x = 0$ porque puede tener una apreciable desviación sistemática respecto a los demás, debido al método de enrase visual.



c) Se observa que los puntos experimentales se ajustan muy bien a una línea recta, como estaba previsto. La pendiente de esta recta se puede obtener manualmente trazando la recta que más se aproxima a los puntos experimentales y leyendo en la gráfica las coordenadas de dos puntos alejados de dicha recta, por ejemplo los puntos A y B indicados en la figura anterior, escogidos en el cruce de dos líneas de división. Las coordenadas de estos puntos son:

$$(x_A;\, y_A) = (1{,}30\,\text{cm};\, 1178{,}0\,\text{g})$$

$$(x_B;\, y_B) = (11{,}20\,\text{cm};\, 1282{,}0\,\text{g})$$

Por tanto, la pendiente de la recta es

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{104{,}0\,\text{g}}{9{,}90\,\text{cm}} \qquad \boxed{p = 10{,}51\ \text{g/cm} = 1{,}051\ \text{kg/m}}$$

Un ajuste analítico, aplicando el método de mínimos cuadrados, conduce a un resultado muy similar

$$\boxed{p = 10{,}52\ \text{g/cm} = 1{,}052\ \text{kg/m}}$$

d) Según el modelo del enunciado, la pendiente de la recta M_{ap} frente a x es

$$p = \rho\frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{4p}{\pi D^2}$$

Empleando para los cálculos el último valor de la pendiente, se obtiene

$$\boxed{\rho = 1{,}034\,\text{g/cm}^3 = 1{,}034\times10^3\,\text{kg/m}^3}$$

e) En el enunciado se indica el diámetro del cilindro $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm, es decir con una incertidumbre $\Delta D = 0{,}1$ mm. La incertidumbre transmitida a la densidad, $\Delta\rho_D$, puede calcularse numéricamente a partir de los valores extremos del diámetro

$$D_{\min} = 3{,}59\ \text{cm} \qquad D_{\max} = 3{,}61\ \text{cm}$$

$$\Delta\rho_D = \frac{1}{2}(\rho_{\max} - \rho_{\min}) = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{1}{D_{\min}^2} - \frac{1}{D_{\max}^2}\right) \qquad \boxed{\Delta\rho_D = 0{,}006\ \text{g/cm}^3}$$

A este resultado también se puede llegar de una forma más elegante, aunque no más precisa, tomando incrementos (en valor absoluto) en la expresión de la densidad

$$\rho = \frac{4p}{\pi D^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho_D = 2\frac{4p}{\pi D^3}\Delta D = 2\rho\frac{\Delta D}{D} = 0{,}006\ \text{g/cm}^3$$

Nota: Un tratamiento de errores completo tendría también en cuenta la incertidumbre Δp de la pendiente de la recta ajustada, y su transmisión al error de la densidad, $\Delta\rho_p$. Pero los puntos experimentales están muy bien alineados, de forma que no es fácil realizar una estimación "manual" a partir de las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Habría que tener en cuenta las "barras de error" de cada punto experimental, que pueden estimarse a partir de la resolución del método de medida: $\Delta x \approx 1$ mm, $\Delta M_{ap} \approx 1$ g. Estas incertidumbres son relativamente pequeñas, del mismo orden que el radio de los puntos dibujados en la gráfica. Otra posibilidad razonable sería tener en cuenta el pequeño error que puede cometerse al trazar manualmente la mejor recta y, después, leer las coordenadas de los puntos A y B. En cualquiera de los dos casos, puede estimarse una incertidumbre en ordenadas del orden de un cuadrito de la gráfica

$$\Delta(y_B - y_A) = 1\ \text{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 0{,}09\ \text{g/cm}$$

El error típico de la pendiente, calculado analíticamente, es $\varepsilon_p = 0{,}03$ g/cm, de forma que el anterior Δp tiene un nivel de confianza muy alto, superior al 95%.

Como la densidad es directamente proporcional a la pendiente, se transmite la incertidumbre relativa:

$$\Delta\rho_p = \rho\frac{\Delta p}{p} = 0{,}009\ \text{g/cm}^3$$

En total, $\Delta\rho = \left(\Delta\rho_D^2 + \Delta\rho_p^2\right)^{1/2} \qquad \Delta\rho = 0{,}011\ \text{g/cm}^3$

PRUEBA EXPERIMENTAL B **(10 puntos)**

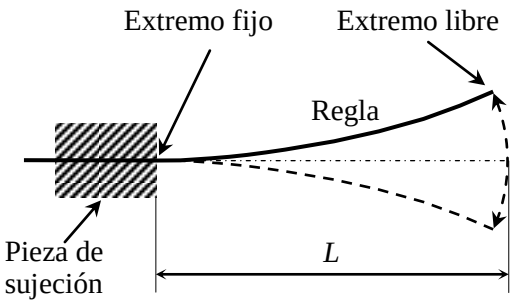
Estudio de la vibración transversal de una regla metálica.

Material.

- Regla metálica.
- Pieza de aluminio para sujetar la regla.
- "Sargento" (tornillo de mesa) para sujetar el sistema a la mesa.
- Flash periódico (estroboscopio), con fuente de alimentación externa.
- Multímetro con función frecuencímetro.
- Cartulina negra.

Fundamento teórico.

En este experimento se van a estudiar las oscilaciones transversales de una regla metálica en función de su longitud libre, L. En particular se estudiará el modo fundamental de vibración, con un nodo en el extremo fijo y un antinodo (vientre) en el extremo libre, como se esquematiza en la figura adjunta.



Se espera que la frecuencia de vibración de la regla, f, dependa de su longitud en la forma

$$f = K L^n , \qquad (1)$$

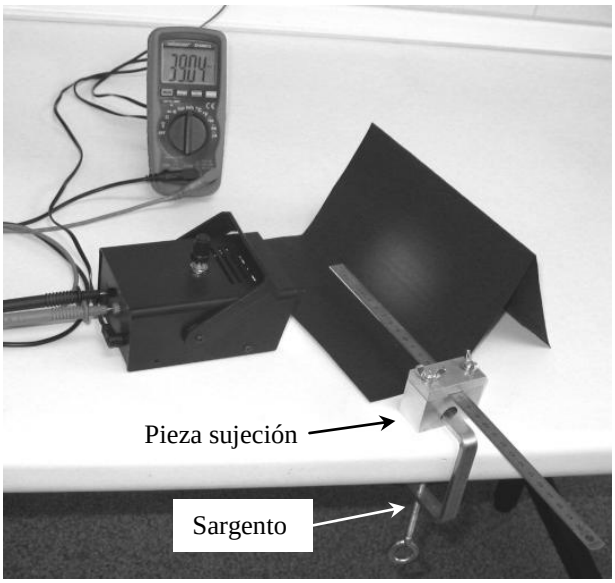
donde n es un número entero o semientero y K es una constante que depende del material y de las dimensiones transversales de la regla.

El objetivo de esta prueba es determinar los valores de n y K, midiendo f en función de L.

Procedimiento experimental

La pieza de aluminio permite sujetar la regla con una longitud libre ajustable, L. Para modificar esta longitud basta aflojar los dos tornillos ("palomillas") de su parte superior, deslizar la regla hasta la nueva longitud y volver a apretar los tornillos.

La pieza de aluminio se sujeta al borde de la mesa con el "sargento" (tornillo de mesa), como se indica en la fotografía adjunta.



La oscilación de la regla es demasiado rápida para poder cronometrar manualmente su periodo. Para medir la frecuencia de oscilación se va a recurrir a un sistema de iluminación *estroboscópica*: una fuente de luz emite pulsos luminosos periódicos muy breves, con una frecuencia, F, que se puede modificar. Cuando la frecuencia del estroboscopio coincida con la frecuencia de oscilación de la regla, es decir $F = f$, los sucesivos pulsos iluminarán la regla pasando por la misma posición, de forma que la regla se verá aparentemente quieta.

La regla también parecerá inmóvil cuando F sea un submúltiplo de f, es decir cuando $F = f/2,\ f/3,\ f/4...$, ya que en estos casos la regla realiza 2, 3, 4… oscilaciones completas entre dos pulsos sucesivos de luz. Por el contrario, si F es múltiplo de f, o sea $F = 2f, 3f...$, la regla se observará aparentemente quieta en 2, 3… posiciones de su oscilación.

La frecuencia del estroboscopio, F, puede modificarse con el potenciómetro de 10 vueltas en la parte superior del aparato, y medirse con el multímetro, actuando como frecuencímetro. Para ello, sitúe el selector del multímetro en la posición "Hz" y conecte las dos puntas de prueba a los terminales negro y rojo en la parte trasera del estroboscopio.

La fuente de alimentación del estroboscopio se conecta a la red eléctrica, y su salida (12 V) a la parte posterior del aparato.

Para mejorar el contraste de observación, el canto de la regla está pintado de blanco difusor, y conviene observar sobre un fondo oscuro. Dispone de una cartulina negra, que puede doblar y situar debajo y detrás de la regla, al otro lado del estroboscopio, como se muestra en la fotografía.

Dato: La precisión del frecuencímetro, en el rango hasta 99,99 Hz, es del ±1,5% de la lectura en pantalla.

Comentarios y consejos:

- La oscilación real de la regla es amortiguada, es decir, la amplitud de oscilación se reduce paulatinamente hasta que la regla se detiene en su posición de equilibrio. Por tanto, cuando F coincida con f, la regla no se observará completamente quieta, sino aproximándose lentamente a su posición de equilibrio.
- La regla debe estar bien colocada entre las dos partes de la pieza de sujeción de aluminio, dentro de la acanaladura de la parte inferior. La parte superior de la pieza debe ser paralela a la inferior, para que la regla esté uniformemente sujeta en toda su anchura.
- El sargento debe sujetar firmemente la pieza de aluminio a la mesa, para que no pueda vibrar.
- Cuando no esté tomando medidas, desconecte la alimentación del estroboscopio, para evitar que se sobrecaliente o su luz moleste a otros participantes.
- El multímetro se apaga automáticamente al cabo de unos minutos de funcionamiento. Para volver a encenderlo basta pulsar la tecla amarilla ("Mode").

Cuestiones.

a) Para una longitud libre de regla L = 14,0 cm, localice y anote todas las frecuencias de iluminación, F_1, F_2, F_3… para las que se observa la regla quieta en una o en dos posiciones. Busque en todo el rango de frecuencias del estroboscopio, entre aproximadamente 6 y 50 Hz. De todas estas frecuencias, ¿cuál es la frecuencia f de oscilación de la regla? (2 puntos)

b) Haga una serie de medidas de la frecuencia f de oscilación de la regla en función de su longitud L, entre L_{min} = 10,0 cm y L_{max} = 22,0 cm. (2 puntos)

c) A partir de las medidas anteriores, con la gráfica y el ajuste que considere oportunos, deduzca el valor del exponente n en la ecuación (1). (2 puntos)

d) Determine el valor de la constante K de la regla, con la gráfica y el ajuste que considere oportunos, teniendo en cuenta que el valor de n debe ser entero o semientero. (2 puntos).

e) Haga una estimación de la incertidumbre de esta constante, ΔK. (2 puntos).

PRUEBA EXPERIMENTAL B

Estudio de la vibración transversal de una regla metálica. Solución

a) Con L = 14,0 cm, barriendo desde bajas frecuencias de iluminación, se observa la regla quieta para

$$F_1 = 7{,}17 \text{ Hz}, \quad F_2 = 10{,}72 \text{ Hz}, \quad F_3 = 21{,}45 \text{ Hz}.$$

Y se observa doble para

$$F_4 = 42{,}98 \text{ Hz}.$$

Como era de esperar, estos cuatro valores siguen, aproximadamente, la proporción 1/3 : 1/2 : 1 : 2, de forma que la frecuencia de oscilación de la regla para esta longitud es $f = F_3 = 21{,}45$ Hz.

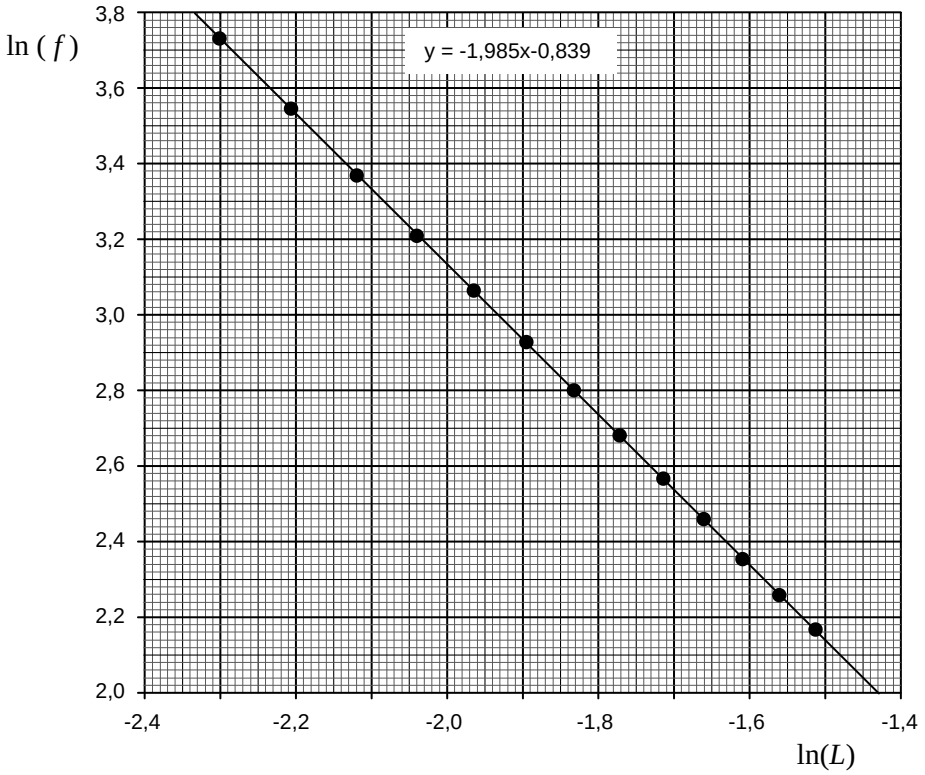
b) Las medidas sistemáticas de f en función de L se presentan en la siguiente tabla, junto con otros valores que se necesitarán más adelante.

L (m)	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190	0,200	0,210	0,220
f (Hz)	41,76	34,70	29,03	24,75	21,42	18,71	16,47	14,59	13,04	11,70	10,53	9,56	8,74
ln(L)	-2,303	-2,207	-2,120	-2,040	-1,966	-1,897	-1,833	-1,772	-1,715	-1,661	-1,609	-1,561	-1,514
ln(f)	3,732	3,547	3,368	3,209	3,064	2,929	2,802	2,680	2,568	2,460	2,354	2,258	2,168
$1/L^2$ (m^{-2})	100,00	82,64	69,44	59,17	51,02	44,44	39,06	34,60	30,86	27,70	25,00	22,68	20,66

c) Para linealizar la ecuación (1) del enunciado basta tomar logaritmos (en cualquier base)

$$\ln(f) = \ln(K) + n\ln(L) \qquad (2)$$

Por tanto, la n buscada es la pendiente de una gráfica de ln(f) frente a ln(L). A continuación se presenta esta gráfica, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado (a pequeña escala).



Los puntos están bien alineados, como se esperaba. La pendiente de la recta, calculada por el método de mínimos cuadrados es $p = -1{,}985$, por lo que el exponente entero o semientero buscado es, evidentemente,

$$\boxed{n = -2}$$

Es decir, la dependencia entre f y L es de la forma

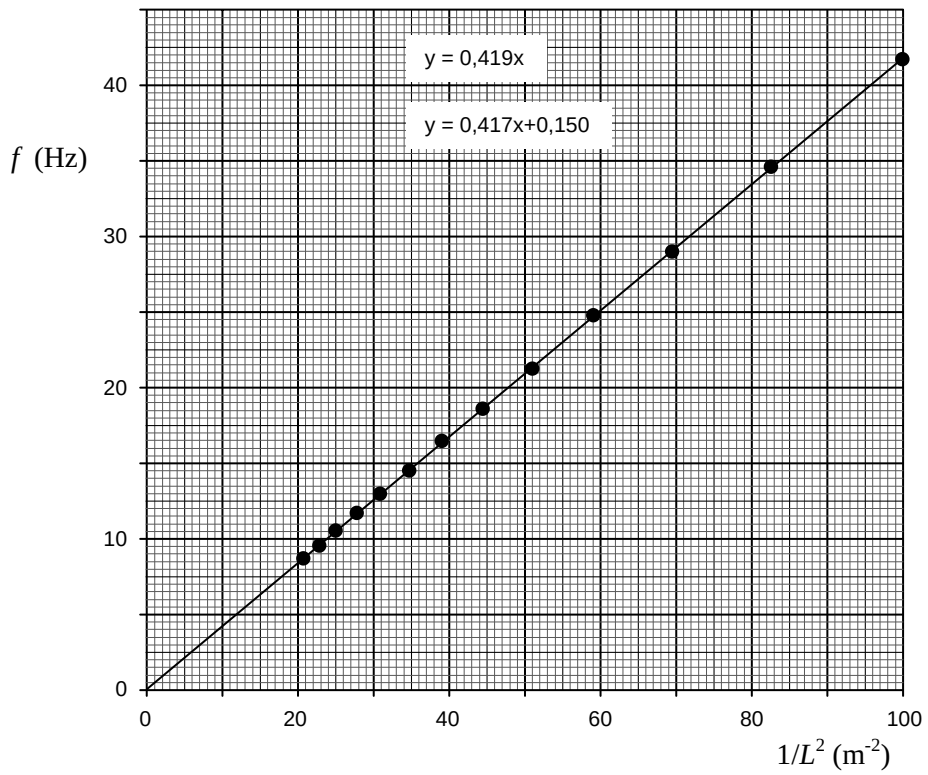
$$f = \frac{K}{L^2} \qquad (3)$$

d) Una primera aproximación al valor de la constante K puede obtenerse a partir del ajuste anterior, puesto que, de acuerdo con (2), la ordenada en el origen de la recta es

$$\ln(K) = -0{,}839 \qquad \Rightarrow \qquad K = 0{,}432 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Este resultado procede de un ajuste con n próximo a -2, pero no exactamente igual a este valor, de forma que el valor de K que se obtiene arrastra una pequeña desviación.

Es más exacto volver al modelo teórico planteado en el enunciado con $n = -2$, es decir asumir la dependencia (3), de forma que K es la pendiente de f frente a $1/L^2$. En la siguiente gráfica se comprueba que los correspondientes puntos experimentales se ajustan muy bien a una línea recta que pasa por el origen, con pendiente $p = 0{,}419$ m^2 s^{-1}. Si se deja libre la ordenada en el origen, la pendiente que se obtiene es casi la misma, con tres cifras significativas: $p = 0{,}417$ m^2 s^{-1}.



Considerando el primer ajuste como más fiable, pues se adapta al modelo propuesto, la constante buscada es

$$\boxed{K = 0{,}419 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

e) La incertidumbre de esta constante, ΔK, coincide con la incertidumbre de la pendiente de la gráfica anterior. Para hacer una estimación manual deben trazarse las dos rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Como la dispersión de los puntos respecto a la recta óptima es casi nula (el error típico de la pendiente es $\varepsilon_p = 0{,}0006\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, es decir sólo un 0,14%) hay que recurrir a una estimación de la incertidumbre de cada punto, es decir de las "barras de error" de estos puntos.

En el eje horizontal, la incertidumbre absoluta y relativa de $1/L^2$ puede calcularse en la forma

$$\Delta\left(\frac{1}{L^2}\right) = 2\frac{\Delta L}{L^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\left(1/L^2\right)}{1/L^2} = 2\frac{\Delta L}{L}$$

La precisión de la longitud L puede estimarse, siendo algo pesimistas, en $\Delta L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, lo que da un error relativo porcentual, $100\Delta L/L$, entre el 0,5% para L = 10 cm y el 0,23% para L = 22 cm. El error relativo transmitido a la variable $1/L^2$ es el doble, es decir entre el 1%, para los valores más altos de $1/L^2$, y el 0,5% para los más bajos. Es de esperar que estos errores sean aleatorios, por lo que su influencia en la pendiente de la recta será inferior al 1%.

En cuanto a la incertidumbre de la frecuencia f, en el eje vertical, viene dada directamente por la precisión del frecuencímetro: 1,5%. Esta posible desviación, debida a una inexacta calibración del aparato, es sistemática.

En total, una estimación razonable para la incertidumbre de la pendiente de la recta, y por tanto del valor de la constante K, podría ser de un 2%, con lo que

$$\boxed{\Delta K = 0{,}008\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}}$$

Nota sobre la constante K:

Puede demostrarse que esta constante viene dada por

$$K = 0{,}1615\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\,b$$

donde Y y ρ son el módulo de Young y la densidad del material, y b es el grosor de la regla.

En nuestro caso, la regla es de acero, con

$$Y \approx 2{,}1\times10^{11}\,\mathrm{Pa}$$

$$\rho \approx 7{,}8\times10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$b = 0{,}50\ \mathrm{mm}$$

Con lo que se obtiene

$$K \approx 0{,}42\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

El resultado experimental de nuestra prueba es perfectamente acorde con este valor.

Introducción común a los problemas P1 y P2

Para explicar la conservación de la energía y del momento lineal en la desintegración β, el físico austriaco Wolfgang Pauli predijo en 1930 la existencia de una partícula de masa nula o prácticamente nula, sin carga eléctrica y con una interacción muy débil con la materia, por lo tanto muy difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi le dio el nombre de *neutrino*. En 1956, Clyde Cowan y Frederick Reines comprobaron experimentalmente su existencia. Desde entonces el interés por los neutrinos ha sido creciente, hasta el punto de llegar a convertirse en piezas fundamentales para entender el Universo en su escala más pequeña, y en elementos básicos para investigar algunos de los problemas candentes de la Astrofísica y de la Cosmología.

Los neutrinos, por carecer de carga, no son desviados por los campos electromagnéticos y apenas son perturbados por la materia que cruzan en su camino. De hecho, enormes cantidades de neutrinos procedentes del cosmos y, en particular del Sol, atraviesan la Tierra cada segundo. Sin embargo, sólo unos pocos interaccionan con algún núcleo dando como resultado la producción de otras partículas: electrones, muones y tauones.

Como más adelante se explica, estas partículas cargadas, si son suficientemente energéticas, provocan la emisión de una luz azulada conocida como *radiación de Cherenkov* (luz característica en las piscinas de almacenamiento de material irradiado de las centrales nucleares). Si el medio en el que se propagan es transparente, como agua o hielo de gran pureza, esta luz se puede detectar y su medida constituye un método indirecto para la detección de neutrinos. Este es el fundamento de buena parte de los observatorios de neutrinos existentes en el mundo. Como la probabilidad de que algún neutrino sea "cazado" es tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño y la masa de los detectores, los "observatorios" de neutrinos son gigantescas instalaciones y su construcción constituye un inmenso reto tecnológico.

En estos ejercicios, de forma muy simplificada, se hace alusión al mayor de ellos, el IceCube Neutrino Observatory, situado en la Antártida, en la base Amundsen-Scott, cercana al Polo Sur geográfico. En este laboratorio se presta especial atención a los muones generados por los neutrinos ya que, mediante un complejo sistema de adquisición de datos, se puede determinar la dirección de propagación y energía de los neutrinos que los han producido.

Básicamente, el IceCube es una red tridimensional de detectores, llamados DOM (Digital Optical Module). Tienen forma esférica y se alojan distribuidos en 86 pozos excavados en el hielo austral. Cada DOM alberga un fotomultiplicador y los equipos electrónicos asociados. Estos se disponen formando cadenas, como se muestra en la figura 1, y están situados a una profundidad entre 1450 m y 2450 m, donde el hielo es extraordinariamente puro y transparente.

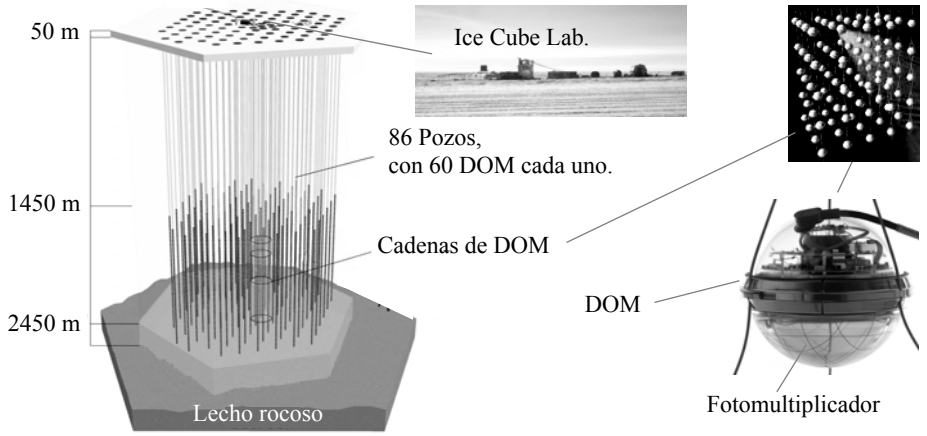


Fig. 1

Problema 1. A la caza del neutrino[1] (7 puntos)

a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

a1) Cada pozo tiene una profundidad media $H = 2{,}40\times10^{3}$ m y un radio $r = 0{,}30$ m, y la temperatura media del hielo a fundir es $T_h = -30\,^{\circ}\mathrm{C}$. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo, $E_{\min}$, y calcule su valor.

b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones (^{1}H) que dan lugar a la formación de núcleos de ^{4}He y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

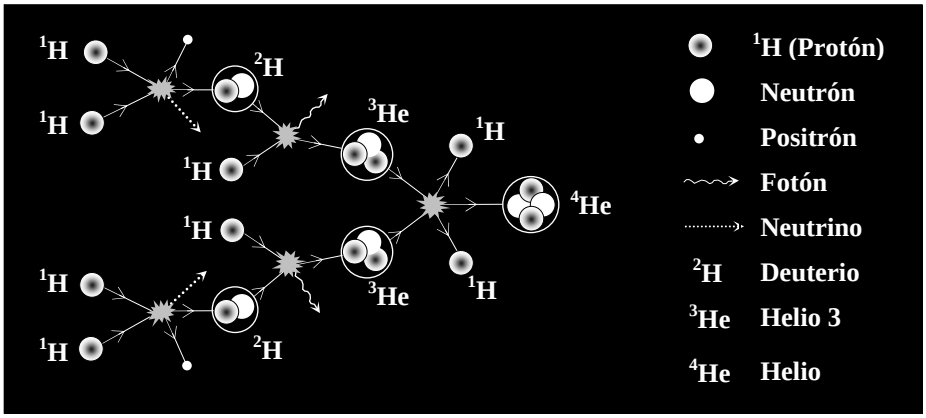


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una perdida de masa Δm que da lugar a una liberación de energía ΔE. Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

b1) Escriba la expresión para Δm y calcule la energía liberada en cada ciclo pp, ΔE.

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*, u_S. Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es $u_S = 1{,}366\,\mathrm{kW/m^2}$

b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo, N_ν.

[1] Este ejercicio está dedicado a la Dra. María Luisa Sarsa, su inspiradora, que forma parte del equipo investigador del Laboratorio Subterráneo de Canfranc (Huesca, España). Desde la Antártida, el ejercicio ha sido supervisado por el Dr. Carlos Pobes, español adscrito a la Universidad de Wisconsin – Madison y *Winter Over* del experimento IceCube

c) Neutrinos y muones.

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media[2], medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es $\tau_0 = 2{,}2\ \mu\text{s}$.

c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón, v_μ, en función de su masa m_μ, de su energía E_μ y de la velocidad de la luz en el vacío, c. Calcule su valor cuando la energía del muón es $E_\mu = 1{,}5\times10^3\ \text{MeV}$.

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para "descontarlos", ya que no han sido originados por neutrinos.

c2) Calcule la distancia d_μ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2{,}11\times10^3\ \text{J}/(\text{kg K})$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3{,}34\times10^5\ \text{J/kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9{,}17\times10^2\ \text{kg/m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{\text{ST}} = 1{,}49\times10^{11}\ \text{m}$
Masa del protón (^{1}H)	$m_{^1\text{H}} = 1{,}67\times10^{-27}\ \text{kg}$
Masa del núcleo de Helio (^{4}He)	$m_{^4\text{He}} = 6{,}64\times10^{-27}\ \text{kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9{,}11\times10^{-31}\ \text{kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207\, m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00\times10^8\ \text{m/s}$
$1\ \text{eV} = 1{,}60\times10^{-19}\ \text{J}$	

Ayuda
Energía mecánica relativista de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v: $E = \gamma\, m c^2$, donde $\gamma = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma\, \tau_0$

[2] La vida media es el promedio de vida de una partícula antes de desintegrarse.

Solución P1

a1) La energía mínima necesaria para fundir el hielo de uno de los pozos es la requerida para transformar la masa de hielo M_h, que se encuentra a una temperatura media $T_h = -30\,^{\circ}\mathrm{C}$, en agua a $T_a = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Es decir,

$$E_{min} = C_h\, M_h (T_a - T_h) + L_h\, M_h$$

Como $M_h = \pi\, r^2\, H\, \rho_h$, resulta

$$\boxed{E_{min} = \pi\, r^2\, H\, \rho_h [C_h (T_a - T_h) + L_h]} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\min} = 2{,}47 \times 10^{11}\ \mathrm{J}}$$

b1) En cada ciclo pp, representado en la figura 2, intervienen 6 protones, pero en la fusión de los núcleos de Helio 3 se liberan dos. Luego la masa inicial y final en el proceso es:

$$M_{\mathrm{inicial}} = 6\, m_{{}^1\mathrm{H}}$$

$$M_{final} = 2\, m_{{}^1\mathrm{H}} + m_{{}^4\mathrm{He}}$$

Como $M_{final} - M_{\mathrm{inicial}} < 0$, la pérdida de masa Δm es:

$$\boxed{\Delta m = 4\, m_{{}^1\mathrm{H}} - m_{{}^4\mathrm{He}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = 4{,}00 \times 10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

Por lo que la energía liberada en cada ciclo pp es

$$\Delta E = \Delta m\, c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E = 3{,}60 \times 10^{-12}\ \mathrm{J}}$$

b2) La energía que emite el Sol cada segundo, se calcula como el producto de la constante solar por el área de la superficie esférica de radio la distancia Sol-Tierra,

$$W_S = 4\pi\, R_{\mathrm{ST}}^2\, u_S \quad \Rightarrow \quad W_S = 3{,}81 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$$

Aceptando que esta energía proviene exclusivamente de la emitida en los ciclos pp, y como en cada ciclo se emiten dos neutrinos, el número de neutrinos emitidos por segundo, N_ν, es

$$N_\nu = 2\,\frac{W_S}{\Delta E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_\nu = 2{,}12 \times 10^{38}\ \text{neutrinos/s}}$$

c1) La energía mecánica relativista del muón es $E_\mu = \gamma\, m_\mu\, c^2$. Por tanto, la velocidad del muón es

$$\boxed{v_\mu = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu\, c^2}{E_\mu}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_\mu = 0{,}998\, c = 2{,}99 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}$$

c2) La vida media del muón medida por un observador en la Tierra (tiempo dilatado), τ, es

$$\tau = \tau_0\, \gamma \quad \Rightarrow \quad \tau = 3{,}11 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

Luego la distancia que, en promedio, recorre un muón originado en la alta atmósfera hasta que se desintegra, medida en el sistema de referencia de la Tierra, es

$$d_\mu = v_\mu\, \tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_\mu = 9{,}31 \times 10^3\ \mathrm{m}}$$

P1. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a1	$E_{min} = \pi r^2 H \rho_h \left[C_h \left(T_a - T_h \right) + L_h \right]$	$E_{min} = 2{,}47 \times 10^{11}$ J	0,7 + 0,3
b1	$\Delta m = 4 m_{^1\mathrm{H}} - m_{^4\mathrm{He}}$	$\Delta E = 3{,}60 \times 10^{-12}$ J	1 + 0,5
b2		$N_\nu = 2{,}12 \times 10^{38}$ neutrinos/s	2
c1	$v_\mu = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{E_\mu} \right)^2}$	$v_\mu = 0{,}998 c = 2{,}99 \times 10^8$ m/s	1+ 0,5
c2		$d_\mu = 9{,}31 \times 10^3$ m	1

Problema 2. La detección indirecta de los neutrinos en el IceCube. (7 puntos)

a) La radiación de Cherenkov.

En las escasas interacciones de los neutrinos con los núcleos del hielo antártico, se originan *muones* que son partículas cargadas relativistas, es decir que viajan con una velocidad próxima a la de luz en el vacío, *c*. Por tener carga eléctrica, excitan a los átomos de la materia (hielo, en este caso) que encuentran a su paso. Los átomos excitados vuelven casi inmediatamente a su estado fundamental emitiendo luz (radiación de Cherenkov), que se propaga en el hielo con una velocidad menor que *c*. El hielo tiene un índice de refracción, n_h, dado en la Tabla de Constantes Físicas. La región de emisión (no los átomos) se desplaza con el muón, a velocidad mayor que la de la luz en el hielo. En virtud del principio de Huygens-Fresnel, el frente de onda luminoso resultante es una superficie cónica, como se representa en la figura 3.

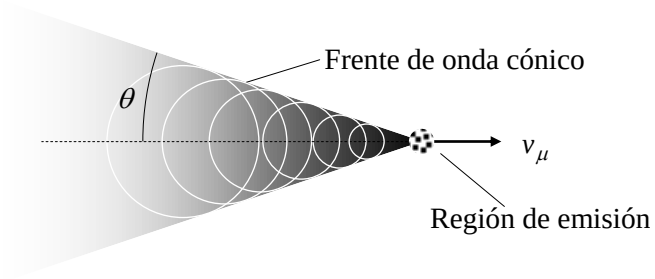


Fig. 3

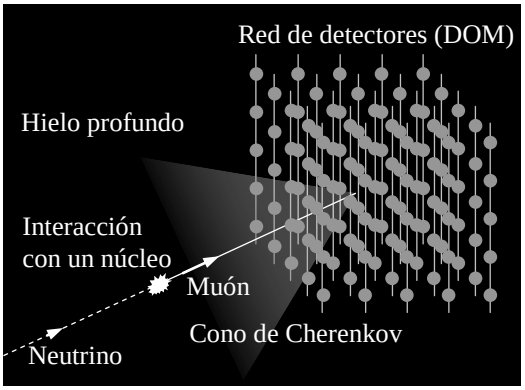


Fig. 4

a1) Escriba la expresión y calcule el semiángulo θ del frente de onda cónico en función de v_μ y de n_h.

b) La detección de la luz de Cherenkov.

La detección de la luz Cherenkov en el IceCube, que constituye la forma indirecta de detección de los neutrinos, se lleva a cabo mediante los 5160 DOM alojados en el hielo profundo (figura 4). En cada DOM existe un *fotomultiplicador* que transforma los fotones de luz de Cherenkov en una señal eléctrica que, una vez digitalizada, se envía al centro de control para ser registrada y analizada.

Aunque los fotomultiplicadores empleados en los DOM tienen una geometría diferente, son básicamente análogos al representado en la figura 5. Un fotomultiplicador consta de un *fotocátodo* que, por efecto fotoeléctrico, emite electrones (*fotoelectrones*) cuando sobre él inciden fotones de energía igual o mayor que la *función de trabajo* (o *energía de extracción*) del material con el que está construido. Un campo eléctrico acelera estos electrones y los dirige hacia un ánodo, que en estos dispositivos recibe el nombre de *dínodo*. La energía de los electrones incidentes provoca la emisión de un número mayor de *electrones secundarios* que son dirigidos hacia un segundo dínodo. El número de dínodos, su disposición y las diferencias de potencial existentes entre ellos, varían con el modelo de fotomultiplicador.

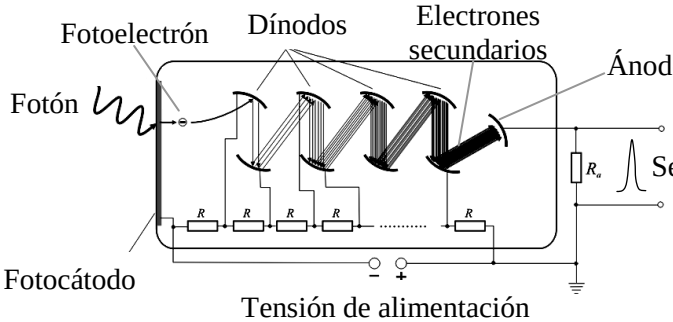


Fig. 5

Al final, tras este proceso en cascada, donde el número de fotoelectrones es multiplicado por las emisiones secundarias, la señal de salida que se obtiene en el último dínodo (ánodo propiamente dicho), es proporcional al número de fotones incidentes en el fotocátodo.

b1) Teniendo en cuenta la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, determine la función de trabajo del material del fotocátodo, Φ, para que un fotón de luz de Cherenkov, de longitud de onda en el vacío $\lambda = 420$ nm, sea capaz de extraer un electrón.

b2) Si el número de fotones de longitud de onda λ que inciden por unidad de tiempo en el fotocátodo es N_f, determine la energía por unidad de tiempo (potencia, P_f) que estos fotones depositan en el fotocátodo.

Las principales características técnicas de los fotomultiplicadores son: el número de dínodos, *n*, la *eficiencia cuántica* (Quantum Efficiency), la *sensibilidad radiante* y la *ganancia*.

La eficiencia cuántica, *QE*, es el porcentaje del número de electrones que salen del fotocátodo por segundo, N_e, respecto al número de fotones que inciden por segundo, N_f.

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

La sensibilidad radiante, *S*, para una determinada longitud de onda de la luz incidente, es el cociente entre la intensidad de corriente que sale del fotocátodo, I_e, y la potencia de la radiación de fotones que inciden en el fotocátodo, P_f.

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

La ganancia, *G*, se define como el cociente entre la intensidad de corriente que llega al ánodo, I_a, y la que sale del fotocátodo, I_e.

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

b3) Determine la expresión de la ganancia *G* del fotomultiplicador en función del número de dínodos, *n*. Considere que en cada dínodo, en promedio, se producen δ electrones secundarios por cada electrón incidente. Calcule δ para un fotomultiplicador de 10 dínodos con una ganancia $G = 1{,}0 \times 10^9$.

b4) Obtenga la expresión que relaciona la eficiencia cuántica, *QE*, con la sensibilidad radiante, *S*.

b5) Los fotomultiplicadores empleados en el IceCube tienen una ganancia $G = 1{,}0 \times 10^9$ y una eficiencia cuántica $QE = 25$. Si inciden fotones Cherenkov de longitud de onda $\lambda = 420$ nm, calcule la relación entre la intensidad de corriente I_a que sale del ánodo y la potencia P_f de la radiación incidente.

Constantes físicas	
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00 \times 10^8$ m / s
Índice de refracción del hielo	$n_{\mathrm{h}} = 1{,}32$
Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s
Carga elemental	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C

Solución P2

a1) En un cierto instante, el conjunto de átomos excitados por el muón están en el punto A de la figura 6. Al cabo de un cierto tiempo *t*, la luz que emiten alcanza los puntos de una esfera de radio igual a $c_h\, t$.

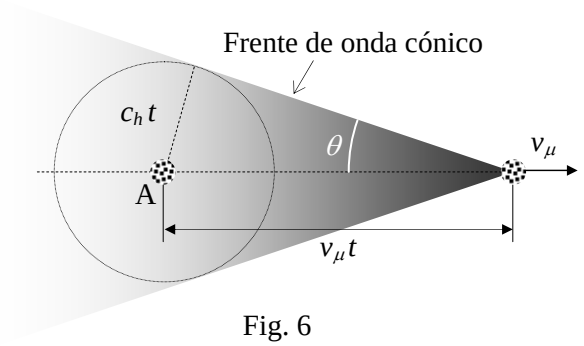


Fig. 6

En ese tiempo, la región con átomos excitados se ha desplazado una distancia $v_\mu\, t$. En instantes intermedios los frentes de onda de la luz emitida son esferas de radio proporcionalmente menor. De acuerdo con el principio de Huygens-Fresnel, el frente de ondas resultante es la envolvente de los frentes secundarios, precisamente la superficie cónica representada.

De la figura 5,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{c_h\, t}{v_\mu\, t} \qquad \text{y como} \qquad n_h = \frac{c}{c_h}, \quad \text{se tiene}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{c}{n_h\, v_\mu}$$

De donde, finalmente

$$\boxed{\theta = \text{arsen}\left(\frac{c}{n_h\, v_\mu}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta = 49{,}4^\circ}$$

b1) La ecuación de Einstein para la emisión fotoeléctrica es

$$h\, f = \Phi + E_c$$

Donde *h* es la constante de Planck, *f* la frecuencia del fotón, Φ la función de trabajo y E_c la energía cinética de los electrones emitidos.

Para que un fotón extraiga, sin energía cinética, un electrón del fotocátodo, la función de trabajo deberá ser

$$\Phi = h\, f = h\frac{c}{\lambda} \;\Rightarrow \qquad \boxed{\Phi = 4{,}74\times10^{-19}\ \text{J} = 2{,}96\ \text{eV}}$$

b2) Si al fotocátodo inciden N_f fotones por unidad de tiempo y cada uno de ellos transporta una energía $h\, f = hc/\lambda$, la potencia que depositan es

$$\boxed{P_f = N_f\, \frac{h\, c}{\lambda}} \qquad (1)$$

b3) El fotoelectrón que alcanza el primer dínodo, produce δ electrones secundarios. Cada uno de estos, cuando alcanzan el 2º dínodo producirán δ electrones secundarios; es decir, del 2º dínodo saldrán δ^2 electrones, y así sucesivamente. El número de electrones que alcanzan el ánodo, procedentes del n-esimo dínodo será δ^n. Por lo tanto, la ganancia es

$$\boxed{G = \delta^n}$$

Por tanto,

$$\delta = G^{1/n}$$

Si $n = 10$ y $G = 1.0 \times 10^9$, resulta

$$\boxed{\delta = 7{,}94 \approx 8}$$

b4) Por una parte, tal como dice el enunciado, la eficiencia cuántica es

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100 \qquad (2)$$

donde N_e y N_f son, respectivamente, el número de fotoelectrones emitidos por segundo y el número de de fotones, de una determinada longitud de onda, que inciden por segundo en el fotocátodo.

Por otra parte, la sensibilidad radiante, para una determinada longitud de onda de los fotones de la luz incidente, viene dada por la relación entre la corriente de fotoelectrones que llegan al ánodo, I_e, y la potencia de la radiación de fotones que llegan al fotocátodo, P_f.

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

Teniendo en cuenta (1) y que la corriente de fotoelectrones es $I_e = e\, N_e$, se puede escribir

$$S = \frac{N_e\, e}{N_f\, hc} \lambda \qquad (3)$$

Eliminando el cociente N_e / N_f entre (2) y (3), resulta finalmente

$$\boxed{QE = 100 \frac{hc}{e\lambda} S} \qquad (4)$$

b5) Dado que $G = I_a / I_e$ y $S = I_e / P_f$, se puede escribir

$$S = \frac{I_a}{G\, P_f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I_a}{P_f} = G\, S$$

La sensibilidad radiante *S* para una longitud de onda λ se obtiene de (4).

$$\frac{I_a}{P_f} = QE \frac{e}{100\, hc} G \lambda$$

Si $QE = 25$, $\lambda = 420\ \text{nm} = 4{,}20 \times 10^{-7}$ m y $G = 1{,}0 \times 10^9$, el valor de la relación entre la intensidad de corriente de salida y la potencia de la luz que incide en el fotocátodo resulta

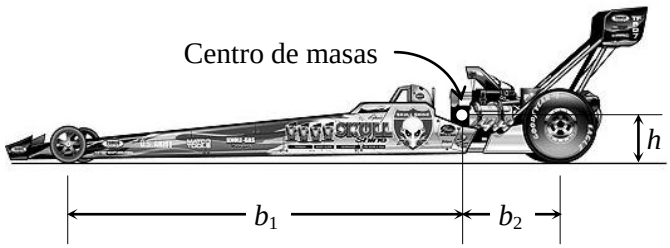
$$\boxed{\frac{I_a}{P_f} = 8{,}45 \times 10^7\ \text{A/W}}$$

P 2. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a1	$\theta = \text{arsen}\left(\frac{c}{n_h v_\mu}\right)$	$\theta = 49{,}4\,^{\text{o}}$	0,7+ 0,3
b1		$\Phi = 4{,}74\times10^{-19}$ J = 2,96 eV	1
b2	$P_f = N_f \frac{hc}{\lambda}$		1,5
b3	$G = \delta^n$	$\delta = 7{,}94 \approx 8$	0,7+ 0,3
b4	$QE = 100\frac{hc}{e\lambda}S$		1,5
b5		$\frac{I_a}{P_f} = 8{,}45\times10^{7}$ A/W	1

Problema 3. ***Dragster*** [1]**.** **(8 puntos)**

Los *dragster* son una especie de coches alargados que compiten en carreras de aceleración, en las que en cortos recorridos rectos alcanzan elevadas velocidades en pocos segundos. En la fotografía adjunta de uno de estos engendros, se muestra con un círculo blanco la posición del centro de masas y algunos parámetros geométricos que necesitaremos.



Aunque juegan un papel muy importante, para simplificar el problema, no se va a tener en cuenta la influencia de los elementos aerodinámicos (alerones) que hay tanto en la parte anterior como en la posterior del dragster. Se considera que en todo momento las ruedas motrices ruedan sin deslizar.

La fuerza de rozamiento entre la pista y las ruedas motrices (las posteriores, naturalmente) es la que hace avanzar el coche. Lógicamente, para que la aceleración sea máxima interesa que dicha fuerza de rozamiento lo sea también.

a) Haga un dibujo esquemático del dragster indicando las fuerzas exteriores que actúan sobre él durante el proceso de aceleración.

b) Sin tener en cuenta ningún tipo de fuerza de resistencia, salvo la de rozamiento con la pista, y tomando como coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}90$ y como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, obtenga la expresión de la aceleración máxima del vehículo, $a_{\max}$, y calcule su valor.

La distribución de las fuerzas, es decir las relaciones entre b_1, b_2 y h son determinantes para lograr la máxima aceleración.

c) Determine la relación que debe existir entre b_2 y h para que la aceleración sea máxima sin que el dragster haga el "caballito", es decir, manteniendo las cuatro ruedas sobre el suelo durante todo el recorrido.

d) Si la longitud de la pista es $L = 400\ \text{m}$, determine las expresiones de la velocidad al final del recorrido, V_f, y del tiempo transcurrido en el recorrido, T_f, y calcule sus valores. Considere que en todo momento el vehículo se mueve con la aceleración máxima.

Una vez recorrida la pista de aceleración, cuando se supone que su velocidad es la máxima, V_f, los dragster despliegan un paracaídas[2] para frenar. La fuerza de resistencia que ejerce el paracaídas es:

$$F_R = \frac{1}{2}\rho S C_D v^2$$

En la que *v* es la velocidad del dragster, $\rho = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$ es la densidad del aire, $S = 3{,}0\ \text{m}^2$ la superficie que el paracaídas presenta al flujo de aire y $C_D = 1{,}2$ un coeficiente, llamado *de forma*, que supondremos independiente de la velocidad.

e) Si la masa del dragster es $M = 1{,}5\times10^3\ \text{kg}$ y despreciando cualquier otra fuerza de rozamiento, determine el tiempo T_p que transcurre desde que el piloto abre el paracaídas hasta que la velocidad del dragster se reduce en un 50%, es decir a un valor $V_p = V_f / 2$.

Ayuda: $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

[1] "Classical Mechanis. A Modern Perspective", V. Barger y M. Olsson. McGraw-Hill. 1994

[2] Suelen ser dos paracaídas en paralelo pero, para simplificar, supondremos que es uno.

Solución P3

a) Considerando como sistema mecánico el propio dragster y suponiendo que su masa es M, las únicas fuerzas exteriores que actúan sobre él son el peso Mg, las fuerzas de rozamiento F_{r1} y F_{r2}, y las reacciones normales N_1 y N_2. Naturalmente y de acuerdo con el enunciado, no se contemplan las fuerzas aerodinámicas en los alerones ni la resistencia del aire.

En la figura 1 se representa esquemáticamente un dragster y se indica la posición del centro de masas, los parámetros geométricos característicos y las fuerzas exteriores antes mencionadas.

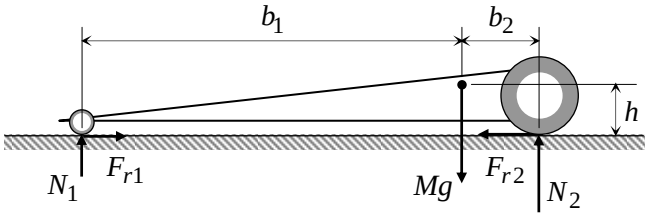


Fig. 1

b) La única fuerza que impulsa al artefacto es la fuerza de rozamiento F_{r2} que actúa sobre las ruedas motrices traseras, por tanto, definiendo como positiva la dirección hacia la izquierda, la fuerza neta horizontal es

$$F = F_{r2} - F_{r1}$$

por lo que, en virtud de la 2ª ley de Newton,

$$Ma = F_{r2} - F_{r1}$$

La aceleración del dragster será máxima cuando F_{r2} sea máxima y F_{r1} mínima, es decir

$$(F_{r2})_{\max} = \mu N_2$$

que corresponde a la rodadura pura de la ruedas motrices (en la práctica la rueda "desliza", patina sobre la pista, se calienta y desprende una gran humareda).

$$(F_{r1})_{\min} = 0$$

Esto significa que las ligeras ruedas delanteras pierden el contacto con la pista[1], es decir, $N_1 = 0$. En esta situación límite, el "coche" está a punto de hacer el "caballito". De hecho, frecuentemente lo hacen, llegando incluso a volcar.

$$Ma_{\max} = \mu N_2 = \mu Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{\max} = \mu g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{\max} = 8{,}8\,\mathrm{m/s^2}}$$

c) En estas condiciones óptimas, el dragster debe avanzar manteniéndose horizontal, por lo que, en todo su recorrido, la velocidad angular de giro en torno a su centro de masas debe ser constantemente nula y, por consiguiente, nula su aceleración angular. Para que esto ocurra, el momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas tiene que ser cero, de donde se deduce la relación geométrica que se pide,

---

[1] Lógicamente esta condición se alcanzará tanto más fácilmente cuando, con el dragster en reposo, la normal N_1 sea lo menor posible. De acuerdo con ello, las condiciones de equilibrio imponen, por una parte, que $N_1 + N_2 = Mg$ y por otra, que el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas sea nulo, esto es, $N_1 b_1 - N_2 b_2 = 0$. De estas expresiones se deduce que, cuando el "coche" está en reposo, la reacción normal en las ruedas delanteras es $N_1 = Mg\, b_2 / (b_1 + b_2)$.

La reacción N_1 será tanto menor cuanto mayor sea $b_1 + b_2$ y cuanto menor sea b_2. Lógicamente la distancia b_2 no puede ser nula lo que implica que b_1 ha de ser suficientemente grande, o lo que es igual, el diseño del dragster debe ser muy alargado y con la mayor parte del peso (motor, piloto etc), y el eje de las ruedas traseras lo más atrasados posible.

$$F_{r2}\,h - N_2\,b_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu\,N_2\,h - N_2\,b_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{b_2}{h} = \mu}$$

d) Como la aceleración es constante y el dragster parte del reposo, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} v &= a_{\max}\,t \\ x &= \frac{1}{2}\,a_{\max}\,t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} V_{fin} &= a_{\max}\,T_f \\ L &= \frac{1}{2}\,a_{\max}\,T_f^2 \end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $a_{\max}$, resulta

$$\boxed{V_f = \sqrt{2L\mu\,g}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_f = 84\ \text{m/s} \approx 300\ \text{km/h}}$$

$$\boxed{T_f = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_f = 9{,}5\,\text{s}}$$

e) En las condiciones que establece el enunciado para el proceso de frenado con paracaídas, por la 2ª ley de Newton se tiene que

$$M\,\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho\,S\,C_D\,v^2 = -K\,v^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v^2} = -\frac{K}{M}\,dt$$

Tomando ahora como instante inicial el de apertura del paracaídas cuando la velocidad del dragster es V_f y como instante final T_p en el que la su velocidad es V_p ,

$$\int_{V_f}^{V_p} \frac{dv}{v^2} = -\frac{K}{M}\int_0^{T_p} dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_p} = -\frac{K}{M}\,T_P$$

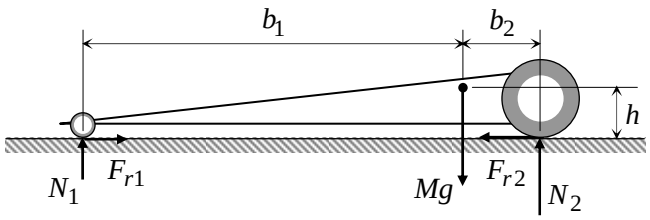
De donde

$$T_p = \frac{M\left(V_f - V_p\right)}{K\,V_f\,V_p} = \frac{2M}{\rho\,S\,C_D}\,\frac{V_f - V_p}{V_f\,V_p}$$

Como $V_p = V_f\,/\,2$, tal como indica el enunciado, resulta finalmente

$$\boxed{T_p = \frac{2M}{\rho\,S\,C_D\,V_f}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_p = 8{,}3\,\text{s}}$$

P3. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a	 Fig. 1		2,0
b	$a_{max} = \mu g$	$a_{\max} = 8{,}8\,\mathrm{m/s^2}$	0,7+0,3
c	$\frac{b_2}{h} = \mu$		1,5
d	$V_f = \sqrt{2L\mu g}$ $T_f = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}$	$v_f = 84\ \mathrm{m/s} \approx 300\ \mathrm{km/h}$ $T_f = 9{,}5\,\mathrm{s}$	1,75 +0,75
e	$T_p = \frac{2M}{\rho S C_D V_f}$	$T_p = 8{,}3\,\mathrm{s}$	0,75+0,25

Problema 4. La bobina de inducción o carrete de Ruhmkorff. (8 puntos)

La bobina de inducción construida por Ruhmkorff en 1851, antes del invento de los transformadores propiamente dichos, es un dispositivo destinado a producir en un circuito secundario una fuerza electromotriz (fem) inducida mucho mayor que la fem aplicada en un circuito primario. En la figura 1 se muestra una fotografía de un carrete de Ruhmkorff.

Las bobinas de inducción fueron básicas en los albores de los rayos X y de la "telefonía sin hilos". Se han usado y todavía se usan en los motores de explosión para producir la chispa en las bujías.

Tal como se muestra en el esquema de la figura 2, el carrete consta esencialmente de un arrollamiento *primario*, formado por varias espiras de hilo grueso de cobre, aisladas entre si y arrolladas sobre un núcleo de hierro dulce. Sus terminales se conectan a un generador de corriente continua de tensión V_p, intercalando un interruptor que continuamente abre y cierra el circuito de un modo automático.

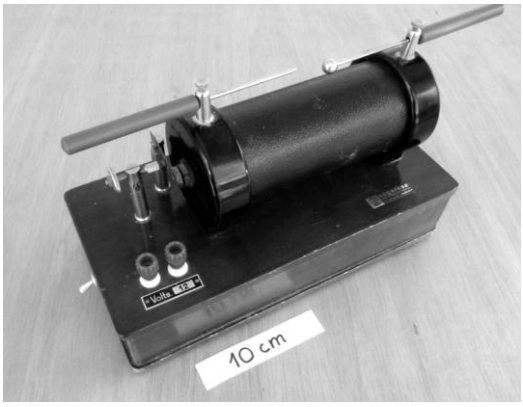


Fig. 1

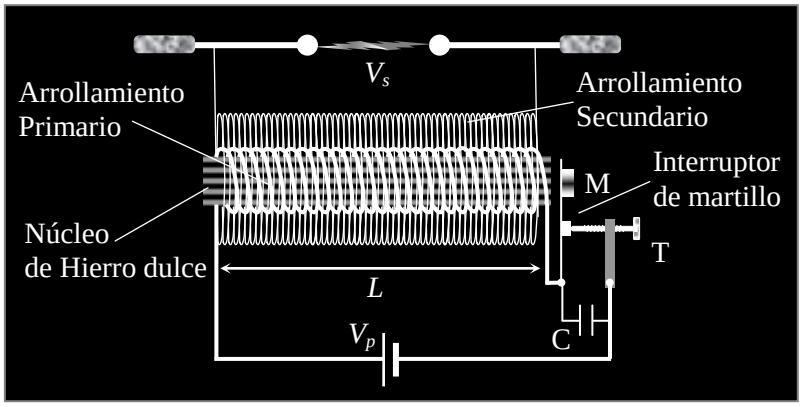


Fig. 2

Otro arrollamiento, llamado *secundario*, va dispuesto sobre el primario y está constituido por un gran número de espiras de hilo fino, muy bien aisladas eléctricamente entre sí y con el primario, cuyos terminales constituyen los bornes de la bobina, entre los cuales habrá un voltaje $V_s >> V_p$.

En el carrete esquematizado en la figura 2, la bobina del primario tiene una longitud L y está formada por N_p espiras circulares de diámetro $D_{p,}$. Estas espiras son de hilo de cobre, de resistividad ρ y de sección circular con diámetro d_p. Considerando que el circuito primario está cerrado:

a) Obtenga la expresión de la intensidad de corriente continua que circularía por el primario, I_0, si estuviese constantemente conectado a la batería de fem V_p.

b) Si la corriente que circula por el primario es I_0, despreciando los efectos de los extremos del arrollamiento, es decir, considerando al primario como un solenoide largo, obtenga la expresión del campo magnético dentro del solenoide, sin tener en cuenta el núcleo, B_0.

Considere en adelante que en el interior del primario hay un núcleo de hierro dulce formado por un manojo de alambres aislados entre sí para reducir las pérdidas producidas por corrientes de Foucault. Su misión es aumentar la intensidad del campo magnético B_0 que crearía el primario sin núcleo hasta un valor $B = \mu_r B_0$. La relación entre las permeabilidades magnéticas relativa, μ_r, y absoluta, μ, del material del núcleo es $\mu_r = \mu / \mu_0$.

En la figura 2 aparece un interruptor de *martillo*. Su funcionamiento es simple: al pasar la corriente por el primario, la armadura M, montada sobre una lámina flexible, es atraída por el núcleo y se separa del tornillo T, con lo que el circuito primario se abre y la corriente tiende a anularse. En ese momento, cesa la atracción porque el núcleo se desmagnetiza (hierro dulce) y M vuelve a la posición inicial en la que el contacto del tornillo T cierra de nuevo el circuito.

Para evitar en parte las chispas que se forman entre los contactos en las interrupciones periódicas, se coloca un condensador (capacitor) C, que no se tendrá en cuenta en el desarrollo de este ejercicio.

Como el interruptor de martillo abre y cierra el circuito periódicamente, la corriente del primario es variable con el tiempo, $I_p(t)$, y lo hace periódicamente con una frecuencia $f = 1/T$.

La dependencia con el tiempo de I_p es difícil de describir analíticamente. Por sencillez, supondremos que varia con el tiempo como se muestra en la figura 3: en cada periodo T, la corriente crece linealmente desde 0 hasta I_0 en el intervalo $0 < t < 4T/5$ y decrece desde I_0 hasta 0 en el intervalo $4T/5 < t < T$. En consecuencia, el campo magnético creado también variará con el tiempo, $B(t)$.

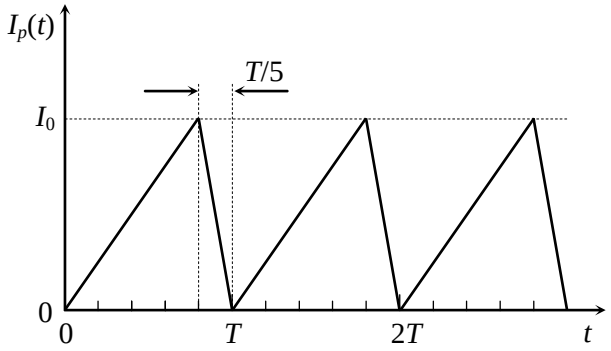


Fig. 3

c) Determine las expresiones de la fem inducida en el circuito secundario, $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$, en los intervalos de tiempo $0 < t < 4T/5$ y $4T/5 < t < T$, respectivamente.

d) Con los valores numéricos de la Tabla de datos, calcule los valores de $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$.

e) Haga una representación gráfica de la fem inducida en el secundario, V_s, en función del tiempo.

Tabla de datos	
Fem de la batería	$V_p = 12{,}0$ V
Longitud de la bobina	$L = 15{,}0$ cm
Diámetro de las espiras del primario	$D_p = 2{,}00$ cm
Diámetro del hilo del primario	$d_p = 0{,}600$ mm
Resistividad del Cobre	$\rho = 1{,}70 \times 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$
Frecuencia del interruptor	$f = 1/T = 100$ Hz
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$
Permeabilidad magnética relativa del núcleo	$\mu_r = 300$
Número de espiras del secundario	$N_s = 25\,000$

Solución P4

a) El arrollamiento primario tiene una longitud de hilo $l = N_p 2\pi D_p / 2$, cuya sección es $A = \pi d_p^2 / 4$. Por tanto, si ρ es la resistividad del hilo, su resistencia es

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{4 N_p \rho D_p}{d_p^2}$$

Cuando se conecta a una batería de fem V_p, la corriente continua, I_0 que circula es

$$I_0 = \frac{V_p}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I_0 = V_p \frac{d_p^2}{4 N_p D_p \rho}} \qquad (1)$$

b) En un solenoide largo puede considerarse que el campo magnético que crea es uniforme y está confinado en su interior. La ley de Ampère aplicada a una línea cerrada rectangular y de longitud *d*, como la que se muestra en la figura 4, permite escribir

$$B_0 \, d = \mu_0 \, n_p \, d \, I_0$$

Donde n_p es el número de espiras del primario por unidad de longitud:

$$n_p = N_p / L$$

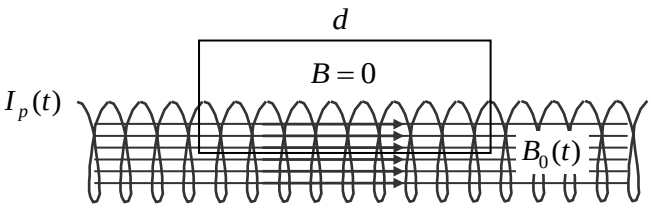


Fig. 4

Por lo que resulta,

$$B_0 = \frac{\mu_0 N_p}{L} I_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 \, d_p^2}{4 \rho D_p \, L} V_p}$$

c) Cada una de las N_s espiras del arrollamiento secundario está atravesada por el campo magnético que crea el primario reforzado por el núcleo ferromagnético $B = \mu_r B_0$. En consecuencia, el flujo a través de una espira del secundario es $B S_p$, siendo S_p la superficie normal de la región en la que se encuentra confinado el campo magnético. Esta superficie es igual a la de cada espira del primario, $S_p = \pi D_p^2 / 4$. El flujo total a través del secundario será

$$\Phi = N_s \, B \, S_p = \mu_r \, N_s \, \pi \frac{D_p^2}{4} B_0$$

Como la corriente del primario está pulsada por la acción del martillo, el campo magnético en el primario sin núcleo será ahora una función del tiempo dada por

$$B_0(t) = \frac{\mu_0 \, N_p}{L} I_p(t)$$

Por tanto, el flujo a través de las espiras del secundario será

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 \, \mu_r \, \pi \, N_p N_s D_p^2}{4L} I_p(t)$$

Como este flujo es variable con el tiempo, de acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida en el secundario, V_s, será

$$V_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \, \mu_r \, \pi \, N_p N_s D_p^2}{4L} \frac{dI_p(t)}{dt} \qquad (2)$$

En los intervalos $0 < t_1 < 4T/5$ y $4T/5 < t_2 < T$ las intensidades que circulan por el primario son, respectivamente

$$I_{p,1}(t) = \frac{5I_0}{4T}\, t \qquad\qquad I_{p,2}(t) = -\frac{5I_0}{T}\, t + cte$$

En función de la frecuencia, f

$$I_{p,1}(t) = \frac{5}{4}\, f\, I_0\, t \qquad\qquad I_{p,2}(t) = -5\, f\, I_0\, t + cte$$

Por lo que las fem inducidas son, sustituyendo en (2),

$$V_{s,1} = -\frac{5\mu_0\, \mu_r\, \pi\, N_p N_s D_p^2\, f}{16L} I_0 \qquad\qquad V_{s,2} = \frac{5\mu_0\, \mu_r\, \pi\, N_p N_s D_p^2\, f}{4L} I_0$$

Por último, teniendo en cuenta (1),

$$\boxed{V_{s,1} = -\frac{5\pi\, \mu_r\, \mu_0\, N_s D_p\, d_p^2\, f}{64\rho L} V_p} \qquad \boxed{V_{s,2} = \frac{5\pi\, \mu_r\, \mu_0\, N_s D_p\, d_p^2\, f}{16\rho L} V_p}$$

d) Con los datos que se indican en la Tabla,

$$\boxed{V_{s,1} = -7{,}84 \text{ kV}} \qquad\qquad \boxed{V_{s,2} = 31{,}4 \text{ kV}}$$

e) La gráfica de la fem inducida en el secundario, V_s, en función del tiempo se presenta en la figura 5.

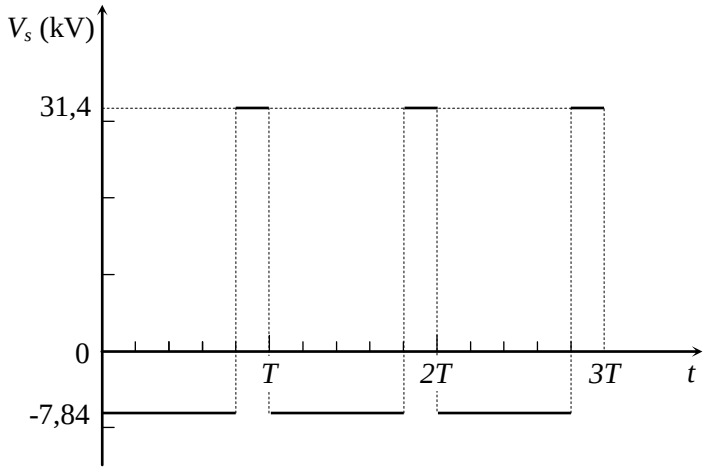
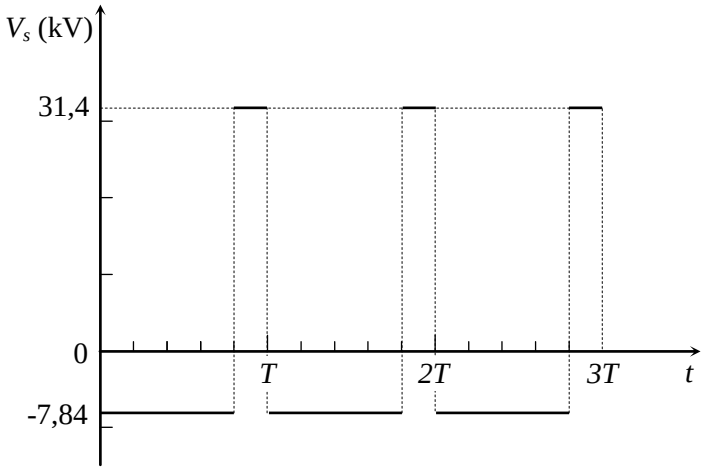


Fig. 5

P4. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a	$I_0 = V_p \dfrac{d_p^2}{4N_p D_p \rho}$		1
b	$B_0 = \dfrac{\mu_0 d_p^2}{4\rho D_p L} V_p$		1,5
c	$V_{s,1} = -\dfrac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{64\rho L} V_p$ $V_{s,2} = \dfrac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{16\rho L} V_p$		4
d		$V_{s,1} = -7{,}84$ kV $V_{s,2} = 31{,}4$ kV	0,5
e			1

PRUEBA EXPERIMENTAL A

OBJETIVO:

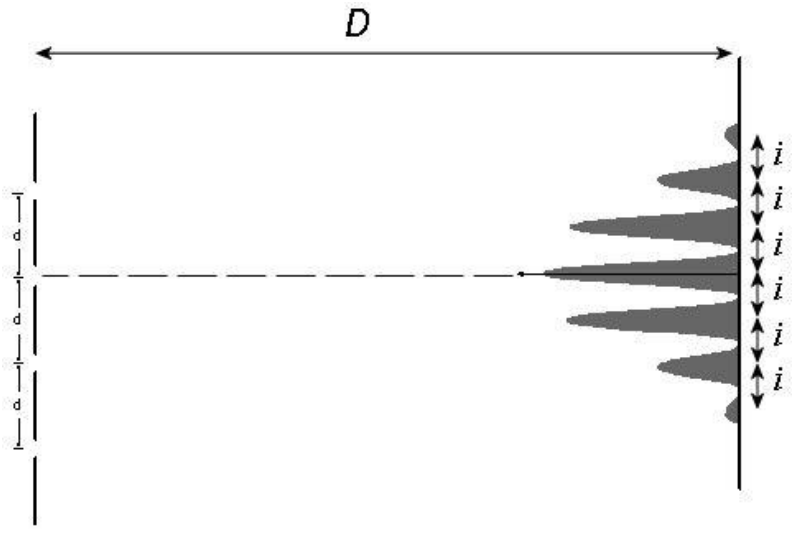
Determinar el espaciado de los hilos de una muestra de tela.

MATERIALES:

- Red (rejilla) de difracción de período espacial d = (0.070 ± 0.001) mm.
- Láser.
- Dos pisapapeles (clip, pinza para papel).
- Regla.
- Tarjeta de cartulina.
- Cinta métrica.
- Una muestra de tela.
- Cinta Adhesiva

FUNDAMENTO TEÓRICO.

Una red de difracción consiste en un gran número de rendijas equiespaciadas con una separación d entre dos adyacentes. Cuando se ilumina perpendicularmente con un haz de luz monocromática y coherente de longitud de onda λ se produce una figura de interferencia con máximos y mínimos de intensidad alternados como se indica en el esquema.



Se demuestra que la separación entre dos máximos (o mínimos) consecutivos es

$$i \approx \lambda \frac{D}{d},$$

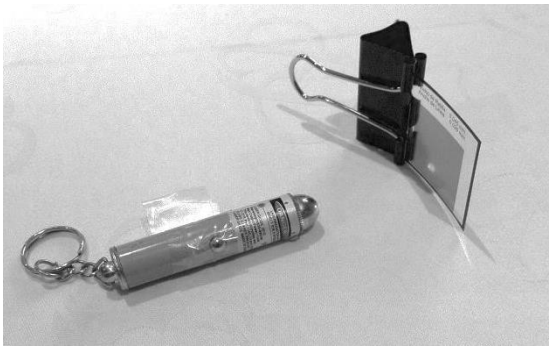
donde D es la distancia entre la red y la pantalla de observación. Para que se cumpla la aproximación anterior es necesario que $D \gg d$ y $D \gg i$.

PREGUNTAS:

1. Determine la longitud de onda del láser con su incertidumbre. (4 Puntos)
2. Determine el espaciado d entre los hilos de la muestra de tela con su incertidumbre. (3 Puntos)
3. Explique detalladamente el método empleado en cada caso. (3 Puntos)

NOTAS:

- **NO MIRE DIRECTAMENTE LA LUZ DEL LASER, PUEDE CAUSAR DAÑOS A SUS OJOS.**
- En su montaje experimental, sujete el láser a la mesa con cinta adhesiva.
- Para mantener presionado el interruptor puede utilizar otro trozo de cinta adhesiva.
- Desactive el láser cuando no esté midiendo; podría agotarse la pila.
- Puede emplear la cartulina como pantalla.



XVIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FÍSICA
SANTO DOMINGO 2013-REP. DOM.

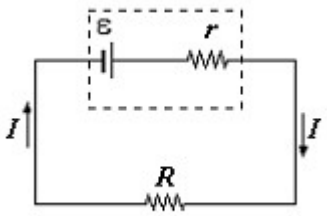
PRUEBA EXPERIMENTAL B

CARACTERIZACIÓN DE UNA FUENTE DE VOLTAJE.

MATERIALES.

- 15 resistencias diferentes
- Fuente de voltaje de características desconocidas.
- Cables de conexión.
- Multímetro digital.

FUNDAMENTO TEÓRICO.



Una fuente real de voltaje se puede modelizar por una fem ideal ε y una resistencia interna r.
Cuando se conecta una resistencia de carga R a los terminales de la fuente, circula una corriente I por el circuito. De acuerdo con la ley de mallas de Kirchhoff, en este circuito se cumple:

$$\varepsilon - I(r+R) = 0$$

La potencia eléctrica disipada por una resistencia es:

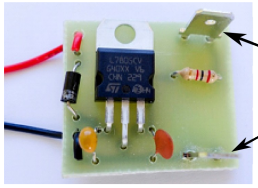
$$P = V^2 / R$$

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Parte 1: A partir de medidas de las resistencias (R) y de las diferencias de potencial (V) en dichas resistencias, determine experimentalmente la fem y la resistencia interna de la fuente proporcionada, así como sus incertidumbres. (6 puntos)

Parte 2: Determine experimentalmente el valor de resistencia externa para el cual la potencia entregada por la fuente es máxima. Estime la incertidumbre. (4 puntos)

NOTA:
El multímetro sólo debe ser utilizado como voltímetro en corriente contínua o como óhmetro.



Problema 1. Escalas atómicas.

El modelo atómico de Thomson de 1904 suponía una esfera de carga uniforme positiva, con los electrones incrustados en ella (modelo del *budín de pasas*). Sin embargo, los experimentos de 1909 de Rutherford y sus colaboradores permitieron descubrir características más detalladas del átomo; en esos experimentos, se bombardearon con partículas alfa (núcleos de helio) láminas delgadas de oro. De acuerdo con el modelo de Thomson, se esperaba que las partículas alfa se deflectaran menos de 0.02º, y aunque la mayoría no se desviaban de su trayectoria, una de cada ocho mil partículas se deflectaba un ángulo mayor que 10º, y en algunos pocos casos el ángulo de deflexión llegaba a 90º o incluso a 180º. Rutherford expresó entonces que "fue el acontecimiento más increíble de mi vida. Era casi tan increíble como si hubiera disparado un proyectil de 15 pulgadas en un pedazo de papel de seda, se devolviera y me golpeara".

1. Determine el valor de la velocidad de las partículas alfa producidas en la desintegración del isotopo de Polonio-210 en la reacción: **(4 puntos)**

$$^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$$

2. Considere una partícula alfa como la de la pregunta anterior, que se aproxima a un núcleo de oro y se deflecta 180º. Mediante consideraciones energéticas, obtenga una expresión para una cota superior del radio de ese núcleo. Calcule su valor. **(3 puntos)**

3. En 1913, Bohr, inspirado en el modelo atómico planetario de Rutherford, propuso cuantizar el momento angular de los electrones que orbitan al núcleo, de acuerdo con la relación:

$$L = n\hbar\,,$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π y n = 1,2,3... Utilice este modelo para determinar el radio mínimo del átomo de hidrógeno. **(3 puntos)**

Valores de algunas constantes físicas

Rapidez de la luz: $c = 2.998 \times 10^{8}$ m/s

Carga elemental: $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

Constante de Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s

Masa del electrón: $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg

Masa del protón: $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg

Permitividad del vacío: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m

Unidad de masa atómica: 1.661×10^{-27} kg

Numero atómico del oro (Au) : $Z_{Au} = 79$

Masa del Polonio $M_{Po} = 209.982857$ u
Masa del Plomo $M_{Pb} = 205.974449$ u
Masa del Helio $M_{He} = 4.002603$ u

Problema 2: Fuerza de Arrastre

La fuerza de arrastre se presenta en objetos que se mueven a través de un fluido. Actúa en la dirección del movimiento relativo al fluido. La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad. En muchos casos, como en el diseño de automóviles se trata de minimizar dicha fuerza, sin embargo, otros dispositivos, como los paracaídas, se diseñan maximizando la fuerza de arrastre a bajas velocidades.

El estudio teórico de la fuerza de arrastre es una empresa compleja, incluso para objetos con simetría, pues no se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones que los modelan. Sin embargo, es posible obtener información valiosa con un modelo sencillo.

Considere un modelo que consiste en un objeto macroscópico que se mueve a través de un fluido constituido por moléculas uniformemente distribuidas donde cada una está inicialmente en reposo. En este modelo la fuerza de arrastre surge exclusivamente de las colisiones entre las moléculas y el objeto en movimiento. Dichas colisiones se suponen perfectamente elásticas.

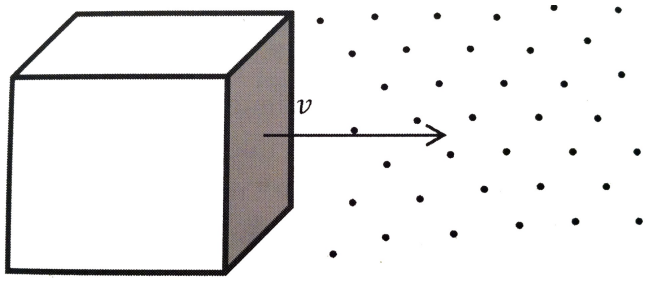


FIGURA 1

a) Un objeto de masa M y velocidad v choca frontalmente con una única molécula de masa m inicialmente en reposo. Encuentre el cambio en la velocidad Δv en el objeto debido al choque. Exprese su resultado en función de M, m y v. **(2 Puntos)**

b) Un cubo de arista L se mueve a través de un fluido con densidad ρ en dirección perpendicular a una de sus caras. Demuestre que la fuerza de arrastre F_D es:

$$F_D = 2\rho A v^2,$$

donde v es la velocidad del cubo y A el área de una de sus caras. Considere que la masa m de cada una de las moléculas del fluido es mucho menor que M. **(3 Puntos)**

c) Un cubo de 10.0 cm por lado se mueve en línea recta con rapidez constante de 0.600 m/s a través de un gas formado por moléculas en reposo de O_2 con densidad ρ = 1.43 kg/m^3. Calcule la potencia necesaria para que el cubo mantenga su velocidad constante. **(2 Puntos)**

d) Se quiere modificar la forma del cubo para mejorar su aerodinámica, esto es, disminuir su fuerza de arrastre en su movimiento a través del fluido. Para ello se le da forma de cuña simétrica. Para caracterizar la aerodinámica del nuevo objeto (en la figura 2 se muestra su sección transversal), se introduce un parámetro K en la ecuación anterior

$$F_D = 2K\rho A v^2$$

Este parámetro depende del ángulo θ (indicado en la figura 2). Note que para K = 1, se recupera la forma de la fuerza de arrastre para el cubo. Encuentre el coeficiente K para el nuevo objeto si las partículas colisionan elásticamente sobre la superficie de la cuña y su masa es muy pequeña comparada con la del objeto, de modo que se produce una "reflexión especular" de las moléculas. **(3 Puntos)**

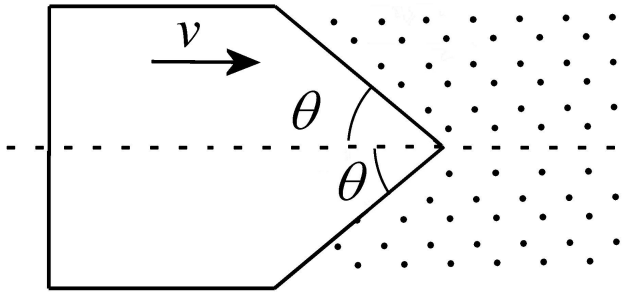


FIGURA 2

Problema 3: Molécula Diatómica.

Una molécula diatómica consta de dos átomos enlazados químicamente. Estos enlaces químicos sólo pueden estudiarse con exactitud utilizando mecánica cuántica. Sin embargo, se pueden hacer aproximaciones de mecánica clásica adecuadas para varias aplicaciones.

Un modelo común de enlace diatómico es tratar la molécula como si los dos átomos estuvieran unidos por un resorte de constante k con una separación de equilibrio r_0. Este modelo es muy usado para estudiar las vibraciones moleculares de baja energía, pero falla cuando hay ruptura de enlaces o para vibraciones de alta energía. La energía potencial de este modelo, que se comporta como un oscilador armónico, se puede escribir como:

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \ ,$$

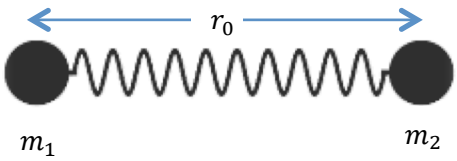
donde r es la separación instantánea entre los dos átomos. De la expresión anterior podemos obtener la magnitud de la fuerza entre los dos átomos:

$$F(r) = -k(r - r_0) \ .$$

Cuando se quiere modelar vibraciones de alta energía (o de alta amplitud) se puede recurrir al potencial de Morse:

$$U(r) = D_e\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]^2$$

en donde D_e y a son constantes. Nótese que cuando la distancia interatómica crece hasta el infinito, la energía potencial tiende a D_e.



Representación de una molécula diatómica.

a) Considere una molécula diatómica con átomos de masas m_1 y m_2 y separación de equilibrio r_0. Determine la ubicación del centro de masas de la molécula respecto de m_1. **(2 puntos)**
b) Si esta molécula, supuesta rígida, gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los átomos y pasa por su centro de masa, encuentre la expresión de la energía cinética rotacional en términos de m_1, m_2, r_0 y ω. **(2 puntos)**
c) Suponga ahora que la molécula no rota pero sus átomos pueden vibrar. Determine su frecuencia angular de vibración ω_0 para bajas energías. **(2 puntos)**
d) Un efecto muy estudiado en espectroscopía es el hecho de que el movimiento rotacional hace que la distancia entre los átomos aumente. Este fenómeno se conoce como *distorsión centrífuga*. Encuentre esta nueva distancia r_0' en función de ω, ω_0 y r_0, suponiendo que la molécula no vibra. **(2 puntos)**
e) Para oscilaciones pequeñas el potencial de Morse se comporta de manera muy parecida al potencial del oscilador armónico. Encuentre la constante equivalente k en función de D_e y a para oscilaciones pequeñas del oscilador de Morse. **(2 puntos)**

Ayuda: $e^x \approx 1 + x$ *para* x *muy pequeña.*

XIX OLIMPIADA IBEOAMERICANA DE FISICA
ASUNCION - PARAGUAY
30 - SEP - 2014
PRUEBA EXPERIMENTAL

Determinación experimental del módulo de Young de un metal

Cuando una varilla de longitud L_0 se somete a una fuerza F, ésta se deforma una cantidad ΔL, ver figura 1. La *deformación unitaria* ϵ se define como la variación de longitud por unidad de longitud $\left(\epsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}\right)$. La fuerza por unidad de superficie transversal de la varilla $\sigma = \frac{F}{A}$ se denomina *esfuerzo*. Para un cuerpo elástico y pequeñas deformaciones se cumple:

$$\sigma = Y\epsilon.$$

La constante Y se denomina *módulo de Young* y es el módulo de elasticidad del material de la varilla.

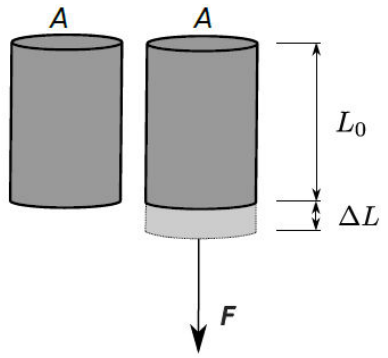


Figura 1: Cuando un alambre, de longitud L_0 y sección A, se somete a una fuerza F éste sufre una deformación ΔL.

En este experimento se busca determinar el módulo de Young a partir de la flexión de una varilla sometida a una fuerza transversal.

Al colgar una masa m de una varilla, con un punto fijo, ésta sufre una flexión que depende de su geometría, como se muestra en la figura 2. La flexión de una varilla de sección uniforme y masa despreciable viene dada por:

$$y = \frac{mg}{2YI_a}\left(Ld^2 - \frac{d^3}{3}\right), \tag{1}$$

donde L es la longitud de la varilla, d es la distancia entre el punto fijo y el punto donde se ubica la carga e I_a es el llamado *momento de área* que se calcula mediante:

$$I_a = \frac{ba^3}{12}, \tag{2}$$

donde a es el espesor de la varilla y b su ancho.

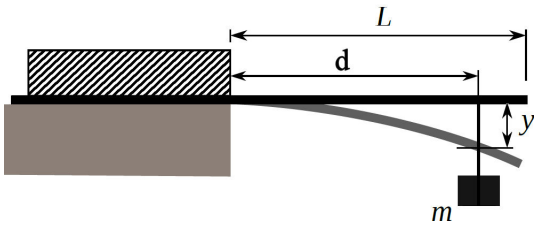


Figura 2: Esquema de la flexión que sufre una varilla al ser sometida a una carga.

Para este experimento se dispone de los siguientes materiales:

- Varilla de aproximadamente 1 m.
- Cinta métrica (flexómetro).
- Dos prensas (sargentos).
- Dos planchas de madera.
- Conjunto de pesas rotuladas. Las mismas fueron pesadas con una balanza electrónica con una precisión de 0,01g.
- Calibre, pie de rey o vernier.
- Papel milimetrado.
- Hilo.
- Cinta adhesiva.

Consideraciones y preguntas:

1. Indique los valores de: a, b d y L, y con que instrumentos fueron medidos. A fin de minimizar el efecto de la masa de la varilla se sugiere que L sea menor o igual a 0,60 m. (2.0 puntos)
2. Mida la flexión transversal y de la varilla en función de la masa suspendida m y presente los valores en una tabla. (5.0 puntos)
3. Represente gráficamente los valores tabulados anteriormente. (2.0 puntos)
4. Determine el módulo de Young del material. (6.0 puntos)
5. Estime la incertidumbre de Y y justifique su respuesta. (5.0 puntos)

Exprese el resultado en el SI. Considere que el valor de g es 9,81 m/s^2.

XIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA
ASUNCION - PARAGUAY
1 - OCT - 2014
PRUEBA TEORICA

Problema 1. Dos péndulos simétricos y cargados

Un sistema de dos cuerpos consta de dos péndulos de longitud $L = 30$ cm con masas idénticas $m = 50$ g, esféricos, con igual carga positiva Q y de radios mucho menores que L. La repulsión electrostática hace que el sistema se equilibre formando un ángulo de 45° con la vertical, como se muestra en la Fig. 1.

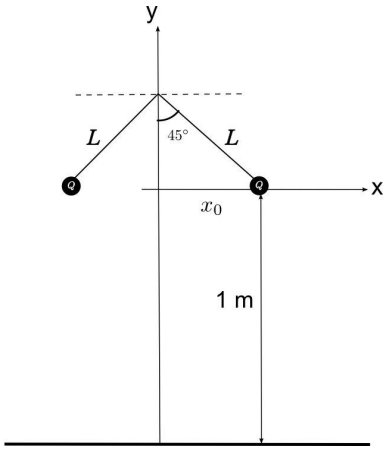


Figura 1: Configuración del sistema con las esferas cargadas.

Pregunta 1 — *2.0 puntos.*

Calcule la carga Q que tiene cada esfera.

Se cortan simultáneamente los hilos. En la figura 2 se muestra la trayectoria seguida por la esfera de la derecha.

Pregunta 2 — *3.0 puntos.*

Calcule el ángulo de impacto con el suelo que se encuentra 1 m debajo de la posición inicial y el módulo de la velocidad correspondiente.

Pregunta 3 — *2.0 puntos.*

Indique en un esquema cómo se modificaría la trayectoria si, en el momento de cortar los hilos, la carga de la izquierda se reduce a la mitad y se duplica la de la derecha.

Pregunta 4 — *2.0 puntos.*

Indique en un esquema cómo se modificaría la trayectoria si, en el momento de cortar los hilos, se establece un campo eléctrico uniforme, de magnitud $E = \dfrac{mg}{2Q}$ dirigido verticalmente hacia arriba.

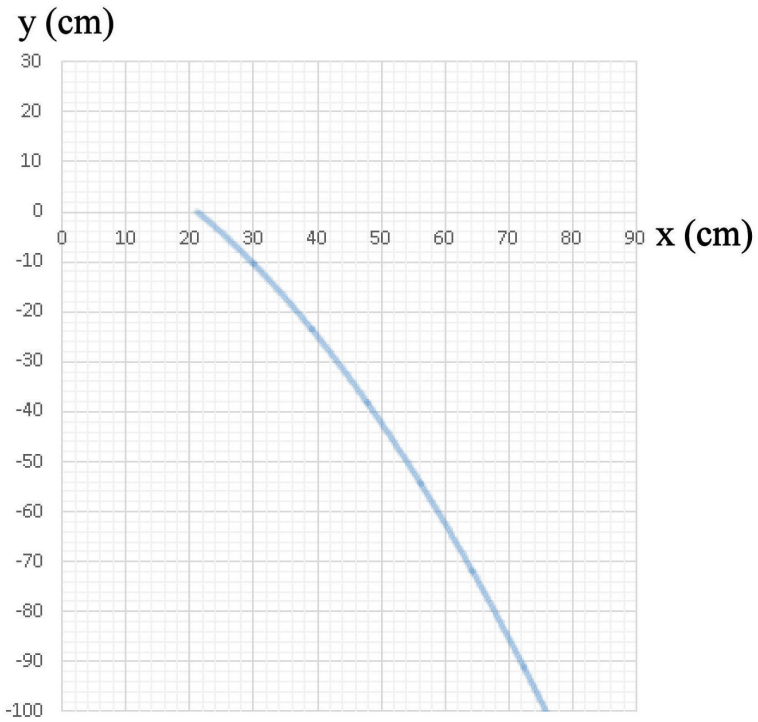
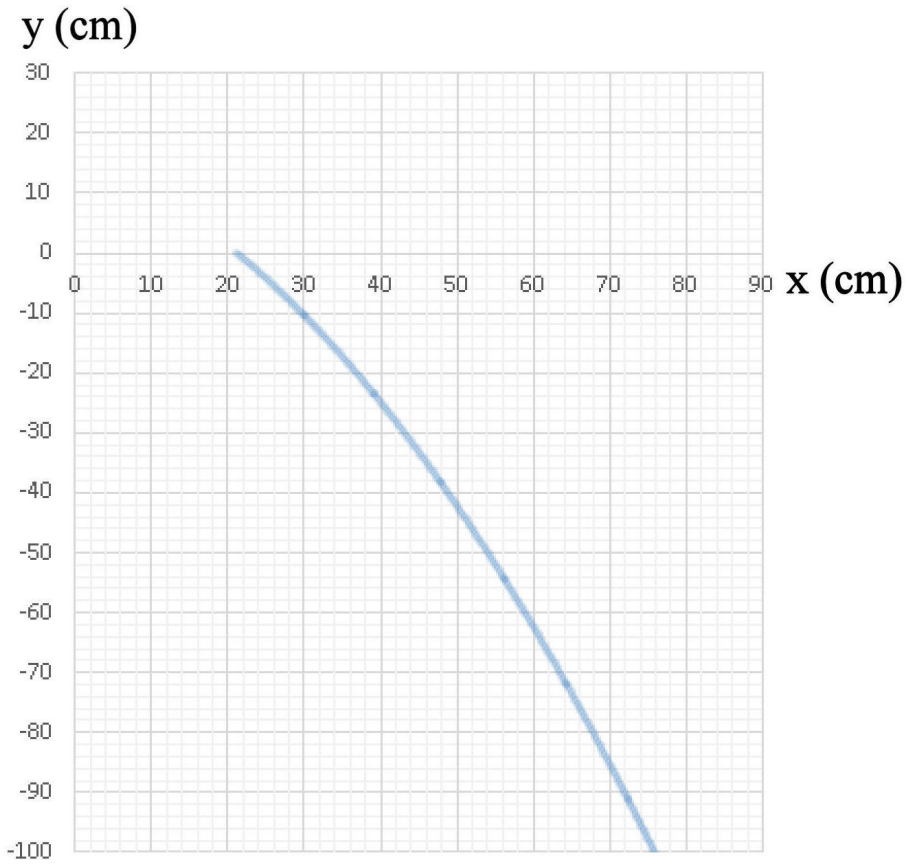


Figura 2: Caída de una de las esferas del péndulo simple.

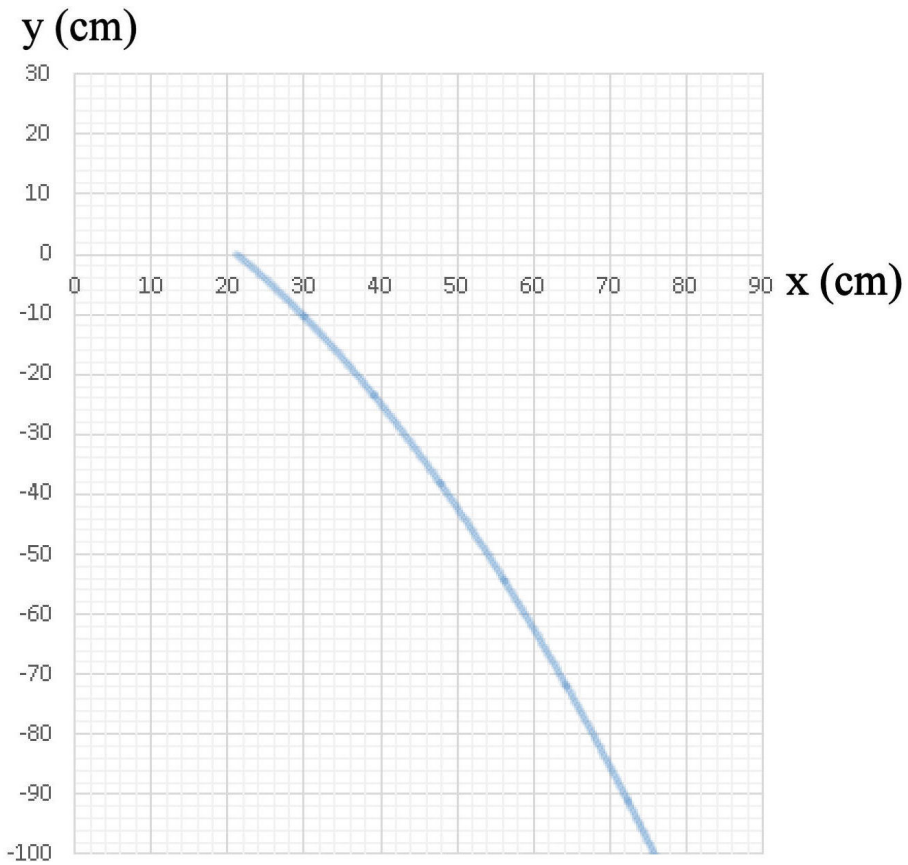
Datos útiles

- $g = 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$
- $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9{,}00 \times 10^9\ \mathrm{N\ m^2\ C^{-2}}$

Dibuje aqui la trayectoria de la pregunta 3.



Dibuje aqui la trayectoria de la pregunta 4.



XIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA
ASUNCION - PARAGUAY
1 - OCT - 2014
PRUEBA TEORICA

Problema 2. Radiación Solar

El clima de una región depende, entre otros factores, de la radiación solar que recibe, que a su vez depende de su latitud; las regiones del ecuador reciben mayor cantidad de radiación solar por unidad de superficie que los polos. La intensidad de radiación solar que llega a la Tierra (*constante solar*) es 1,36 kW/m^2.

Pregunta 1 — *1.0 punto.*

Calcule la potencia total que emite el Sol al espacio en forma de radiación electromagnética.

Pregunta 2 — *2.0 puntos.*

Estime la temperatura de la superficie del Sol

Pregunta 3 — *2.0 puntos.*

¿Qué porcentaje de la potencia solar recibe la Tierra?

Pregunta 4 — *2.0 puntos.*

El Paraguay se encuentra en una latitud media de 23° y su superficie es aproximadamente 407.000 km^2. Por otro lado, la central hidroeléctrica de Itaipú produce 14000 MW. Despreciando los efectos de absorción y reflexión, ¿a cuántas centrales de Itaipú equivale la potencia solar máxima que recibe el Paraguay?

Datos útiles

- Constante de Stefan Boltzmann, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W m$^{-2}K^{-4}$;
- Radio del Sol, $R_S = 6,9 \times 10^8$ m;
- Radio medio de la órbita terrestre, $R_{OT} = 1,49 \times 10^{11}$ m;
- Radio de la Tierra, R_T= 6370 km.

XIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE FISICA
ASUNCION - PARAGUAY
1 - OCT - 2014
PRUEBA TEORICA

Problema 3. Mejora de la eficiencia de un ciclotrón.

El ciclotrón fue inventado por Ernest O. Lawrence y M. S. Livingston en Berkeley (California, EE. UU.), en el año 1932. Consiste en un acelerador de partículas cargadas, las cuales debido a la fuerza de Lorentz y a un potencial acelerador pueden adquirir energía suficiente como para impactar sobre un blanco y producir una reacción nuclear. Un esquema simplificado, se muestra en la figura 1.

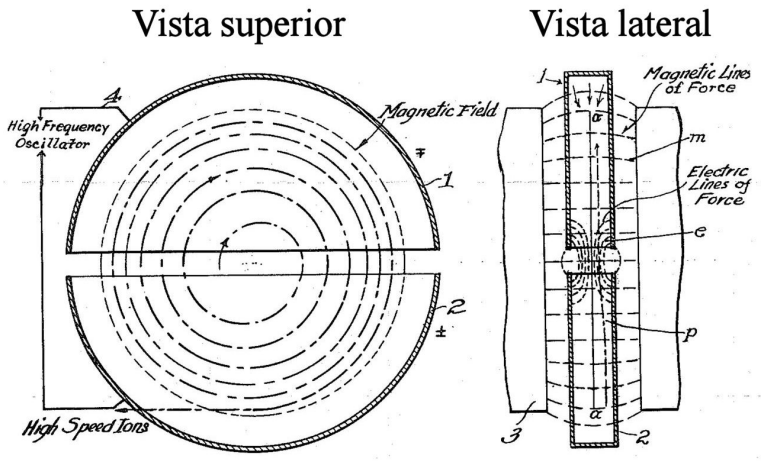


Figura 1: Detalle de las placas del Ciclotrón. Los electroimanes con forma de letras "D" están indicados con 1 y 2. (Dibujo original de la patente)

Básicamente el ciclotrón consiste en dos regiones de campo magnético uniforme en forma de letra "D" entre las cuales se establece una diferencia de potencial, cuya polaridad se invierte periodicamente cuando la partícula pasa de una "D" a otra. Para este problema considere que no se alcanzan velocidades relativistas.

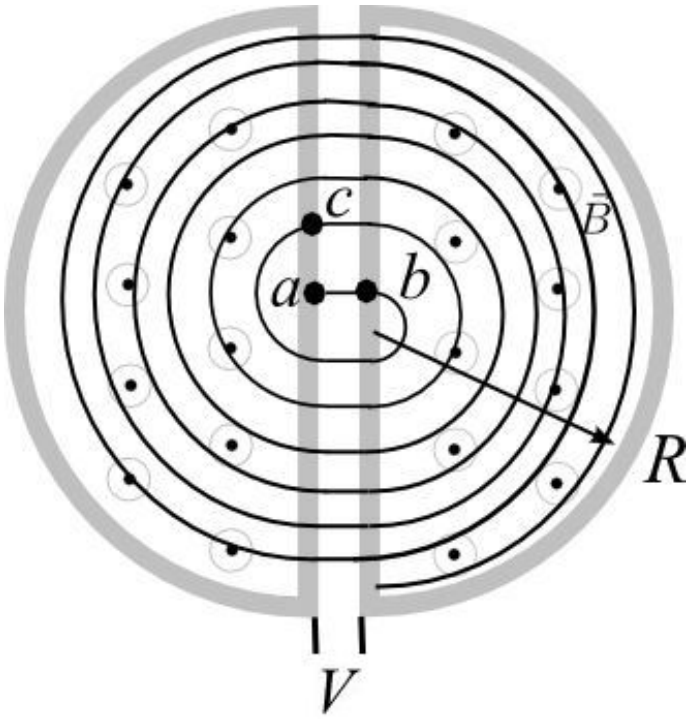


Figura 2: Trayectoria de una partícula en el ciclotrón.

Pregunta 1 — *2.0 puntos.*

Considere que una partícula de carga q y masa m parte del reposo en el punto a y es acelerada por la diferencia de potencial V. Determine la velocidad v_b con la que llega al punto b y el radio de la trayectoria que describe dentro de la "D", en donde existe un campo magnético de intensidad uniforme $\vec{B}$.

Pregunta 2 — *1.0 puntos.*

Determine la frecuencia f con que debe oscilar la polaridad del potencial V para que la partícula referida en la pregunta 1, sea acelerada cada vez que pasa por la región entre las "D" (frecuencia de ciclotrón).

Pregunta 3 — *2.0 puntos.*

Determine la energía cinética de salida de la partícula referida en la pregunta 1, si el radio del ciclotrón es R.

Se ha investigado la opción de introducir en el punto a del ciclotrón una sustancia radiactiva como el Cm (curio), que emite partículas α ($^4_2$He) con una velocidad inicial v_α, de forma que sea posible aumentar la energía cinética de salida de las partículas α, sin necesidad de aumentar el radio del ciclotrón.

Considerando la ecuación de desintegración radiactiva:

$$^{240}_{96}\mathrm{Cm} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{236}_{94}\mathrm{Pu} \qquad (1)$$

Pregunta 4 — *3.0 puntos.*

Determine la energía cinética de la partícula α y del núcleo de plutonio en retroceso. Considere el núcleo de Cm en reposo.

Pregunta 5 — *1.0 puntos.*

Determine la velocidad v_α de la partícula α emitida.

Considere un ciclotrón de radio R de 0,5 m que opera con un campo magnético uniforme $B = 2$ T y un potencial acelerador $V = 500$ kV.

Pregunta 6 — *2.0 puntos.*

Teniendo en cuenta que ahora la partícula en el punto a tiene una velocidad inicial v_α, calcule la velocidad v_1 con que llega al punto c y el radio r_1 de la trayectoria dentro de la "D" izquierda (Fig. 2).

Pregunta 7 — *3.0 puntos.*

Obtenga la expresión para la velocidad v_n y el radio r_n de la trayectoria después de que la partícula haya realizado n vueltas en torno al centro del ciclotrón.

Datos útiles

- $M_{Cm} = 240{,}05552$ uma;
- $M_{Pu} = 236{,}046060$ uma;
- $M_\alpha = 4{,}002603$ uma;
- $c = 2,9979 \times 10^8$ m/s;
- $e = 1,6022 \times 10^{-19}$ C
- 1 uma = 931,4 MeV/c^2

PRUEBA EXPERIMENTAL

USANDO RADIACIÓN UV PARA DESINFECCIÓN DE AGUA

1. Introducción

La idea de utilizar radiación (UV) para desinfección de agua no es nueva; ya en 1984 UNICEF publicó un folleto en el que se presentó por primera vez la idea. De ahí en adelante se han desarrollado distintas investigaciones con el fin de evaluar el potencial de este método para inactivar microorganismos en el agua. El principio en el que se basa el método es bastante sencillo: los microorganismos patógenos son vulnerables a la radiación electromagnética en el rango del UV-A (Ancho de onda entre 320 y 400 nm) y al incremento en la temperatura del agua. Este hecho sumado a que la radiación solar tiene un fuerte componente en el rango UV-A, condujo a la idea de utilizar radiación solar como mecanismo capaz de mejorar la calidad del agua eliminando microorganismos patógenos. Para tal efecto, se requiere colocar el agua en un recipiente y exponerlo a la radiación UV, la cual debe primero atravesar las paredes del recipiente (disminuyendo su intensidad debido a absorción del material del que el recipiente está hecho) y luego atravesar la masa de agua (la cual también atenúa la intensidad); por supuesto, cuanto mayor es el recorrido de la radiación en el agua, mayor la atenuación.

Reportes científicos que se encuentran en la literatura indican que la atenuación de la radiación UV en los plásticos es diferente que en el agua. En este experimento queremos verificar este comportamiento, por lo tanto los objetivos que se persiguen son:

1. Estudiar la absorción de radiación UV en diferentes tipos de plástico.
2. Estudiar la atenuación de la radiación UV en el agua.

2. Materiales

- Fuente de radiación UV.
- Fotodetector.
- Multímetro
- Sistema óptico.
- Cubetas de vidrio (anchos internos de 2cm, 3cm, 4cm, 5cm y 6 cm).
- Agua con un grado de turbiedad apreciable.
- Láminas plásticas (filtros) de colores azul, rojo, amarillo, verde y transparente.
- Cables de conexión.
- Papel cuadriculado.
- Cartulina porta filtros.
- Cilindro hueco de cartulina blanca.

importante: El sistema óptico que recibió tiene la fuente de radiación UV cubierta de modo que mientras realice la experiencia no se exponga a esta radiación. Tenga el cuidado de mantener la para móvil del sistema cerrada la mayor parte del tiempo.

3. Procedimiento para las partes A y B (*1 punto*)

El fotodetector genera una diferencia de potencial (U) entre sus terminales que es proporcional a la intensidad de radiación (I) que incide sobre él: $U \alpha I$.

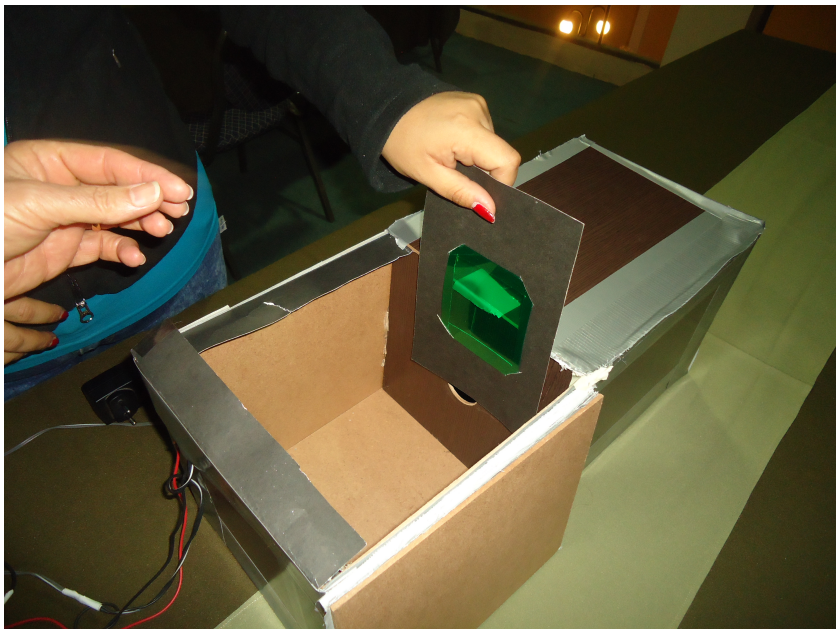
Actividades a realizar

1. Conecte el fotodetector de radiación UV y mida el voltaje base (el voltaje debido a la radiación en el interior de la caja con la lámpara UV apagada, es decir, el error de cero del instrumento). (*1 punto*)
2. Conecte la lámpara UV y no realice ninguna medida hasta que el voltaje se estabilice (aproximadamente 10 minutos).
3. Mantenga cerrada la caja para cualquier medición.

3.1. Parte A (*8 puntos*)

Absorción de radiación UV por plásticos.

La fotografía a continuación muestra la manera de colocar cada uno de los filtros.



A1. Mida el voltaje del fotodetector cuando no se coloca ningún filtro (*0,5 punto*)
A2. Escoja un tipo de plástico (un color), coloque un filtro en el soporte y mida el voltaje U. Repita esta medida con 2, 3, 4, 5 y 6 filtros. (*0,5 punto*)
A3. Realice la actividad anterior con los filtros de otros colores. Presente todas sus medidas en una tabla. (*1,5 puntos*)
A4. Construya una gráfica de voltaje eficaz $U_{ef} = U - U_{base}$ en función del número de filtros n desde 0 hasta 6 para cada uno de los colores. La gráfica debe mostrar simultáneamente los datos de todos los colores. (*2 puntos*)
A5. Indique, con los datos que tiene, cuál es el color que presenta menor absorción. (*0,5 punto*)
A6. Para el filtro que eligió en A5, determine el coeficiente de transmisión, τ, si el modelo de atenuación está dado por: $U_{ef} = U_0\tau^n$, donde U_0 es una constante. Haga una estimación de su incertidumbre. (*3 puntos*)

3.2. Parte B (*11 puntos*)

Atenuación de la radiación UV por el agua

En esta sección se va a obtener el coeficiente de atenuación de la radiación UV del agua. Se utilizarán las cubetas de vidrio de ancho interior 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 y 6,0 cm.

En el experimento las cubetas solo sirven para contener el agua, por lo que la radiación absorbida por el vidrio debe tenerse en cuenta para que no afecte al resultado final.

B1. Introduzca cuidadosamente el cilindro hueco de cartulina blanca en el orificio circular de donde emerge la luz, de modo que llegue directamente al fotodetector. Mida el voltaje en el ftodetector sin cubeta. (*0,5 punto*)

B2. Coloque la cubeta de menor ancho interior (sin agua) en la base marcada con una cinta, coon la parte media de la cubeta sobre la marca. Mida el voltaje U_{vidrio} en el fotodetector. (*0,5 punto*)

B3. Repita la actividad anterior para el resto de las cubetas y presente todas sus medidas en una tabla. (*1 punto*)

B4. Realice las medidas anteriores con las cubetas llenas de agua y presente todas sus medidas en una tabla (llame U_{total} al voltaje medido). (*2 puntos*)

B5. Construya una tabla del voltaje efectivo U'_{ef} en función del ancho interno x de las cubetas. Se entiende por voltaje efectivo aquel que detectaría el fotodetector si sólo existiera la atenuación debida al agua. (*3 puntos*)

B6. Realice una gráfica de voltaje efectivo U'_{ef} vs. ancho interno x de las cubetas. (*1 punto*)

B7. Determine el coeficiente de atenuación del agua, α, considerando que el modelo de atenuación es exponencial: $U'_{ef} = U_0 \exp^{-\alpha x}$. Haga una estimación de su incertidumbre. (*3 puntos*)

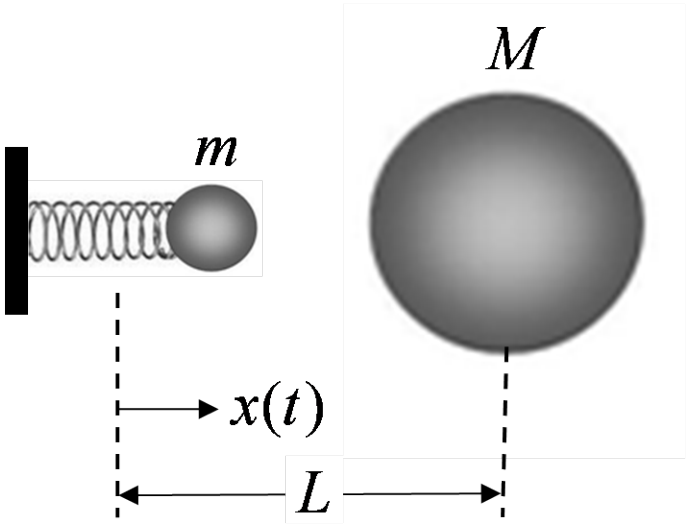
XX Olimpiada Iberoamericana de Física

Problema 1

1. Determinación de la constante de gravitación universal G (*9 puntos*)

Considere un oscilador armónico de masa m, constante elástica k y longitud natural (longitud sin deformar) L_0, que está oscilando en presencia del campo gravitatorio creado por una esfera fija de masa M (Ver figura adjunta).

La elongación del resorte en cualquier instante es $x(t)$. La distancia entre as masas M y m cuando el resorte no está estirado es L. Considerando un régimen de pequeñas oscilaciones, se cumple siempre que $L \gg x(t)$.[1)]



En ausencia de la esfera de masa M,

a) Escriba la ecuación de movimiento de la masa m e indique la frecuencia natural ω_0 de oscilación y la posición de equilibrio x_0.. (*1 punto*)

En presencia de la esfera de masa M,

b) Escriba la ecuación de movimiento de la masa m. (*3 puntos*)
c) Obtenga expresiones para la nueva frecuencia angular ω y la nueva posición de equilibrio x_0'. (*3 puntos*)
d) Suponiendo que se miden experimentalmente ω y x_0' encuentre una expresión para la constante gravitacional G en función de estas magnitudes y de L y M. (*2 puntos*)

[1)] Utilice la aproximación: $(L-x)^{-2} \approx L^{-2} + 2xL^{-3}$, válida para $x \ll L$.

XX Olimpiada Iberoamericana de Física

El descubrimiento del pión: Laboratorio de Chacaltaya 1947
Problema 2

Introducción

La física de partículas tuvo sus inicios durante la primera mitad del siglo XX en experimentos de rayos cósmicos[1)], localizados al nivel del mar y a grandes altitudes, como es el caso de Chacaltaya ($\sim$ 5200 metros sobre el nivel del mar) como muestra la foto debajo. En 1947 fue descubierto el pión (π) en lo que es hoy el Laboratorio de Física de Rayos Cósmicos de Chacaltaya por C. Powell, G. Occhialini y C. Lattes.



Figura 1: Laboratorio de Chacaltaya, La Paz, Bolivia.

[1)] Los rayos cósmicos son núcleos y partículas subatómicas, que bombardean la tierra constantemente desde el espacio exterior

Problemas

a) (30 %) Los piones cargados $\pi^{\pm}$ son generados en lo alto de la atmósfera por colisiones de rayos cósmicos primarios con los núcleos de la atmósfera. Estos possen una vida media de aproximadamente 25 ns para luego decaer en $\mu^{\pm}$ (muones cargados) y ν_{μ} (neutrinos). Debido al corto tiempo de vida de los piones, estos deberían recorrer unos cuantos metros en la atmósfera terrestre, por lo tanto, estos no podrían ser observados en el laboratorio de Chacaltaya. Pero según la teoría de la relatividad especial, el tiempo se dilata para un observador en laboratorio, por lo tanto, los $\pi^{\pm}$ pueden ser detectados en los laboratorios al nivel de la superficie terrestre.
La energía de los $\pi^{\pm}$ está dada por la ecuación:

$$E_{\pi^{\pm}} = \gamma m_{\pi^{\pm}} c^2,$$

donde, $\gamma = (1 - (v_{\pi^{\pm}}/c)^2)^{-1/2}$, y c = 3×10^8 m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Calcule:

1. la velocidad $v_{\pi^{\pm}}$ de los piones, considerando que su masa es $m_{\pi^{\pm}} \approx 140$ MeV$/c^2$, donde 1eV = $1,602 \times 10^{-19}$ J.
2. la distancia máxima aproximada a la que fueron originados estos piones en la atmósfera (con respecto al laboratorio), asumiendo que no perdieron energía en su trayectoria y que la energía media de los piones que se observan en el laboratorio es de 40 GeV

b) (30 %) Para detectar piones $\pi^{\pm}$, se utilizaron emulsiones fotográficas, en las que quedaban grabadas las trazas (trayectorias) de las partículas (ver Fig. 2).
El principal mecanismo por el cual pierden energía las partículas cargadas al atravesar la emulsión, es por ionización y excitación de los átomos del medio. La pérdida de energía promedio por unidad de densidad de área de materia atravesada, Λ, puede expresarse en MeV g^{-1}cm^2. En consecuencia, la distancia R que pueden recorrer las partículas en materiales relativamente densos puede escribirse como:

$$R = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta E}{\Lambda},$$

donde $\Delta E = E_0 - E$, E_0 es la energía inicial de la partícula y ρ es la densidad del material. Como puede deducirse de la fig. 2, los muones recorren casi la misma distancia de 6 mm. Considerando que la Λ perdida por los muones es de 2 MeV g^{-1}cm^2 y que su energía cinética es de 4,1 MeV, calcule la densidad ρ de la emulsión nuclear, en g/cm^3 .

c) (30 %) La fuerza de Lorentz causa que las partículas describan trayectorias helicoidales a lo largo de la dirección del campo magnético (ver Fig. 3). El radio de curvatura de las trayectorias está relacionado con la fuerza del campo magnético y la componente del momentum (cantidad de movimiento) de la partícula, perpendicular al campo magnético (normalmente llamado momentum transverso P_T). Por tanto, se pueden construir espectrómetros magnéticos que permitan medir el momentum de las partículas cargadas. Suponiendo que en Chacaltaya se quiera construir un espectrómetro magnético para medir el momentum de los piones de $\vec{p} = (10\hat{i} + 10\hat{j} + 37\hat{k})$ GeV$/c$:
Determine qué intensidad deberá tener el campo magnético, en tesla (T). El campo $\vec{B}$ está orientado a lo largo del eje y y el radio de curvatura es 20 m.

d) (10 %) El modelo estadístico usado para construir la distribución de eventos que se observan en experimentos de física de partículas, es la estadística de Poisson, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$f(n, \mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!},$$

donde $f(n, \mu)$ es la función de distribución, $n = 0, 1, 2, ...$ representa el número de resultados individuales del experimento (e.j. número de eventos a observar) y μ es el valor esperado de eventos en un tiempo dado. Tomando en cuenta la distribución de Poisson, se espera medir en el laboratorio de Chacaltaya, al menos 10 eventos de piones en una semana. Entonces, calcule en porcentajes:

1. la probabilidad de observar 5 piones en una semana
2. la probabilidad de observar 20 piones en un mes
3. la probabilidad de no observar ningún pión en una semana

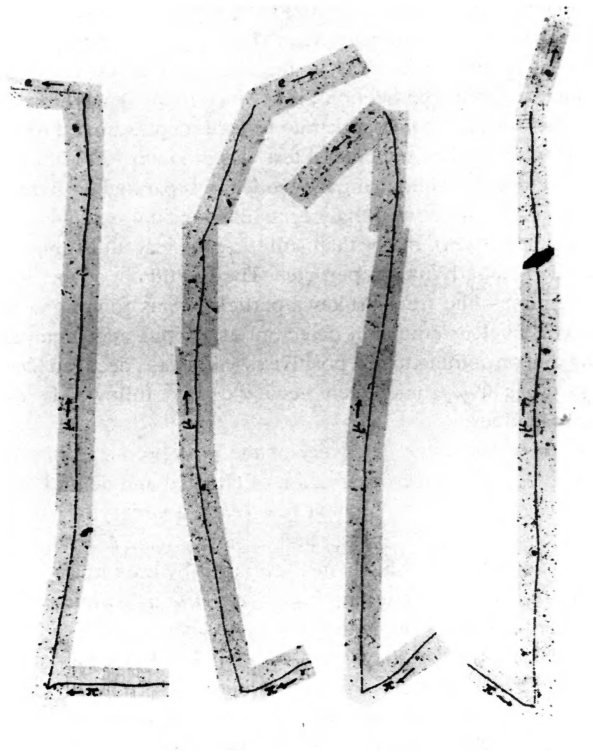


Figura 2: En la figura se muestra una fotografía de la emulsión nuclear, en la que se exhibe cuatro ejemplos del decaimiento de piones positivos π^+ en muones μ^+. Por otro lado, también se puede apreciar el decaimiento del muón μ^+ en un electrón positivo.

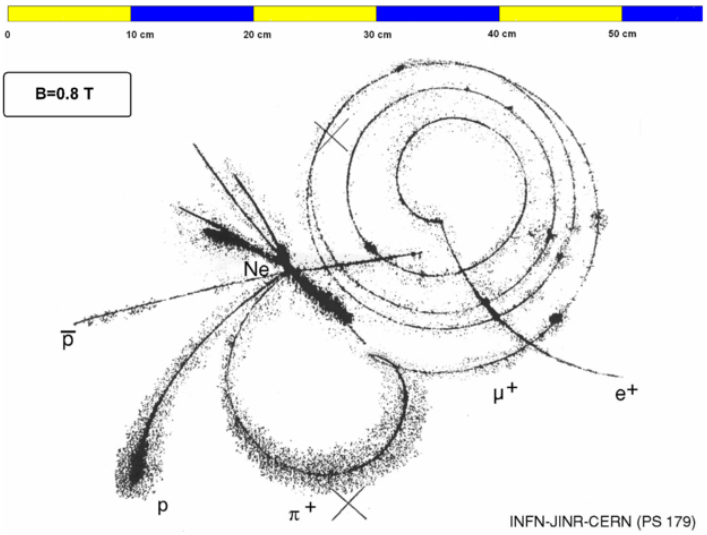


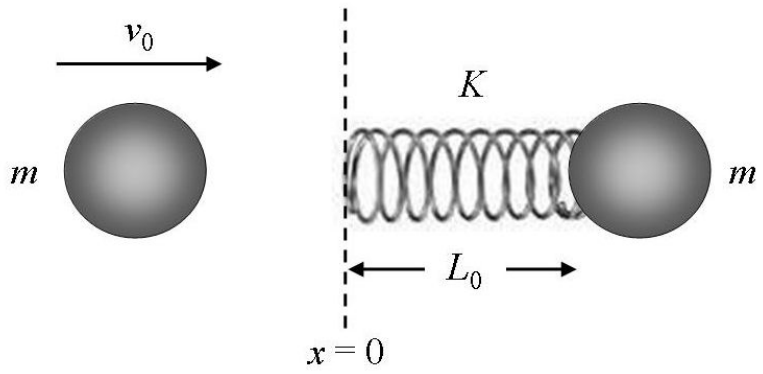
Figura 3: En la figura se muestra las trayectorias curvas que describen las partículas cargadas, como efecto de la interacción con el campo magnético. En este caso particular se muestra la aniquilación de un antiprotón.

XX Olimpiada Iberoamericana de Física

Problema 3

1. (*9 puntos*)

Considere la interacción elástica de dos partículas idénticas de masa m por medio de un resorte ideal (de constante elástica K y longitud natural L_0). El resorte está unido a la partícula que está incialmente en reposo, mientras la otra partícula avanza libremente con velocidad inicial v_0 (Ver figura adjunta).



Después de la interacción entre ambas partículas, estas se separan.

a) Identifique qué magnitudes físicas se conservan. Justifique sus respuestas. (*2 puntos*)
b) Escriba las correspondientes ecuaciones de conservación. (*2 puntos*)
c) Determine la máxima compresión que llega a experimentar el resorte. (*2 puntos*)
d) Determine la velocidad final de la partícula unida al resorte. (*2 puntos*)
e) Trace una gráfica cualitativa de fuerza sobre la partícula adherida al resorte como función el tiempo. Explique qué magnitud representa el área bajo esta curva y determine su expresión. (*1 punto*)

PRUEBA EXPERIMENTAL
Problema A

Ascenso capilar entre dos placas de vidrio

1. Planteamiento del problema. Un líquido en contacto con aire forma una interfase o superficie cuyas propiedades se asemejan a una membrana elástica delgada. Este fenómeno se caracteriza por la **tensión superficial**, que se define como la componente tangencial de la fuerza superficial por unidad de longitud. El concepto de tensión superficial de los líquidos se puede utilizar para explicar observaciones cotidianas que nos llevan a preguntas tales como: ¿por qué algunos insectos pueden caminar sobre el agua? ¿Por qué al sumergir la ropa en agua con jabón se moja más rápidamente que en agua pura? El objetivo de esta prueba es **determinar el valor de la tensión superficial de un líquido.**

2. Fundamento teórico. Cuando se tienen dos placas de vidrio formando una cuña vertical con una pequeña separación (pequeño ángulo) como se muestra en la figura 1, el líquido asciende entre los vidrios. Este fenómeno se denomina **capilaridad**. La altura alcanzada por el líquido está dada por el equilibrio entre el peso y la componente vertical de la fuerza debida a la tensión superficial.

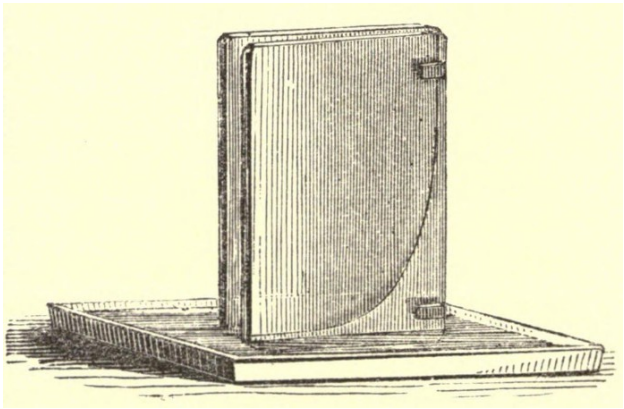


Fig. 1 - Imagen perteneciente a un antiguo texto de física general, de Benjamin Silliman, del año 1860, Principles of physics : or, Natural philosophy; designed for the use of colleges and schools.

Si consideramos una pequeña sección o columna de fluido de altura y y ancho Δx como se indica en la figura 2, la fuerza vertical F está dada por $F=\gamma\Delta x$, donde γ es la tensión superficial. Planteando el equilibrio entre esta fuerza y el peso del fluido, es posible obtener la siguiente relación funcional entre la altura *y*, y la distancia *x*, al vértice de la cuña (Fig. 3),

$$y=\left(\frac{2\gamma L}{\rho a g}\right)\frac{1}{x}$$

donde $\rho=1{,}00\times10^{3}$ kg/m^3 es la densidad del líquido, $g=9{,}8$ m/s^2 es la aceleración gravitatoria, a es la separación entre las placas a una distancia $x=L$.

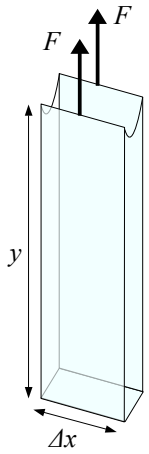


Fig. 2 - Columna de líquido

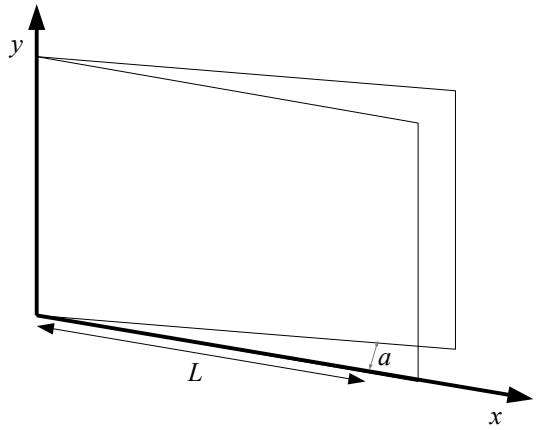


Fig. 3 - Esquema de la cuña formada por las placas de vidrio.

3. Materiales:

- 2 placas de vidrio
- 1 separador metálico de espesor, $a = (1{,}20 \pm 0{,}05)$ mm.
- 4 clips (o aprieta-papeles)
- 1 transparencia cuadriculada (acetato). Considere que la cuadrícula es de 1 mm.
- 1 marcador (rotulador)
- Bandeja
- Pequeña cantidad de líquido coloreado.
- Papel milimetrado
- Regla

4. Procedimiento.

Construya un sistema similar al de la figura 1, colocando los vidrios en forma de cuña con el separador metálico situado entre ambos en el borde vertical derecho. Asegure los vidrios y la transparencia (acetato) con los clips, de forma que los bordes inferiores e izquierdos coincidan **exactamente**. De esta forma podrá medir las variables *x* e *y*.

Coloque los clips de forma que el sistema permanezca estable en posición vertical sobre la bandeja.

Vierta una pequeña cantidad de líquido en la bandeja y coloque encima el sistema, para que el líquido pueda ascender por el espacio entre los vidrios.

Espere unos cinco minutos a que el nivel del líquido forme una curva similar a la que se muestra en la figura 1. En caso de que la curva muestre irregularidades, presione suavemente los vidrios durante breves intervalos de tiempo. Cuando consiga una curva definida, tome medidas de la altura de la columna de líquido a partir de $x = 3$ cm, marcando en el acetato.

5. Precauciones

- Manipule con mucha precaución los vidrios.
- Evite tocar las caras internas de las placas de vidrio. La suciedad puede afectar al ascenso del líquido.
- Procure no mover la mesa para no interferir con el experimento de sus compañeros.

6. Al finalizar la prueba debe entregar:

1) Tabla de medidas y transparencia cuadriculada (séquela cuidadosamente con papel de cocina). (3 puntos)

2) Análisis de datos y gráfica. (3 puntos)

3|) Valor de la tensión superficial obtenido, con su incertidumbre. (4 puntos)

Indicación final: deje los materiales en las mismas condiciones que los recibió.

PRUEBA EXPERIMENTAL: Problema B

La Caja Gris RxCx

1. Planteamiento del problema. Una caja cerrada contiene un condensador y una resistencia. El objetivo de esta prueba experimental es determinar si dichos elementos están conectados en serie o en paralelo y los valores de la capacitancia C_x y de la resistencia R_x.

2. Materiales:

- Caja gris cerrada de cuyo interior salen dos cables uno rojo y otro negro.
- Un portapilas con 4 pilas AA de 1,5 V.
- Un multímetro de resistencia interna $1{,}00\,M\,\Omega$ que solo podrá ser utilizado como voltímetro.
- Un cronómetro digital.
- Dos cables cocodrilo-cocodrilo (rojo y negro).
- 3 resistencias: $100\,k\,\Omega$ (marrón-negro-amarillo-dorado), $220\,k\,\Omega$ (rojo–rojo-amarillo - dorado) y $470\,k\,\Omega$ (amarillo-violeta-amarillo-dorado).
- Papel milimetrado.

3. Procedimiento

Para llevar a cabo esta prueba deberá determinar el tiempo característico (también denominada constante de tiempo) de descarga del condensador utilizando circuitos formados con las resistencias suministradas.

Sugerencias:

- En un circuito RC, el decaimiento del potencial depende del tiempo en forma exponencial con un tiempo característico dado $V(t)=V_0 e^{-t/\tau}$ donde $\tau=RC$.
- Recuerde que en Física experimental, a la hora de determinar una relación funcional entre dos variables, se busca usualmente un procedimiento en que se realicen varias medidas de las variables.

4. Precauciones

- Para cargar el condensador es suficiente conectarlo a la fuente durante unos pocos segundos *uniendo siempre los cables rojo y negro a los terminales rojo y negro, respectivamente.*
- El multímetro *solamente puede ser utilizado como voltímetro*. Además de correr riesgo de dañar el equipo, otro tipo de medidas no serán tomadas en cuenta.

5. Al finalizar la prueba

1) Indique si el circuito es serie o paralelo y justifique su respuesta, incluyendo diagramas de los circuitos utilizados (4 puntos).
2) Realice la(s) tabla(s) de medidas y la(s) gráfica(s) correspondiente(s) (3 puntos).
3) Determine los valores de R_x y C_x (no se pide el análisis de incertidumbres) (3 puntos).

Indicación final: deje los materiales en las mismas condiciones que los recibió.

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 1

El LIGO y el año de las Ondas Gravitacionales (y su centenario).

Entre 1915 y 1916, Albert Einstein concluyó su Teoría General de la Relatividad (RG) en una serie de artículos que cambiaron el concepto newtoniano de espacio, tiempo y gravitación. La ecuación del campo gravitacional de la RG expresa que la masa y la energía modifican la geometría del espacio-tiempo. En palabras del gran físico John Wheeler:

"La materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.
El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse."

Entre otras cosas, la RG predice la existencia de fenómenos tan exóticos como los agujeros negros y las ondas gravitacionales. Los agujeros negros son objetos masivos que curvan el espacio-tiempo de tal modo que ni la luz puede escapar de ellos. Las ondas gravitacionales, son oscilaciones del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz. El paso de una onda gravitacional modifica el espacio-tiempo de tal modo que la distancia L, entre dos puntos se ve modificada en una cantidad ΔL. La *deformación* (*strain*) h, de una onda gravitacional se define como el cociente entre ambas,

$$h = \frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

En general estas ondas son extremadamente débiles, a menos que las masas y las aceleraciones involucradas sean extremadamente altas. Los candidatos a fuentes de ondas gravitacionales observables son algunos fenómenos astronómicos extraordinarios, como por ejemplo un sistema de estrellas binarias muy próximas rotando a gran velocidad una respecto de otra. Aun así las ondas generadas son tan débiles que por mucho tiempo se dudó acerca de la posibilidad de su detección directa. Según la RG, la potencia P emitida en forma de ondas gravitacionales por un sistema binario es aproximadamente,

$$P \approx \frac{c^3}{G}(\pi h f r)^2 \tag{2}$$

donde h es la deformación a una distancia r de la fuente y f es la frecuencia de la señal detectada. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal y $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz.

Sin embargo, la observación directa de ondas gravitacionales era un desafío que requería logros tecnológicos excepcionales. Ronald Drever, Rainer Weiss y Kip Thorne se cuentan entre los primeros científicos en proponer la detección de ondas gravitacionales mediante interferometría, lo cual constituye la base del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser: LIGO.

El proyecto cuenta actualmente con dos observatorios, **LIGO Hanford y LIGO Livingston, distanciados 3002 km**, uno de otro. Estos observatorios a menudo se comparan a gigantescos "micrófonos", pues permiten detectar las vibraciones gravitacionales del espacio-tiempo, de modo análogo a como un micrófono permite detectar las vibraciones de las ondas sonoras.

Cada observatorio está compuesto por dos brazos perpendiculares entre sí, de **4,0 km de longitud** cada uno. El efecto de una onda gravitacional es reducir las distancias en una dirección y simultáneamente aumentarlas en la dirección perpendicular. Es decir que cuando una onda gravitacional pasa a través del interferómetro, la longitud de los brazos oscila con la misma frecuencia de la onda gravitacional de tal modo que cuando un brazo se acorta el otro se estira y viceversa. Para medir la deformación producida por una onda gravitacional se utiliza un sistema constituido principalmente por un láser y varios espejos (Fig. 1). Para reducir las vibraciones producidas por el entorno, los espejos se encuentran colgando de un sofisticado sistema tipo péndulo.

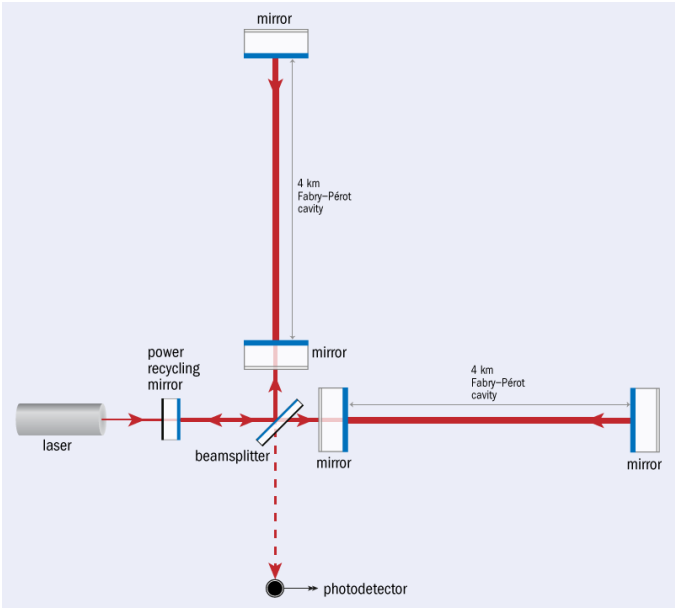


Fig. 1 - Esquema del interferómetro

Luego de una actualización (Advanced LIGO) culminada en agosto de 2015, LIGO tuvo su gran día el 14 de setiembre de 2015, cuando se observó una onda gravitacional por primera vez en la historia, justo a tiempo para "celebrar" los 100 años de la predicción teórica realizada por Einstein.

La señal detectada en uno de los observatorios se muestra en la Fig. 2. **La onda gravitacional fue detectada primero en LIGO Livingston y 6,9 ms más tarde en LIGO Hanford.**

El análisis de esta señal permitió concluir que las ondas gravitacionales observadas eran compatibles con las ondas generadas por el colapso de un sistema binario de agujeros negros con masas aproximadas, $m_A = 35\,M_S$ y $m_B = 30\,M_S$, donde $M_S = 2{,}0\times10^{30}$ kg es la masa del Sol. A este evento se lo denominó GW150914 (Gravitational Wave 2015 September 14).

El descubrimiento fue anunciado públicamente el 11 de febrero de 2016, junto con la publicación del artículo científico correspondiente en la revista Physical Review Letters, inaugurando así la nueva era de la astronomía de ondas gravitacionales.

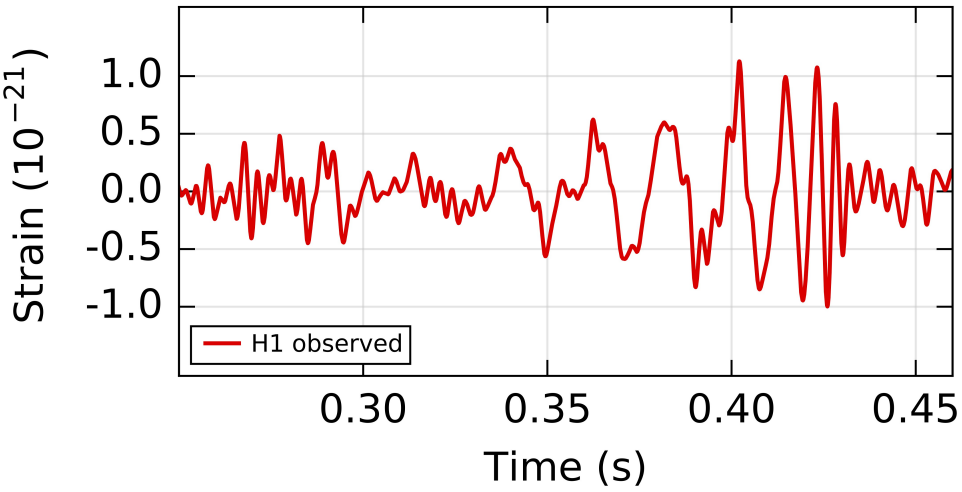


Fig. 2 - Señales detectadas en ambos observatorios LIGO. Deformación (strain) h en función del tiempo t.

En este problema exploraremos algunos aspectos de la física del evento GW150914.

PARTE 1. "Escuchando el universo": Detección de ondas gravitacionales. (2 puntos)

1a) (0,9 puntos) Para comprender la sensibilidad del LIGO, considere una abeja de 0,1 g de masa, que se encuentra a 10 metros de uno de los espejos del interferómetro. Determine el desplazamiento *d* que la abeja produce sobre el el espejo por atracción gravitatoria. Para esto considere un modelo simplificado, como si el espejo estuviese suspendido de un hilo de 1,0 m de longitud.

Este tipo de perturbación sobre el instrumento se denomina "ruido newtoniano".

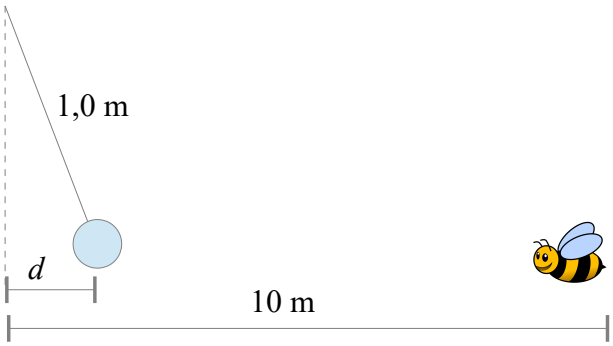


Fig. 3 – Diagrama para la parte 1a.

1b) (0,4 puntos) A partir de la información de la señal observada (Fig. 2), determine el desplazamiento máximo que sufrió el espejo ante el paso de la onda gravitacional y compare esa distancia con la calculada en el punto 1a) y con el orden de magnitud del diámetro de un protón (igual a 1 femtometro).

1c) (0,7 puntos) Determine la dirección de la fuente que originó las ondas gravitacionales. Para esto calcule el ángulo θ, que forma la dirección de la fuente con respecto al plano mediatriz del segmento de recta determinado por ambos observatorios. (Observe que con la información disponible solo podemos determinar un arco de la posible posición de la fuente.)

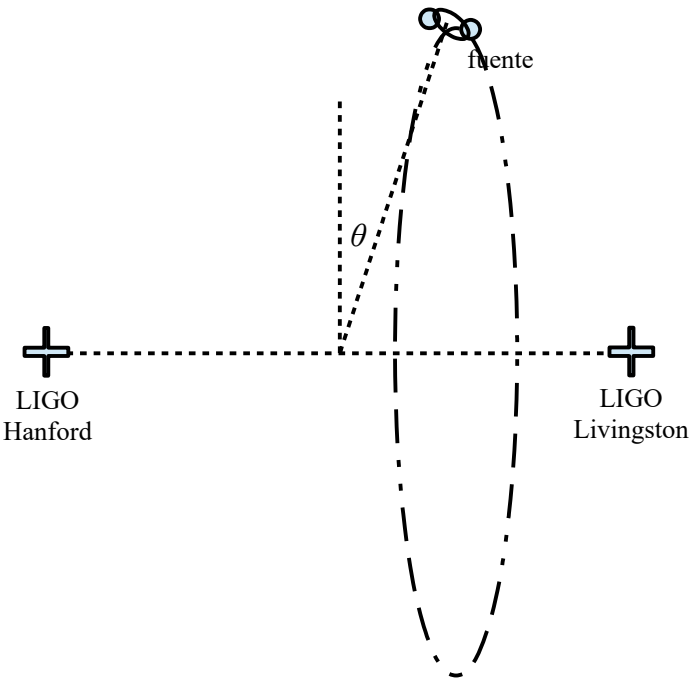


Fig. 4 – Diagrama para la parte 1c (fuera de escala)

PARTE 2. "Danza cósmica": Sistemas binarios. (3,5 puntos)

Un sistema binario está formado por dos estrellas con masas m_A y m_B . Cada una se mueve siguiendo un movimiento circular uniforme en torno al centro de masas del sistema. La distancia entre ambas estrellas es a . Considere un modelo newtoniano, sin correcciones relativistas.

2a) (1,3 puntos) Determine la frecuencia de rotación del sistema, *f*.
2b) (0,7 puntos) Determine el módulo de la velocidad de cada estrella, v_A y v_B , en función de la distancia a y las masas m_A y m_B .
2c) (0,9 puntos) Determine la energía mecánica del sistema, *E*, en función de la distancia y las masas.
2d) (0,6 puntos) De acuerdo con lo anterior, si por algún mecanismo el sistema pierde energía:
2d1) ¿Qué ocurre con la distancia entre las estrellas, aumenta, disminuye o se conserva?
2d2) ¿Qué ocurre con la frecuencia?
2d3) ¿Qué ocurre con la velocidad?
Justifique sus respuestas

PARTE 3. "Música de las esferas": Radiación de ondas gravitacionales. (2,5 puntos)

De acuerdo con la teoría newtoniana de la gravedad, los sistemas binarios serían estables, es decir que podrían mantenerse perpetuamente en órbita. Por el contrario, de acuerdo con la RG, ciertos sistemas acelerados emiten ondas gravitacionales (de manera similar a como las cargas eléctricas aceleradas emiten ondas electromagnéticas). Esto significa que los sistemas binarios no son estables pues, debido a la emisión de radiación gravitacional, el sistema pierde energía y consecuentemente la distancia entre los cuerpos disminuye. Este proceso se puede estudiar con una buena aproximación utilizando física newtoniana hasta que el sistema alcanza la llamada *mínima distancia de órbita estable* (ISCO = innermost stable circular orbit).

Según la RG, esta distancia orbital es $a_{ISCO}=\frac{6\,G\,M}{c^2}$, donde M es la masa total del sistema.

Una vez que se alcanza esta distancia, los cuerpos comienzan a "caer" de forma precipitada uno hacia el otro y es necesario utilizar las ecuaciones completas de la RG (y supercomputadoras) para predecir su movimiento exacto.

Finalmente los objetos colisionan y si se trata de objetos compactos (estrellas de neutrones, agujeros negros) terminan fusionándose para formar un objeto.

Suponga que en $t=0$ los agujeros negros están muy alejados, de tal modo que la energía mecánica del sistema es prácticamente nula, $E_0=0$. Al interactuar gravitatoriamente, comienzan a orbitar en torno al centro de masas. Mediante el mecanismo de radiación gravitacional el sistema pierde energía de modo que en $t=t_{ISCO}$ la distancia entre los agujeros negros es $a=a_{ISCO}$.

Para los agujeros negros correspondientes al evento GW150914, en $t=t_{ISCO}$:

3a) (0,7 puntos) Determine la distancia entre los agujeros negros.
3b) (0,6 puntos) Determine la frecuencia de rotación del sistema.
3c) (0,6 puntos) Determine el módulo de la velocidad de cada agujero negro.
3d) (0,6 puntos) Determine la energía gravitacional liberada por el sistema entre $t=0$ y $t=t_{ISCO}$.

PARTE 4. "Conclusión": Colapso y defecto de masa. (2 puntos)

Después de $t=t_{ISCO}$, el sistema binario colapsó rápidamente y los agujeros negros se fusionaron para formar un único agujero negro de masa $m=62\,M_S$ en tan solo 20 ms.

4a) (0,7 puntos) Determine la potencia con la que emitió el sistema durante esos 20 ms. Exprese esa potencia como un múltiplo de la luminosidad del Sol ($L_S=3{,}85\times10^{26}$ W).

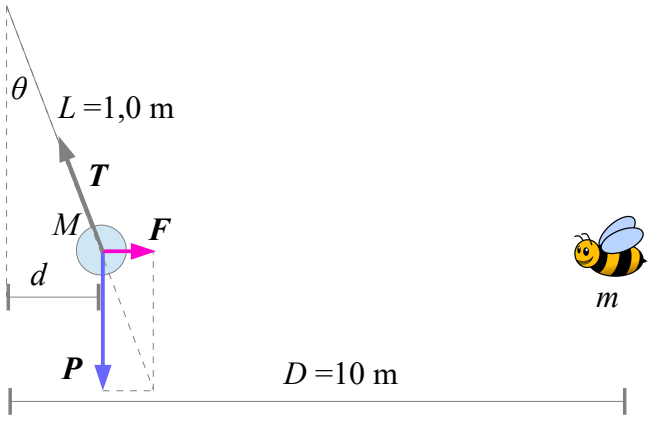
4b) (1,3 puntos) A partir de la potencia calculada y de la amplitud de la señal detectada (Fig. 2), estime la distancia en años luz a la que se encontraba el sistema binario que generó las ondas gravitacionales observadas. Según la Fig. 2, la frecuencia de la señal detectada en el momento de máxima amplitud es de, aproximadamente, 150 Hz.

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 1

El LIGO y el año de las Ondas Gravitacionales (y su centenario).

PARTE 1. "Escuchando el universo": Detección de ondas gravitacionales.

1a) Asumiendo que el ángulo que forma el péndulo con la vertical es pequeño, entonces se cumplen las siguientes relaciones,



$$\frac{d}{L} = sen\,\theta \approx tg\,\theta = \frac{F}{P} = \frac{\left(\frac{G\,M\,m}{D^2}\right)}{M\,g}$$

$$d \approx \frac{G\,m\,L}{g\,D^2}$$

$$\boxed{d \approx 6{,}8\times 10^{-18}\,m}$$

1b) La máxima deformación observada en la señal del GW150914 es del orden de 10^{-21} . Como cada brazo del LIGO mide 4,0 km, entonces a partir de la definición de deformación (strain) (ec. 1), se tiene que el máximo desplazamiento del espejo fue,

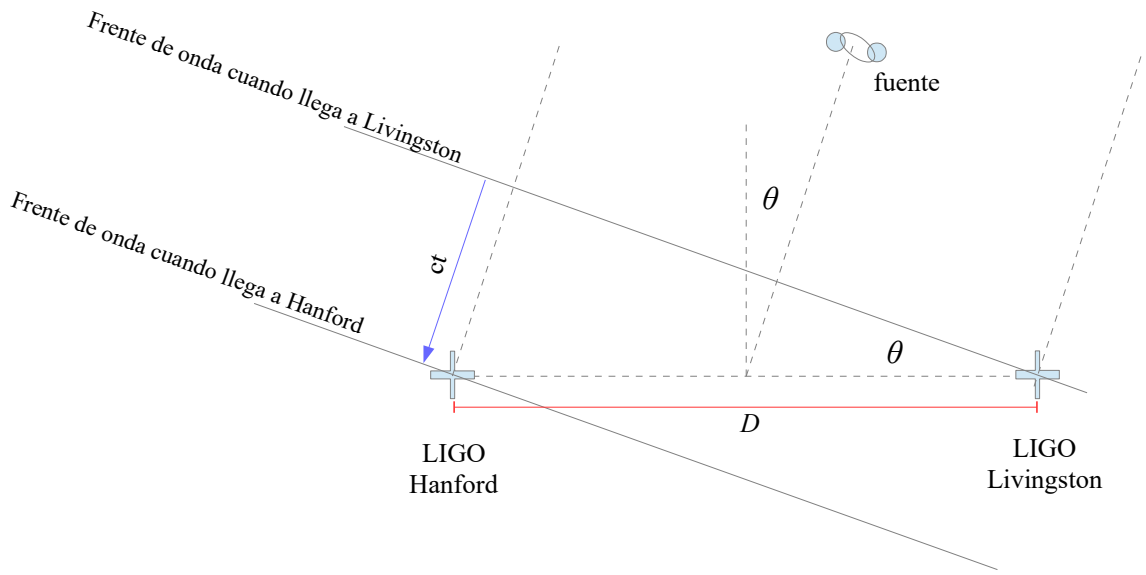
$$\Delta L = h\,L$$

$$\boxed{\Delta L = 4\times 10^{-18}\,m}$$

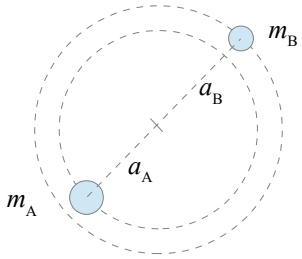
que es menor que el desplazamiento producido por la abeja de la parte anterior.

En relación al tamaño de un protón es del orden de 4 milésimas partes: $\Delta L = 4\times 10^{-3}\,fm$

1c) El frente de onda recorrió una distancia $c{\cdot}t$ en el tiempo t. Donde c es la velocidad de la luz. Es fácil verificar que esa distancia se relaciona con el ángulo θ de procedencia de la onda y la distancia D entre los detectores, $c\,t = D\,sen\,\theta$. Entonces $\theta = arcsen\left(\frac{c\,t}{D}\right)$. $\boxed{\theta = 43{,}6^{\circ}}$



PARTE 2. "Danza cósmica": Sistemas binarios.



2a) Determinar la frecuencia de rotación del sistema.

El centro de rotación de ambas estrellas es el centro de masa del sistema binario, entonces se cumple,

$$a = a_A + a_B$$

$$m_A a_A = m_B a_B$$

De donde, $m_A a_A = m_B (a - a_A)$, entonces, $a_A = a \dfrac{m_B}{m_A + m_B}$ y $a_B = a \dfrac{m_A}{m_A + m_B}$.

Cada estrella describe un movimiento circular con la misma velocidad angular ω , mientras se atraen gravitacionalmente,

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_A \omega^2 a_A$$

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_B \omega^2 a_B$$

Entonces,

$$\omega = \sqrt{G \frac{m_B}{a^2 a_A}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}}}$$

2b)

$$v_A = \omega\, a_A = \sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a^3}}\, a_A = \sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a^3}}\, a\, \frac{m_B}{m_A+m_B} = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}$$

$$\boxed{v_A = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}}$$

$$\boxed{v_B = m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)a}}}$$

2c)

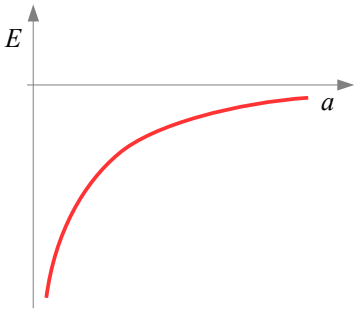
$$E = K + U = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 - G\frac{m_A m_B}{a} = \frac{1}{2}m_A m_B^2 \frac{G}{(m_A+m_B)a} + \frac{1}{2}m_B m_A^2 \frac{G}{(m_A+m_B)a} - G\frac{m_A m_B}{a}$$

$$E = \frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a} - G\frac{m_A m_B}{a}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a}}$$

2d)

2d1)
La energía del sistema es negativa e inversamente proporcional a la distancia entre las estrellas, de modo que si la energía se reduce entonces la distancia también.



2d2)
De acuerdo con la ecuación hallada en la parte 2a, al reducirse la distancia, aumenta la frecuencia.

2d3)
De la ecuación de la parte 2b, la velocidad aumenta.

En resumen: E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.

PARTE 3. "Música de las esferas": Radiación de ondas gravitacionales.

3a)

$$a_{ISCO} = \frac{6\,G(m_A+m_B)}{c^2}$$

$$\boxed{a_{ISCO} = 578\,km}$$

3b)

$$f_{ISCO}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a_{ISCO}^3}}$$

$$\boxed{f_{ISCO}=33{,}7\ Hz}$$

3c)

$$v_{A-ISCO}=m_B\sqrt{\frac{G}{\left(m_A+m_B\right)a_{ISCO}}}$$

$$v_{B-ISCO}=m_A\sqrt{\frac{G}{\left(m_A+m_B\right)a_{ISCO}}}$$

$$\boxed{v_{A-ISCO}=5{,}65\times10^7\ m/s}$$

$$\boxed{v_{B-ISCO}=6{,}60\times10^7\ m/s}$$

3d)

$$E_{ISCO}=-\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$$

$$E_{ISCO}=-2{,}42\times10^{47}J$$

$$\boxed{\Delta E_{ISCO}=E_0-E_{ISCO}=\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}}$$

$$\boxed{\Delta E_{ISCO}=2{,}42\times10^{47}J}$$

PARTE 4. "Conclusión": Colapso y defecto de masa.

4a) La masa perdida por el sistema ($\Delta M=3M_S$) es equivalente a la energía radiada gravitacionalmente desde t=0 hasta el colapso,

$$\Delta E_R=\Delta M\,c^2=5{,}47\times10^{47}J$$

La energía radiada durante el colapso es,

$$\Delta E_C=\Delta E_R-\Delta E_{ISCO}=2{,}98\times10^{47}J$$

La potencia de esa emisión,

$$P_C=\frac{\Delta E_C}{\Delta t}$$

$$P_C = 1{,}49 \times 10^{49}\, W$$

$$\boxed{P_C = 3{,}87 \times 10^{22}\, L_S}$$

4b) Con la frecuencia ($f = 150\, Hz$) y la deformación máxima ($h \approx 10^{21}$) medidas por LIGO (Fig. 2), junto con la potencia calculada en parte anterior, se puede, mediante la ec.2, determinar la distancia *r* a la que se encuentra el sistema binario,

$$h \approx \frac{1}{\pi f r}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$$

$$r \approx \frac{1}{\pi f h}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$$

$$r \approx 1{,}29 \times 10^{25}\, m$$

$$\boxed{r \approx 1{,}36 \times 10^{9}\, años\, luz}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Solución numérica	Puntos
1a	$d \approx \frac{G\,m\,L}{g\,D^2}$	$d \approx 6{,}8\times10^{-18}\,m$	0,9
1b	$\Delta L = h\,L$	$\Delta L = 4\times10^{-18}\,m$	0,4
1b	$\theta = arcsen\left(\frac{c\,t}{D}\right)$	$\theta = 43{,}6^{\,o}$	0,7
2a	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a^3}}$		1,3
2b	$v_A = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a}}$ $v_B = m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a}}$		0,7
2c	$E = -\frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a}$		0,9
2d	E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.		0,6
3a	$a_{ISCO} = \frac{6\,G\,(m_A+m_B)}{c^2}$	$a_{ISCO} = 578\,km$	0,7
3b	$f_{ISCO} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{G\frac{m_A+m_B}{a_{ISCO}^3}}$	$f_{ISCO} = 33{,}7\,Hz$	0,6
3c	$v_{A-ISCO} = m_B\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a_{ISCO}}}$ $v_{B-ISCO} = m_A\sqrt{\frac{G}{(m_A+m_B)\,a_{ISCO}}}$	$v_{A-ISCO} = 5{,}65\times10^{7}\,m/s$ $v_{B-ISCO} = 6{,}60\times10^{7}\,m/s$	0,6
3d	$\Delta E = E_0 - E_{ISCO} = \frac{1}{2}G\frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$	$\Delta E = 2{,}42\times10^{47}\,J$	0,6
4a	$P_C = \frac{\Delta M\,c^2 - \Delta E_{ISCO}}{\Delta t}$	$P_C = 1{,}49\times10^{49}\,W$ $P_C = 3{,}87\times10^{22}\,L_S$	0,7
4b	$r \approx \frac{1}{\pi\,f\,h}\sqrt{\frac{G}{c^3}P}$	$r \approx 1{,}36\times10^{9}\,años\,luz$	1,3

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 2

El smartphone: un laboratorio en el bolsillo.

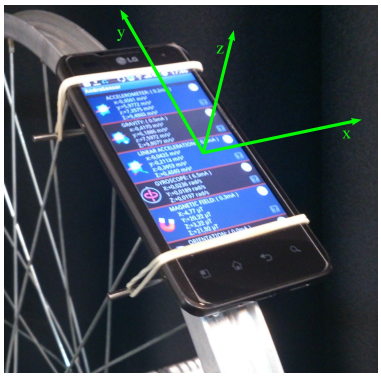


Fig. 1 – Ejes convencionales de un smartphone.

En los últimos años, los smartphones o teléfonos inteligentes se han vuelto omnipresentes y su uso se ha extendido más allá de su propósito original, alcanzando incluso a la enseñanza de la física. La capacidad de procesamiento de estos dispositivos, junto con los sensores incorporados, los convierten en verdaderos laboratorios portátiles, capaces de medir diferentes magnitudes físicas como aceleración, velocidad angular, campo magnético, luminosidad, presión, entre otras.

Dos de los sensores más utilizados son el acelerómetro y el giroscopio. Ambos sensores son tri-axiales, es decir conjuntos de tres sensores que miden las tres componentes ortogonales de cada magnitud, según un sistema de referencia solidario con el dispositivo, tal como se muestra en la figura 1, donde el eje *z* es perpendicular a la pantalla.

Parte 1: Sensor de aceleración. (4 puntos)

El acelerómetro es un sensor microscópico que a pesar de su nombre en realidad mide fuerza por unidad de masa, es decir, debería llamarse campímetro (o sensor de fuerza).

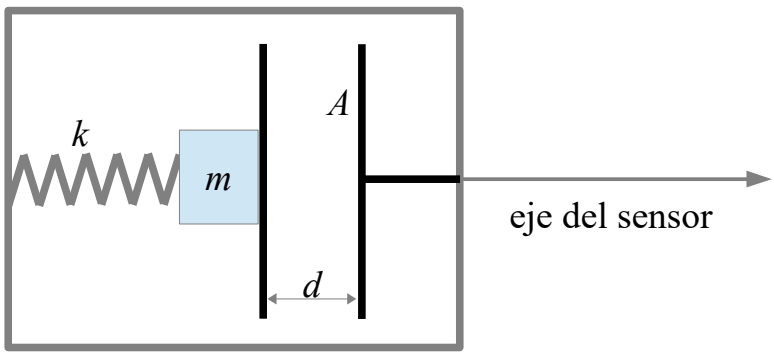


Fig. 2 – Esquema simplificado de un acelerómetro con tecnología capacitiva.

En forma simplificada se puede modelar como una partícula de masa *m* (*masa de prueba*), unida a un resorte de constante elástica *k*. Cuando el sistema se acelera, la masa de prueba se desplaza. Para determinar el desplazamiento de la masa de prueba (y por consiguiente determinar la aceleración) existen diferentes tecnologías, piezoeléctrica, piezoresistiva, capacitiva. En este caso consideraremos un acelerómetro simplificado de tecnología capacitiva como el que se muestra en la Fig. 2, donde una placa metálica cuadrada de área *A* y masa despreciable, está unida a la masa de prueba, y es paralela a otra placa fija metálica idéntica, formando un condensador de capacidad C_X. Cuando el resorte no realiza fuerza, la placas están separadas una distancia *d*. Se define el *eje del sensor* como la

dirección en que la masa de prueba tiene libertad de moverse (en este caso la dirección del resorte). En todo este problema considere que la fuerza electrostática es despreciable.

1a) (0,6 puntos) Considerando que el eje del sensor permanece horizontal, determine el desplazamiento *s*, de la placa izquierda del condensador cuando el sistema se mueve con aceleración constante *a*, hacia la derecha. Considere positivos los desplazamiento hacia la derecha.

Definiendo C_0, como la capacidad de C_X, cuando $s=0$:
1b) (1,7 puntos) Determine C_X, como una función lineal de la aceleración, considerando $s \ll d$.
[Sugerencia: Recuerde que si $u \ll 1$ entonces $(1+u)^n \approx 1+nu$]

El condensador C_X, se conecta en paralelo con otro condensador de capacidad constante C_0. El sistema formado por ambos condensadores permanece aislado y cargado de tal modo que cuando $s=0$, la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores es V_0 .
1c) (1,7 puntos) Demuestre que la diferencia de potencial V_S , entre las placas de los condensadores es aproximadamente una función lineal de la aceleración del sensor de la forma,

$$V_S = V_0(1+\beta a)$$

y determine β en función de los parámetros del acelerómetro.

Parte 2: Principio de equivalencia. (1,8 puntos)

Una de las ideas más brillantes de Einstein es el principio de equivalencia, el cual establece que desde un sistema aislado es imposible discernir entre un campo gravitatorio y un sistema de referencia no inercial (acelerado). Suponga que el acelerómetro se coloca en el piso de un ascensor con su eje *z* orientado verticalmente hacia arriba.

Determine la magnitud de la aceleración *a*, medida por el sensor en los siguientes casos:
2a) (0,6 puntos) El ascensor permanece en reposo con respecto a la Tierra.
2b) (0,6 puntos) El ascensor se mueve en caída libre.
2c) (0,6 puntos) El ascensor sube con aceleración *a'*.

Parte 3: Péndulo físico (4,2 puntos)

Una barra de longitud *L* y masa *M* puede girar libremente en un plano vertical, con respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos. En el otro extremo se fija un smartphone de tal modo que su eje *y*, está dirigido hacia el eje de rotación. El eje *z*, es paralelo al eje de rotación y el eje *x*, es perpendicular a la barra. El smartphone tiene masa *m*, y se puede considerar como una masa puntual que se encuentra a una distancia *L* del eje de rotación. Considere que el momento de inercia total de la barra y el smartphone es *I.* Se considera un sistema cartesiano de coordenadas *(x',y')*, con origen en el eje de rotación, siendo x', el eje horizontal como se indica en la figura 3.

El acelerómetro del smartphone mide los valores de a_x, a_y, y a_z, y el giroscopio los de las velocidades angulares ω_x. ω_y y ω_z. Es importante destacar que en este sistema siempre se cumple que a_z=0, ω_x=0 y ω_y=0, independientemente de las condiciones iniciales.

Determine la posición del smartphone en el sistema de referencia *(x',y')*, en función de los parámetros del péndulo (*M, L, m, I*), y de las medidas obtenidas por el smartphone (a_x, a_y, y ω_z) para cierto instante de tiempo.

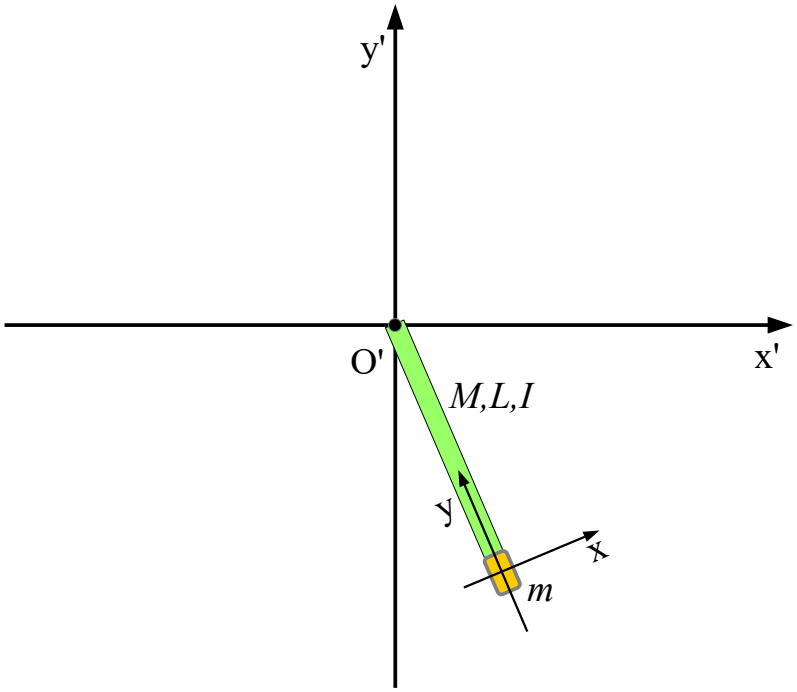


Fig. 3 – Barra con smartphone que puede girar libremente con respecto al origen de coordenadas O'.

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 2 - SOLUCIONES

El smartphone: un laboratorio en el bolsillo.

Parte 1.

1a) Por Newton, $-k\,s = m\,a$, entonces: $\boxed{s = -\frac{m}{k}a}$

1b) Cuando la placa se desplaza una distancia *s,* es,

$$C_X(s) = \frac{\epsilon_0 A}{d-s} = \frac{\epsilon_0 A}{d\left(1-\frac{s}{d}\right)} \approx \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(1+\frac{s}{d}\right) = C_0\left(1+\frac{s}{d}\right)$$

Sustituyendo por el desplazamiento calculado en 1a, se obtiene la capacitancia en función de la aceleración del sensor,

$$\boxed{C_X = C_0\left(1-\frac{m}{k\,d}a\right)}$$

1c) La carga inicial del sistema es $Q_0 = 2\,C_0 V_0$. Por conservación de la carga, la carga total del sistema es, $C_X V_S + C_0 V_S = 2\,C_0 V_0$, de donde,

$$V_S = \frac{2\,C_0 V_0}{C_X + C_0} = \frac{2\,V_0}{\frac{C_X}{C_0}+1}$$

Sustituyendo la capacitancia hallada en la parte 1b, se obtiene la diferencia de potencia en función de la aceleración,

$$V_S = \frac{2\,V_0}{\left(1-\frac{m}{k\,d}a\right)+1} = \frac{V_0}{1-\frac{m}{2\,k\,d}a} \approx V_0\left(1+\frac{m}{2\,k\,d}a\right)$$

Hemos probado entonces que,

$\boxed{V_S \approx V_0(1+\beta\,a)}$, donde $\boxed{\beta = \frac{m}{2\,k\,d}}$

Parte 2.

2a) Aplicando Newton a la masa de prueba del sensor orientado verticalmente, se tiene, $-k\,s-m\,g=0$, de donde, $s=-\frac{m\,g}{k}$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $\boxed{a=g}$ (a pesar de estar en reposo con respecto a la Tierra).

2b) Cuando el ascensor cae, la ecuación de Newton para la masa de prueba es, $-k\,s-m\,g=m\,a$, siendo $a=-g$, la aceleración del sensor. Por lo tanto, $s=0$. Como el desplazamiento es nulo, la aceleración reportada por el sensor será también nula, $\boxed{a=0}$ (aunque se encuentra acelerado).

2c) En el caso general, cuando el ascensor sube con aceleración *a*, la ecuación de Newton es la misma de la parte 2b, y el desplazamiento de la masa de prueba es, $s=-\frac{m\left(g+a'\right)}{k}$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $\boxed{a=g+a'}$.

Parte 3.

La ecuación de movimiento de la barra con el smartphones se obtiene aplicando Newton (considerando despreciables las diferentes fuerzas disipativas), con respecto al eje de giro. Esto es, la suma de los torques con respecto al eje es igual al momento de inercia *I*, por la aceleración angular α ,

$$-m\,g\,L\cos\theta-M\,g\,\frac{L}{2}\cos\theta=I\,\alpha$$

lo que es lo mismo,

$$-\frac{2\,m+M}{2\,I}\,g\,L\cos\theta=\alpha$$

donde θ , es el ángulo de la barra con respecto al eje x' (θ crece en sentido antihorario).

Como el smartphone se mueve siguiendo una trayectoria circular, la aceleración en coordenadas polares con respecto al sistema de coordenadas x'-y', es,

$$\vec{a}\,'=-L\,\omega^2\,\hat{r}+L\,\alpha\,\hat{\theta}$$

donde ω , es la velocidad angular del sistema, misma que mide el giroscopio del eje z del smartphone.

Los versores polares elegidos coinciden con los ejes del celular: el versor radial es opuesto al eje y ($\hat{r}=-\hat{y}$) y el versor tangencial coincide con el eje x ($\hat{\theta}=\hat{x}$).

Esto significa que las componentes de la aceleración del smartphone en el sistema propio del smartphone x-y, son,

$$a'_x = L\alpha$$

$$a'_y = L\omega^2$$

Como lo probamos en la parte 2c, la aceleración reportada por el acelerómetro es la suma de la aceleración en el sistema x'-y', y la componente opuesta de g. Proyectando g en el sistema x-y del smartphone, se tiene que las aceleraciones reportadas por el smartphone, son,

$$a_x = a'x + g\cos\theta = L\alpha + g\cos\theta = -\frac{2m+M}{2I} g L^2 \cos\theta + g\cos\theta = \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right) g\cos\theta$$

$$a_y = a'_y - g\,sen\,\theta = L\omega^2 - g\,sen\,\theta$$

donde hemos utilizado la ecuación de movimiento para sustituir la aceleración angular de la primera ecuación.

De ambas ecuaciones se consiguen las expresiones para el seno y el coseno del ángulo de posición de la barra en función de los valores reportados por los sensores del smartphone, a_x, a_y y ω :

$$\cos\theta = \frac{a_x}{g\left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)}$$

$$sen\,\theta = \frac{L\omega^2 - a_y}{g}$$

de donde se puede determinar la posición del smartphone en cualquier instante conociendo las medidas que reportan los sensores y los parámetros del sistema:

$$\boxed{x' = \frac{a_x}{g\left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)} L}$$

$$\boxed{y' = \frac{L\omega^2 - a_y}{g} L}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Puntos
1a	$s=-\frac{m}{k}a$	0,6
1b	$C_X=C_0\left(1-\frac{m}{k\,d}a\right)$	1,7
1c	$V_S\approx V_0(1+\beta\,a)\quad,\quad \beta=\frac{m}{2\,k\,d}$	1,7
2a	$s=-\frac{m\,g}{k}$	0,6
2b	$a=0$	0,6
2c	$a=g+a'$	0,6
3	$\boxed{x'=\frac{a_x}{g\left(1-\frac{2m+M}{2I}L^2\right)}L}$ $\boxed{y'=\frac{L\omega^2-a_y}{g}L}$	4,2
3	$\boxed{x'=L\sqrt{1-\left(\frac{L\omega^2-a_y}{g}\right)^2}}$ $\boxed{y'=\frac{L\omega^2-a_y}{g}L}$	3,8
3	$\boxed{x'=\frac{a_x}{g\left(1-\frac{2m+M}{2I}L^2\right)}L}$ $\boxed{y'=L\sqrt{1-\left(\frac{a_x}{g\left(1-\frac{2m+M}{2I}L^2\right)}\right)^2}}$	3,8

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 3

Propulsor magnetohidrodinámico.

Un propulsor magnetohidrodinámico elemental (MHD), consiste en una caja hueca de largo L, con dos caras abiertas de ancho a y altura h, que se sumerge en un fluido con conductividad eléctrica σ (la conductividad se define como el inverso de la resistividad). La cara inferior y la superior son metálicas y están conectadas a una fuente de corriente continua con diferencia de potencial V, que establece una corriente eléctrica que se supondrá perpendicular a las placas. Las caras de dimensiones L y h, son dos imanes rectangulares no conductores, de modo que dentro de la caja se establece un campo magnético de módulo B, que en forma aproximada vamos a suponer uniforme, dirigido como se indica en la figura 1.

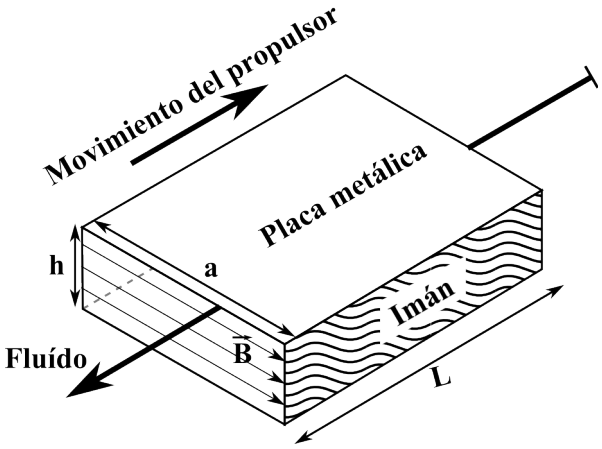


Fig. 1 - Vista en perspectiva del propulsor MHD.

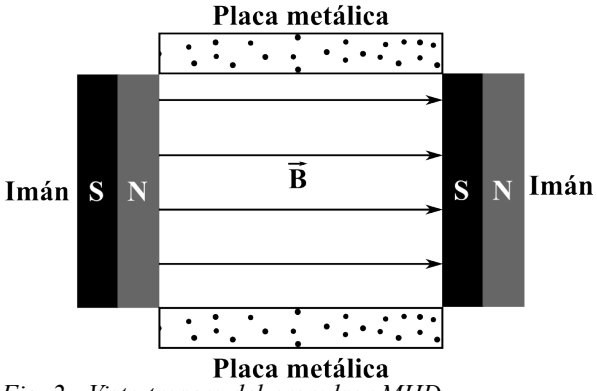


Fig. 2 - Vista trasera del propulsor MHD.

a) (1,4 puntos) Para que el propulsor avance en la dirección del movimiento indicada en la figura 1, determine si la placa de arriba es positiva o negativa, justificando su respuesta.
Escriba la expresión para la fuerza aplicada por el propulsor MHD sobre el fluido.

b) (2,8 puntos) Para el par de imanes considerados, la intensidad del campo magnético depende de la distancia *a*, según $B(a)=0{,}42-14\,a$, donde *a* está dado en metros y *B* en Tesla. Esta relación lineal es válida para distancias comprendidas entre 0,005 m y 0,025 m.
Escriba la expresión para la distancia *a*, entre los imanes, a la cual es máxima la fuerza generada por el propulsor MHD y determine su valor.
Determine el valor del campo magnético para dicha distancia.

c) (1,4 puntos) Se construye un propulsor MHD para funcionar en agua salada, con el ancho calculado en la parte anterior, largo $L=12$ cm y altura $h=2{,}0$ cm. La fuente es una batería de $V_0=9{,}0$ V y resistencia interna $r_i=1{,}1\,\Omega$. La conductividad eléctrica del agua salada es $\sigma=4{,}8$ $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.
Escriba la expresión para la intensidad de corriente y determine su valor.
Determine la fuerza generada por el propulsor MHD.

d) (4,4 puntos) Se diseña un pequeño bote de juguete que es impulsado mediante el propulsor MHD de la parte anterior. El bote es una caja de 10 cm de ancho, 6 cm de altura y tiene la misma longitud que el propulsor (Fig. 3). La masa total del bote incluyendo la batería y el propulsor es $m=215$ g. Al moverse, el agua se opone al movimiento del bote con una fuerza de arrastre que es de la forma, $F_a=\frac{1}{2}\rho\,C\,A\,v^2$, donde $\rho=1{,}02\times10^3$ kg/m^3 es la densidad del agua salada, *C* es el coeficiente de arrastre, el cual depende de la forma, y que en este caso es $C=1{,}2$, *A* es el área frontal en contacto con el agua y *v* es la velocidad relativa entre el bote y el agua.
Escriba la expresión para la velocidad terminal (aceleración nula) con la que avanza el bote y determine su valor.

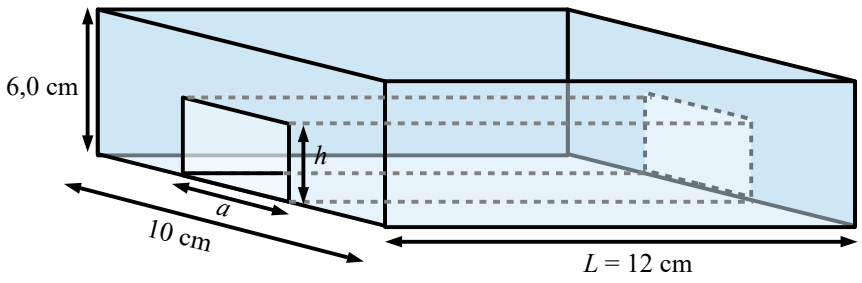


Fig. 3 - Dimensiones del bote de juguete

PRUEBA TEÓRICA
Problema Nº 3 - SOLUCIONES

Propulsor magnetohidrodinámico

a) Para propulsar el fluido hacia atrás, siendo que el campo está orientado como se muestra en la figura, la corriente eléctrica a través del fluido debe ser hacia abajo. Entonces la placa positiva es la superior.

La intensidad de corriente es $I=\frac{V}{R}$, donde R es la resistencia eléctrica del fluido, $R=\frac{h}{\sigma L a}$.

La fuerza magnética sobre la corriente eléctrica es, $F_P=B\,I\,h$.

Es decir, $\boxed{F_P=B\,V\,\sigma\,L\,a}$

b) Por una parte la fuerza propulsora tiende a aumentar cuando la separación *a*, aumenta, porque de ese modo se reduce la resistencia eléctrica y aumenta la intensidad de corriente. Por otra parte la fuerza aumenta al reducir la distancia *a*, porque de ese modo aumenta el campo magnético dentro del propulsor. La fuerza en función de *a* resulta ser un polinomio de segundo grado de concavidad negativa, $F_P=(0{,}42-14\,a)\,V\,\sigma\,L\,a$.

Sabemos que el vértice de un polinomio $A_2x^2+A_1x+A_0$ se encuentra en $x=-\frac{A_1}{2A_2}$.

Entonces la fuerza máxima se obtiene para, $\boxed{a=-\frac{0{,}42}{2(-14)}=0{,}015\,m}$

Y el campo para esta distancia es, $\boxed{B=0{,}21\,T}$

c) A causa de la resistencia interna de la batería, la corriente a través del agua es,

$I=\frac{V_0}{r_i+\frac{h}{\sigma L a}}$. Con los datos tenemos que, $I=2{,}6\,A$, de donde $\boxed{F_P=0{,}011\,N}$.

d) Cuando el bote está flotando se cumple que peso y empuje son iguales en módulo, $m\,g=\rho\,V_d\,g$, donde V_d , es el volumen de agua que desplaza el bote (suponiendo que el propulsor queda completamente sumergido). Este es, $V_d=0{,}10\cdot 0{,}12\,z-a\,h\,L$, donde *z*, es el nivel de flotación del bote. Entonces,

$z=\frac{\frac{m}{\rho}+a\,h\,L}{0{,}10\cdot 0{,}12}$. Esto es, $z=0{,}021\,m$, lo cual confirma que el propulsor está completamente sumergido.

Entonces el área frontal es $A = 0{,}10\,z - a\,h$.

Otra forma más sencilla para determinar el área frontal sin conocer *z* es,

$$A = \frac{V_d}{L} = \frac{m}{\rho L}$$

Observación: el nivel de flotación *z* debe calcularse de todos modos para verificar que el propulsor se encuentra completamente sumergido.

Cuando el bote se mueve con velocidad constante, el módulo de la fuerza de arrastre es igual al módulo de la fuerza ejercida por el propulsor MHD, de donde la velocidad del bote es,

$$v = \sqrt{\frac{2\,F_P}{\rho C\left(0{,}10\,z - a\,h\right)}}$$

o

$$v = \sqrt{\frac{2\,F_P\,L}{C\,m}}$$

$$\boxed{v = 0{,}10\,m/s}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Solución numérica	Puntos
a	$F_P = B\,V\,\sigma\,L\,a$		1,4
b	$x = -\frac{A_1}{2\,A_2}$	$a = -\frac{0{,}42}{2(-14)} = 0{,}015\,m$ $B = 0{,}21\,T$	2,8
c	$I = \frac{V_0}{r_i + \frac{h}{\sigma\,L\,a}}$	$I = 2{,}6\,A$ $F_P = 0{,}011\,N$	1,4
d	$v = \sqrt{\frac{2\,F_P}{\rho C\left(0{,}10\,z - a\,h\right)}}$ o $v = \sqrt{\frac{2\,F_P\,L}{C\,m}}$	$v = 0{,}10\,m/s$	4,4

Conducción de calor (10 puntos)

Objetivo: determinar el coeficiente de conducción de calor de un vaso de paredes dobles y estimar la temperatura de equilibrio del agua.

Elementos

1. Un recipiente grande.
2. Un vaso de paredes dobles (un vaso plástico dentro de otro).
3. Un recipiente (jarra) para transportar agua.
4. Un cronómetro.
5. Dos termómetros.
6. Un soporte para los termómetros y los recipientes.
7. Agua (disponible en los depósitos).
8. Calentador eléctrico de agua. **PRECAUCIONES**: conéctelo o desconéctelo sólo cuando esté totalmente sumergido en el agua. No toque **ni el calentador ni el agua** mientras esté conectado. El termómetro y el calentador no deben tocarse entre sí.

Introducción

La ley de Fourier establece que el calor ΔQ que pasa a través de una pared en un intervalo de tiempo Δt es proporcional a la diferencia ΔT entre las temperaturas a ambos lados de la pared:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = B\,\Delta T \qquad (1),$$

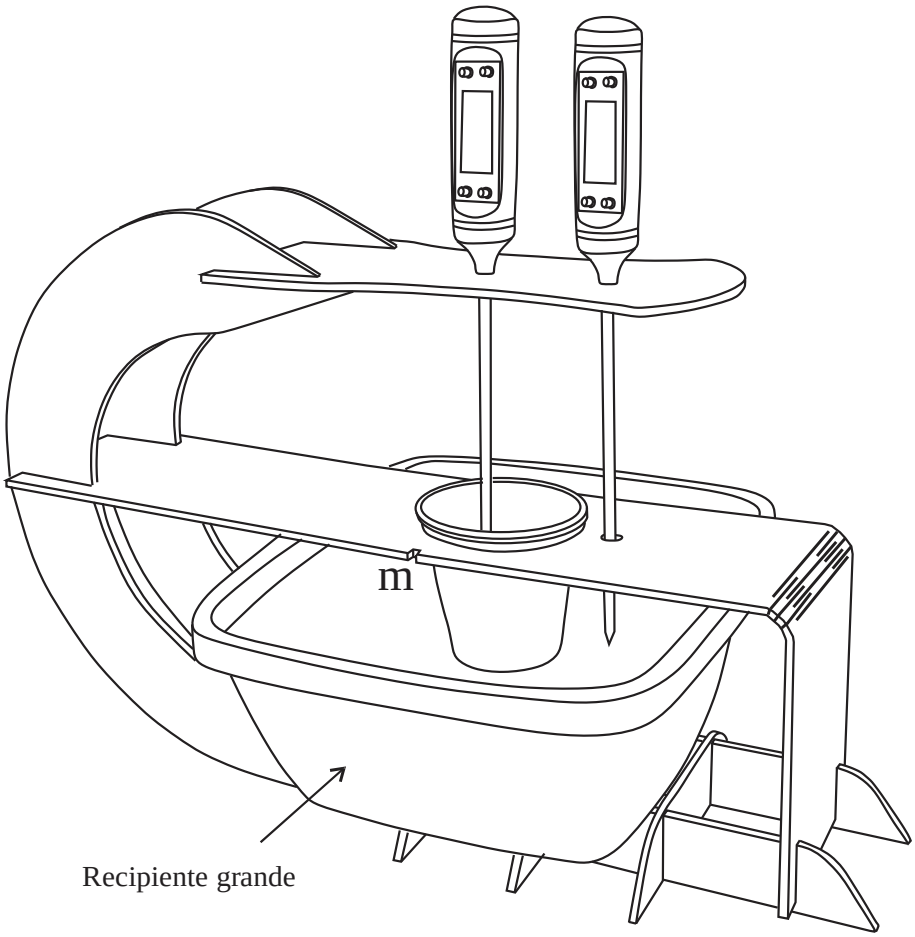
en donde el coeficiente de conducción de calor *B* de la pared depende del grosor, la forma, el material, etc., de la pared.

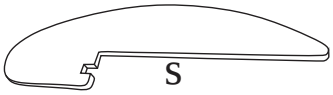
Procedimiento

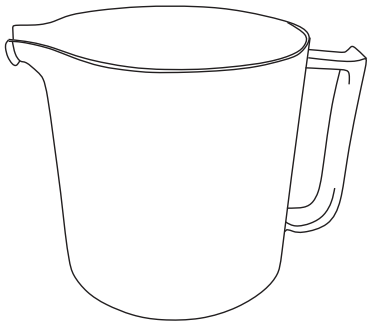
1. Arme el montaje de la figura. La pieza *s* encaja en la muesca *m* para sujetar el vaso (su uso es opcional).

2. El recipiente grande debe contener agua caliente y el vaso de paredes dobles debe contener agua fría. Los dos niveles de agua deben coincidir con la marca del vaso. Inicialmente la temperatura del agua caliente debe ser un poco mayor que 60 °C y la del vaso la menor posible. La marca en el vaso corresponde a 150 ± 2 ml de agua.

3. Mida simultáneamente la temperatura del agua fría T_f y la temperatura del agua caliente T_c en función del tiempo t. Efectúe estas medidas mientras la temperatura del agua caliente esté, aproximadamente, en el intervalo de 60 °C a 50 °C. *No agite los líquidos*







Jarra

Tareas

1. Coeficiente de transmisión de calor del vaso de paredes dobles

1.1 [3 ptos.] Registre en la tabla 1 los valores de t, T_c, T_f y los demás que considere pertinentes.

1.2 [2 ptos.] Construya las gráficas de T_c y T_f en función de t (gráfica 1).

1.3 [3 ptos.] Construya una segunda gráfica (gráfica 2) a partir de la cual pueda determinar el coeficiente B con su incertidumbre. Al modelo descrito por la ecuación (1) debe sumarse un término constante asociado con la transferencia de calor al ambiente. No tiene que calcular esta constante.

2. Temperatura de equilibrio

2.1 [1 pto.] En un solo sistema de ejes construya las gráficas de $\Delta T = T_c - T_f$ en función de T_c y en función de T_f (gráfica 3).

2.2 [1 pto.] A partir de la gráfica 3, estime la temperatura a la cual se alcanzaría el equilibrio térmico entre el agua de los dos recipientes. En este punto no se requiere cálculo de incertidumbre.

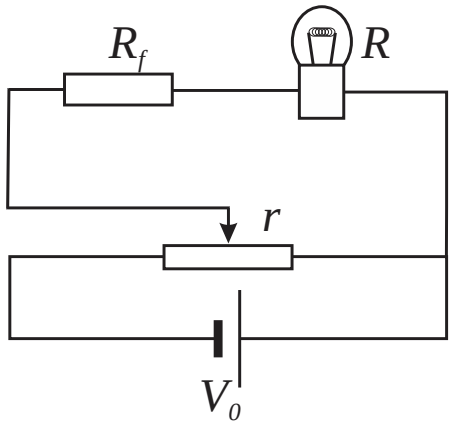
Masa molar	μ	0.018 Kg · mol^{-1}
Presión de vapor	P_v	3.17 × 10^3 Pa
Densidad	ρ	1000 kg · m^{-3}
Acidez	pK_a	13.99
Capacidad calorífica específica	c	4.18 × 10^3 J · kg^{-1} · K^{-1}
Conductividad térmica	λ	0.61 W · m^{-1} · K^{-1}
Índice de refracción	n	1.33
Viscosidad	η	8.9 × 10^{-4} kg · m^{-1} · s^{-1}

Radiación de calor

Objetivo: determinar la longitud y el diámetro del filamento de una lámpara incandescente (bombilla).

Elementos

1. Una fuente de corriente continua (*debe usarse siempre en la posición de* $V_0 = 6$ V).
2. Una placa de pruebas electrónicas (Protoboard*)* con un resistor ajustable, una bombilla y un resistor fijo de valor $R_f = 1\ \Omega$, conectados entre sí como se muestra en la figura.
3. Un multímetro (*debe usarse solamente como voltímetro; está prohibido utilizar el multímetro para medir resistencia y/o intensidad eléctrica*).
4. Un destornillador (*se usa para manipular el valor de la resistencia ajustable*).
5. Tres pares de cables de conexión.



Introducción

El filamento en cuestión es un delgado alambre de tungsteno en forma helicoidal, que alcanza la incandescencia con el paso de la corriente eléctrica, irradiando luz y calor. La resistencia óhmica R del filamento aumenta linealmente con la temperatura absoluta T, es decir:

$$\frac{\Delta R}{\Delta T} = \alpha R_0 \qquad (1),$$

en donde R_0 es la resistencia del filamento a temperatura ambiente y $\alpha = 5{,}1\times10^{-3}\ K^{-1}$ es el coeficiente térmico de resistividad del tungsteno. La resistividad del tungsteno a 20 °C es $\rho_0 = 5{,}5\times10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$.

Procedimiento y tareas

1. Características del filamento

El valor r de la resistencia ajustable se manipula girando el tornillo que sobresale en ésta. Debido a la naturaleza de la resistencia ajustable, su sensibilidad al giro del tornillo varía sustancialmente en el rango de medición; esto no significa que tenga averías.

1.1 Conecte a la fuente los cables que salen de la Protoboard para construir el circuito indicado en la figura.

1.2 [2,5 ptos.] Cambiando el valor de r, mida la tensión V en la bombilla: haciendo al menos diez mediciones entre 0,030 V y 0,100 V y al menos otras diez entre 0,100 V y 5,60 V. Simultáneamente mida otra(s) tensión(es) en el circuito, a partir de la(s) cual(es) pueda calcular la intensidad de la corriente eléctrica I en la bombilla, su resistencia óhmica R y la potencia disipada P en la bombilla. Escriba sus datos en la tabla 1.

1.3 [0,5 ptos.] Construya la curva característica de I en función de V de la bombilla (gráfica 1).

1.4 [0,5 pto.] Construya la curva de P en función de R (gráfica 2).

2. Resistencia de la bombilla a temperaturas cercanas a la ambiente

A temperaturas cercanas a la ambiente se puede despreciar la variación de la resistencia óhmica del filamento con la temperatura.

2.1 [1 pto.] A partir de la gráfica 1 determine la resistencia R_0 a temperaturas cercanas a la ambiente, con su incertidumbre.

3. Relación entre la potencia disipada y la resistencia a temperaturas altas

A temperaturas altas la energía del filamento se disipa principalmente por radiación. En este caso la potencia disipada es:

$$P = A\sigma T^4 \qquad (2),$$

donde A es el área del filamento y $\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ $Wm^{-2}K^{-4}$ es la constante de Stefan–Boltzman.

3.1 [1,5 ptos.] A partir de las ecuaciones (1) y (2) encuentre una expresión que relacione la potencia disipada P con la resistencia R del filamento.

3.2 [2 ptos.] Grafique una linealización de la expresión encontrada en 3.1 (gráfica 3).

4. Longitud y diámetro del filamento

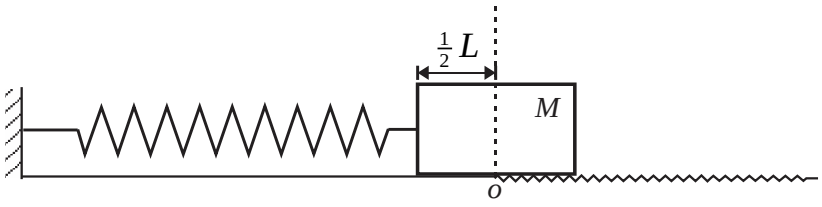
4.1 [1 pto.] Determine la longitud del filamento, con su incertidumbre.

4.2 [1 pto.] Determine el diámetro del filamento, con su incertidumbre.

Oscilaciones en una superficie con fricción (8 puntos)

Un bloque homogéneo de longitud L y masa M está sobre una superficie horizontal atado a un resorte de constante de elasticidad k, como muestra la figura. En la figura se representa la posición en la cual el resorte no está deformado. La superficie tiene la particularidad de que a la izquierda del punto *O* es lisa, y a partir del punto *O* hacia la derecha es rugosa, con coeficiente de fricción cinético y estático igual a μ. Se cumple que:

$$M = \frac{3kL}{4\mu g}$$

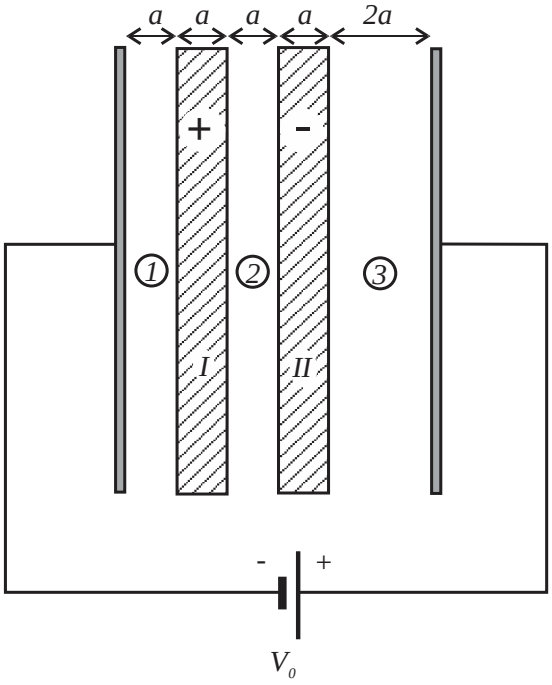


a. [4 puntos] Determine la mínima compresión a la que debe llevarse el resorte para que, al liberar el sistema, el bloque alcance a pasar completamente a la zona con fricción.

b. [4 puntos] Si la compresión inicial del resorte es L y el sistema se libera desde el reposo, determine dónde y cuándo se quedará detenido finalmente el bloque.

Dos láminas conductoras cargadas en un condensador (8 puntos)

Un condensador de placas planas y paralelas, separadas una distancia $6a$, tiene capacidad C. Se conecta el condensador a una diferencia de potencial V_0. A continuación, se introducen dos láminas conductoras I y II de ancho a entre las placas del condensador, una con carga $+CV_0$ a una distancia a de la placa de la izquierda y otra con carga $-CV_0$ a una distancia $2a$ de la placa de la derecha. Las láminas son paralelas entre sí y a es mucho menor que las dimensiones de las placas.



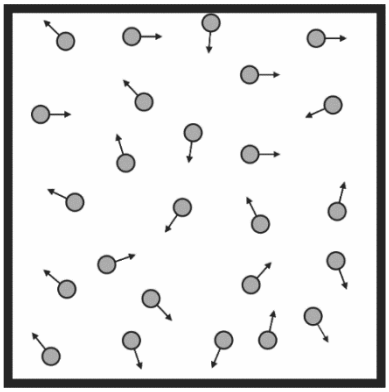
a. [2,5 puntos] Determine el campo eléctrico en cada una de las regiones 1, 2, 3 y dentro de las láminas conductoras en la configuración mostrada en la figura.

b. [2,5 puntos] Las láminas I y II se intercambian de posición. Determine el campo eléctrico en cada una de las regiones 1, 2, 3 y dentro de las láminas conductoras en esta nueva configuración.

c. [3 puntos] Calcule el trabajo que un agente externo al sistema de la figura hace para intercambiar de posición las dos láminas I y II.

Gas ideal bidimensional (8 puntos)

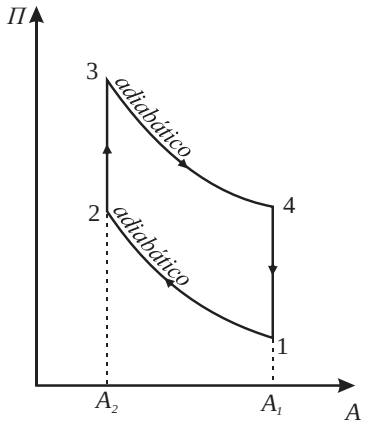
El movimiento de agitación térmica de un gas de N moléculas monoatómicas ocurre solamente en un plano limitado por paredes rígidas. La masa de cada molécula es m y el plano tiene forma de un cuadrado de área A. La distancia promedio entre las moléculas es tan grande, que se pueden menospreciar las fuerzas intermoleculares.



a. [3 puntos] Determine la fuerza por unidad de longitud Π que ejerce este gas sobre las paredes que limitan el plano por el que se mueven las moléculas. Asuma que las N moléculas se mueven con la misma rapidez v y que las colisiones de las moléculas con las paredes son elásticas. *Ayuda: a efectos del cálculo, suponga que en cualquier instante, en promedio, una cuarta parte de las moléculas se dirige perpendicularmente hacia cada pared.*

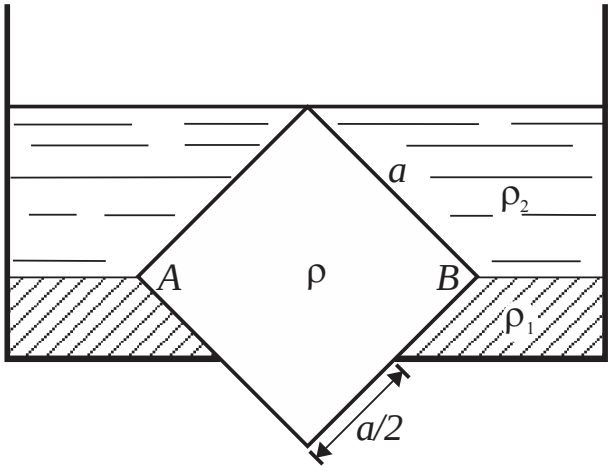
b. [2 puntos] Asuma que la energía cinética de una molécula de este gas es igual a la constante de Boltzmann k multiplicada por la temperatura absoluta T del gas, y obtenga la ecuación de estado del gas (es decir, una ecuación que relacione la fuerza por unidad de longitud Π sobre las paredes, el área A del plano al que están confinadas las moléculas, el número total de moléculas N y la temperatura T). Además, exprese la energía interna U del gas en términos de su temperatura T.

c. [3 puntos] Este gas se toma como sustancia de trabajo de una máquina térmica que opera en un ciclo de Otto. El diagrama $\Pi - A$ de este ciclo se esquematiza en la figura. Determine el rendimiento de esta máquina térmica si la razón de compresión $r = A_1/A_2$ es igual a 9. En los procesos adiabáticos de este gas se cumple que ΠA^2 es constante.



Tapón en el fondo de un recipiente (6 puntos)

El orificio en el fondo de un recipiente está sellado por un tapón cúbico de lado a y densidad ρ. En el recipiente hay dos líquidos no miscibles entre sí, de densidades ρ_1 y ρ_2 respectivamente ($\rho_1 > \rho_2$), como muestra la figura. La interfase entre los dos líquidos coincide con la línea *AB*. Si el nivel del líquido superior está a la misma altura del vértice superior del tapón, ¿cuál debe ser la densidad ρ_2 mínima del líquido superior para que el tapón permanezca en equilibrio?



XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

E-1

Código

EXAMEN EXPERIMENTAL:

ANÁLISIS DE UN SISTEMA OSCILATORIO TUBO-RESORTE

EN ESTE TEXTO SE UTILIZA EL PUNTO COMO SEPARADOR DECIMAL.

EXPRESE SUS RESULTADOS EN UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

LAS HOJAS CON LA LETRA "E" SON LAS QUE PLANTEAN LAS TAREAS EXPERIMENTALES.

LAS HOJAS CON LA LETRA "W" SON EN LAS QUE ESCRIBIRÁ SUS TABLAS DE MEDICIONES, SUS CÁLCULOS Y SUS GRÁFICOS.

- **EN LA HOJA W-2 SE MUESTRA UN ESQUEMA CON TODOS LOS INSTRUMENTOS QUE SE USARÁN EN EL EXPERIMENTO.**
- **EN LA HOJA W-2a SE MUESTRAN FOTOS DE TODOS LOS INSTRUMENTOS QUE SE USARÁN EN EL EXPERIMENTO.**
- **EN LA HOJA W-3 ANOTARÁ LAS MEDICIONES GENERALES QUE SE INDICAN AHÍ.**
- **EN LA HOJA W-4 ANOTARÁ TODOS LOS <u>RESULTADOS</u> FUNDAMENTALES DE SUS CÁLCULOS, SEGÚN SE VAYA INDICANDO.**

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

E-2

(en castellano)

INTRODUCCIÓN:

Las oscilaciones de los sólidos (péndulos, resortes, acoplamiento péndulo-resorte) permiten analizar diversas propiedades de los mismos: masa, momentos de inercia, frecuencias propias, modos resonantes y otras.

Las oscilaciones de los resortes se estudian casi siempre modelando resortes sin masa y sin momento de inercia, pero en este experimento, el resorte no es de masa despreciable por lo que aporta inercia a su oscilación, y aporta también momento de inercia al sistema oscilante tubo-resorte que se analizará. Además, se trabajará un resorte cónico compacto que obedece la Ley de Hooke, solo si se le cuelga cierta masa.

En este experimento se medirá, por una parte, la masa equivalente de un resorte que oscila verticalmente. Por otra parte, se medirán los momentos de inercia de un tubo que oscila como péndulo respecto a un eje. Finalmente se medirán el momento de inercia y la constante de amortiguamiento de las oscilaciones del tubo acoplado al resorte.

SI LA HOJA DE CADA TAREA NO LE ES SUFICIENTE PARA REALIZAR TODOS LOS CÁLCULOS INTERMEDIOS, PUEDE USAR TAMBIEN LAS HOJAS MARCADAS COMO “W- ”, AGREGANDO A LA “W- ” LA NUMERACIÓN DE LA TAREA QUE LE CORRESPONDA (SE INDICARÁ EN CADA TAREA).

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

E-3

TAREA 1- (2.0 puntos)

El primer objetivo es determinar la constante elástica *k* de un resorte cónico descompactado por el peso de una masa acoplada de 200 g, (m_{ac} = 200 g), que usted considerará como parte intrínseca del resorte. (El papel de la masa acoplada es estirar el resorte hasta la zona en que satisface la ley de Hooke).

Realice el montaje de la Fig. 2. Note que la parte superior del resorte debe ser la de menor radio. Determine *k* por un método estático (sin oscilaciones) utilizando las pesas disponibles de masa m_p.

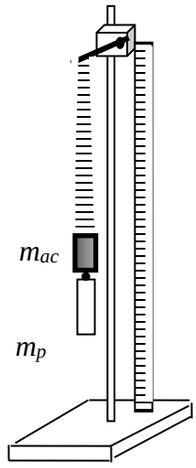


Fig. 2

Utilice el valor local de la aceleración gravitatoria g = 9.78 m/s^2.

Utilice la hoja W-5a. Si añade hojas extras, márquelas como W-5b, W5c, etc.

Indique el valor de *k* en la hoja W-4.

No determine la incertidumbre de *k* en esta Tarea.

TAREA 2- (5.5 puntos)

El sistema formado por el resorte cónico y la masa acoplada oscila de manera equivalente a una partícula colgada de un resorte ideal (sin masa) de constante elástica *k.* La masa de la partícula se denomina *masa equivalente* m_{eq} del sistema.

El objetivo de esta tarea es determinar dicha *masa equivalente*. Para ello emplee el método de oscilaciones verticales.

A partir de las mediciones que realice determine el valor de la *masa equivalente* m_{eq} del resorte descompactado y nuevamente el valor de *k*. Tenga en cuenta que el periodo *T* para el sistema masa-resorte es: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, donde $m = m_{eq} + m_p$.

Utilice la hoja W-6a. **Si añade hojas extras, márquelas como W-6b, W-6c, etc**.

Indique los valores de *k* y m_{eq} con sus incertidumbres en la hoja W-4.

TAREA 3- (3.0 puntos)

El objetivo de esta tarea es medir el momento de inercia principal I_{yy} respecto al eje *y* que pasa por el centro de masa del tubo (Fig. 3) empleando **métodos oscilatorios**. El tubo puede realizar oscilaciones como péndulo respecto a diferentes ejes. La relación entre el período *T* del péndulo y su momento de inercia *I* respecto al eje de suspensión es:

$$2\pi/T = \sqrt{mgh/I}\ ,$$

donde *h* es la distancia del punto de suspensión al centro de masa.

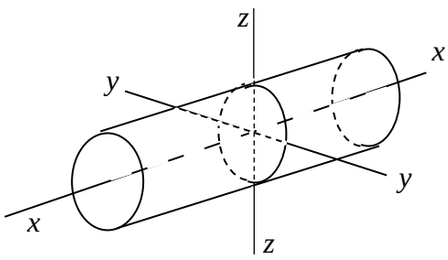


Fig. 3

La Fig. 3 muestra tres ejes principales. Se quiere medir solamente el momento de inercia I_{yy} respecto al eje *yy*.

Usted dispone de varillas y soportes para poder hacer las mediciones que le permitirán calcular el momento de inercia, aprovechando las oscilaciones del tubo como péndulo colgado del eje *y'y'*, **paralelo** al eje principal *yy* (Fig. 4).

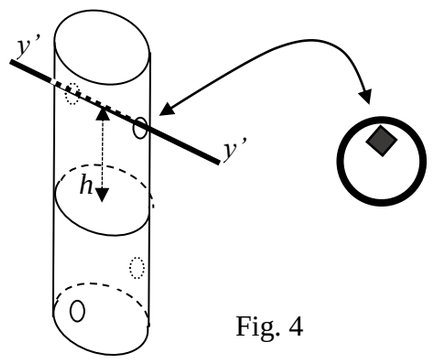


Fig. 4

Después de medir $I_{yy'}$ calcule el momento principal I_{yy}. La Fig. 4 muestra como colocar el eje *y'y'*.

Utilice la hoja W-7a para realizar sus cálculos. Puede agregar hojas, numerándolas como ya se ha indicado.

En la hoja W-3 indique el radio externo promedio, R_e, el radio interno promedio, R_i y la longitud *L* del tubo con el estimado de sus incertidumbres.

El tubo tiene dos agujeros *y'y'* cerca un extremo por donde puede insertarse la varilla horizontal de sección cuadrada como eje de suspensión del péndulo. Sea cuidadoso con el montaje del eje-varilla: su horizontalidad, firmeza de los puntos de suspensión, superficies de contacto mínimas con los ejes, etc. La masa del tubo m_t aparece en una tarjeta ligada al tubo, que usted desprenderá después de anotar su valor con su incertidumbre en la hoja W-3.

Compare su resultado experimental de I_{yy} con el que se obtiene de la teoría:

$$I_{yy\ teor} = (m_t/4)[R_i^2 + R_e^2 + L^2/3].$$

Indique el valor experimental de $I_{yy'}$ con su incertidumbre, el valor I_{yy} sin su incertidumbre, $I_{yy\ teor}$ sin incertidumbre y el error porcentual entre I_{yy} e $I_{yy\ teor}$ en la hoja W-4.

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental **E-5**

(en castellano)

TAREA 4- (5.0 puntos)

Monte el tubo acoplado al resorte vertical descompactado (resorte + masa acoplada) como muestra la Fig. 5, de modo que el tubo quede horizontal. Para el acople del resorte con el tubo mire la Fig.2 de la página W-2.

El momento de inercia de rotación del sistema montado en la Fig. 5 está afectado ahora tanto por la masa del tubo como por la del resorte, la cual se puede modelar como una partícula acoplada al tubo; el aporte del resorte al momento de inercia del sistema lo llamaremos *momento de inercia equivalente del resorte, I_{eq}.*

El objetivo de esta tarea es calcular este momento de inercia equivalente, I_{eq}, cuando oscila acoplado al tubo, respecto al eje *y'y'* horizontal que pasa cerca de un extremo. A partir del valor que usted determine experimentalmente para el momento de inercia del sistema tubo-resorte, $I_{t\text{-}r}$, debe calcular *el momento de inercia equivalente* I_{eq} del resorte.

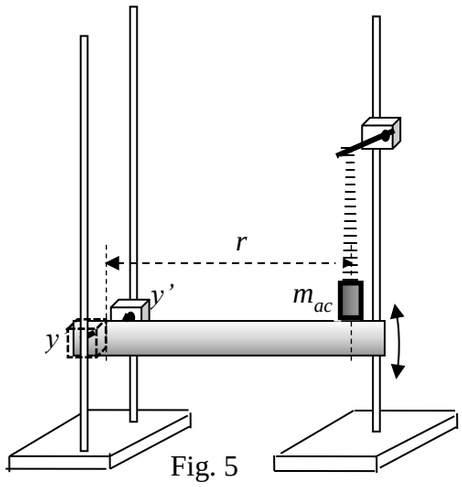


Fig. 5

Mida el período de oscilaciones varias veces y calcule el momento de inercia del sistema, $I_{t\text{-}r,}$ respecto al eje *y'y'*.

Para calcular este valor $I_{t\text{-}r}$ tenga en cuenta que el período de oscilaciones obedece la relación:

$$2\pi/T = \sqrt{kr^2/I_{t-r}}\ ,$$

donde *r* es aproximadamente la distancia entre el eje de oscilación y el punto de acoplamiento del resorte.

A partir de esta $I_{t\text{-}r}$ calcule la I_{eq} del resorte, teniendo en cuenta el carácter aditivo del momento de inercia: $I_{t\text{-}r} = I_{y\acute{y}'} + I_{eq}$.

Por otra parte, calcule el valor $I' = m_{eq}\, r^2$. Esta *I'* será el valor teórico del momento de inercia del resorte asumiendo que se comporta como una partícula colocada en el punto de acoplamiento del resorte.

Dentro del margen de los errores experimentales que usted deberá calcular: ¿se puede concluir que $I' = I_{eq}$ para su resorte descompactado, o son parámetros independientes en los modelos teóricos de las oscilaciones cuerpo-resorte y de las oscilaciones de una barra pendular horizontal? Escriba sus respuestas en la hoja W-9a.

Utilice la hoja W-9a para sus mediciones y cálculos (y las que añada, bien numeradas).

Indique el valor de I_{eq} y el de *I'*, con sus incertidumbres (así como su conclusión sobre si pueden considerarse iguales o no) en la hoja W-4.

ATENCIÓN: El radio de los agujeros por donde pasa el eje *y'y'* es tan pequeño comparado con el largo del tubo que, en primera aproximación, puede considerar que el momento de inercia $I_{y'y'}$ es prácticamente el mismo cuando el eje *y'y'* sostenga al tubo por uno u otro punto del borde de los agujeros, como en las Figuras 4 y 5. La diferencia entre uno y otro valor es del orden del 1%.

TAREA 5- (3.5 puntos)

El quinto y último objetivo es calcular el factor de amortiguamiento exponencial de las oscilaciones del sistema tubo-resorte, con un montaje como el de la Fig. 6. (Coloque el "indicador" I en el extremo del tubo usando un pedazo de cinta adhesiva).

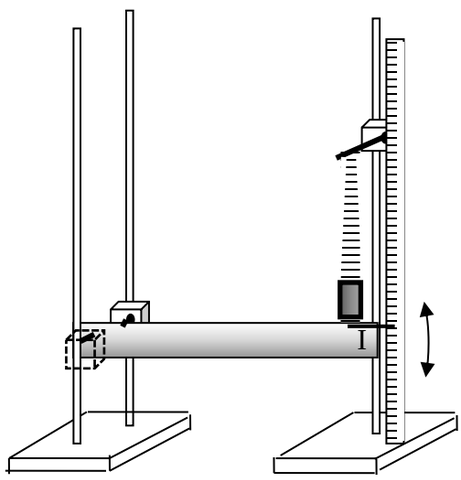


Fig. 6

Con este montaje, haga mediciones de la amplitud de oscilaciones del extremo libre de la barra desde 8.0 cm de amplitud hasta 4.0 cm de amplitud, anotando qué tiempo demora en reducir su amplitud, de 8 cm a 7 cm, de 8 a 6, de 8 a 5, de 8 a 4. Repita varias veces las mediciones de tiempo con los mismos intervalos.

Haga una tabla de amplitudes A y tiempos t, y determine gráficamente el valor de λ , asumiendo que la amplitud decrece aproximadamente por una ley del tipo $A = A_o e^{-\lambda t}$.

No se pide la incertidumbre de λ.

Incluya la tabla de valores y su grafico experimental en la hoja W-10a.

Indique el valor de λ en la hoja W-4.

Lista de valores en la hoja W-3 (1.0 punto)

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-1

AVISO

HAGA PRIMERO TODAS SUS MEDICIONES, GRÁFICOS Y CÁLCULOS DE LAS CANTIDADES QUE SE PIDEN, Y SOLAMENTE AL FINAL PASE A LOS CÁLCULOS DE ERRORES (O INCERTIDUMBRES) QUE SE SOLICITAN.

EL MANEJO DE ERRORES ES IMPORTANTE Y CONSTITUYE UNA PARTE DE LA EVALUACIÓN, PERO PRIORIZAREMOS LA HABILIDAD EXPERIMENTAL PARA OBTENER DATOS CORRECTOS, LA CONSTRUCCIÓN CORRECTA DE GRÁFICOS Y EL MANEJO MATEMÁTICO DE ESOS DATOS PARA CALCULAR CANTIDADES FÍSICAS.

AL FINAL HAY HOJAS EXTRAS PARA CÁLCULOS, DE SER NECESARIO. SI EN UNA TAREA, DIGAMOS LA TAREA 4, USA HOJAS DE CÁLCULOS EXTRAS, NUMÉRELAS EN LA ESQUINA SUPERIOR DERECHA: W-4b, W-4c, ETC. , Y COLÓQUELAS A CONTINUACIÓN DE LA W-4a.

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-2

MATERIALES:

Cilindro

Varilla corta

Varilla larga

Nuez

Nuez

Nuez

Dos soportes cortos para fijar ejes

Cronómetro

Nivel de burbujar

Masa de 200 g

Sostén **S** de regla y resorte

Clip de presión para fijar la regla al sostén **S**

Soporte largo para colgar el resorte

Vernier

Resorte cónico que cuelga del sostén **S**

Portapesas y pesas

Pedazo de tape

Alambre Indicador

Regla

Fig. 1

Enganche Metálico

Cómo usar el Enganche Metálico para acoplar el tubo y el resorte

Resorte

Carga acoplada

Tubo

Fig. 2

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-2a



Cilindro



Resorte cónico



Dos soportes cortos para fijar ejes



Soporte largo para colgar el resorte



Varilla larga



Varilla corta



Nueces



Masa de 200 g



Sostén **S** de regla y resorte



Nivel de burbujas



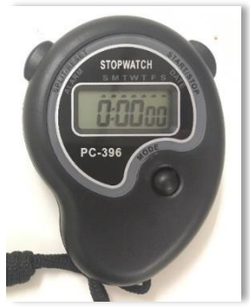
Cinta adhesiva



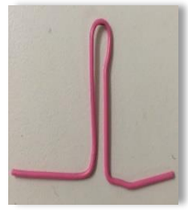
Portamasas y masas



Vernier



Cronómetro



Enganche Metálico



Clip de presión para fijar la regla al sostén **S**



Alambre Indicador

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-3

RESULTADOS A REPORTAR

(HOJA DE COTEJO FINAL)

TAREA 1-

k = ____9.2 N/m _____

TAREA 2-

k = ___9.2 N/m _____

δk = _____± 0.3 N/m _____

m_{eq} = ____0.23 kg _____

δm_{eq} = ___± 0.02 kg _____

TAREA 3

$I_{x'x'}$ = ____0.001166 kg m^2_____

I_{xx} = _____0.00058 kg m^2_____

$I_{xx,teor}$ = ___0.0057 kg m^2_____

$Dif(\%)_{exp\text{-}teor}$ entre I_{xx} e $I_{xx\ teor}$ = _____1.7%_____

$I_{y'y'}$ = _____0.0197 kg m^2_____

$\delta_{y'y'}$ = _____0.0003 kg m^2 _____

I_{yy} = _____0.0072 kg m^2_____

$I_{yy,teor}$ = ____0.0066 kg m^2 _____

$Dif(\%)_{exp\text{-}teor}$ entre I_{yy} e $I_{yy\ teor}$ = _____9%_____

TAREA 4-

$I_{t\text{-}r}$ = _____0.0534 kg m^2_____

I_{eq} = _____0.034 kgm^2_____

δI_{eq} = _____0.004 kg m^2_____

I' = _____0.0373 kgm^2_____

$\delta I'$= _____0.0005 kg m^2_____

De acuerdo con sus resultados, ¿puede considerar $I_{eq} = I'$?

SON IGUALES: SUS INCERTI-DUMBRES SE SOLAPAN

TAREA 5-

λ = _____0.020 s^{-1}_____

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-4

HOJA DE DATOS; <u>INCLUYA LA INCERTIDUMBRE DE CADA UNO</u>.

Masa m_r del resorte: 0.101 ± 0.001 kg

Masa m_t del tubo: 0.304 ± 0.001 kg

Longitud L del tubo: 0.500 ± 0.001 m

Diámetro externo D_e del tubo: (0.088 y 0.090): 0.089 ± 0.001 m

Diámetro interno D_i del tubo: (0.086 y 0.087): 0.086 ± 0.001 m

Radio externo R_e del tubo: 0.0445 ± 0.0005 m

Radio interno R_i del tubo: 0.0435 ± 0.0005 m

Diámetro d de los orificios laterales: 0.007 ± 0.001 m

Distancia s del borde del tubo al borde más cercano de un orifico lateral: 0.048 ± 0.001 m

Distancia l del borde del tubo al centro del orificio lateral más próximo: 0.050 ± 0.001 m

Distancia r del eje $y'y'$ al eje $z'z'$ (Fig. 4): 0.407 ± 0.001 m

Distancia h del eje $y'y'$ al centro del tubo: 0.200 ± 0.001 m

(Si alguna de estas distancias requiere de varias mediciones, estime su error aleatorio)

EN LAS TABLAS DE MEDICIONES QUE SE INCLUYEN EN CADA TAREA NO TIENE QUE LLENAR TODAS LAS FILAS Y COLUMNAS QUE APARECEN: USE SOLAMENTE LAS QUE ESTIME NECESARIAS.

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

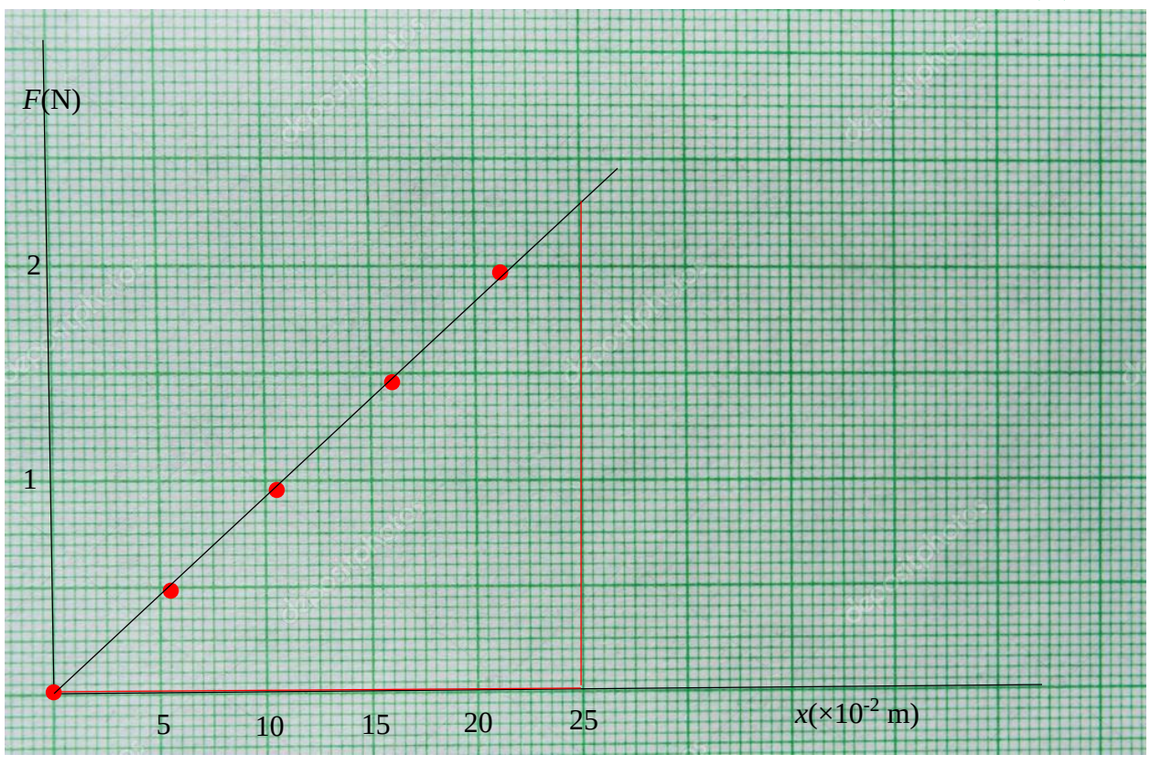
W-5a

TAREA 1-

Medida de *k* (método estático):

m(g)	*x*(cm)	*Δx*(cm)	*mg*(N)			
0	41.6	0	0			
50	46.7	5.1	0.484			
100	52.1	10.5	0.979			
150	57.5	15.9	1.457			
200	62.9	21.2	1.957			

GRÁFICO: (1)



$k = \Delta F/\Delta x = 2.3 / (25\times10^{-2}) =$ 9.2 N/m

……..*k* : (0.5)

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

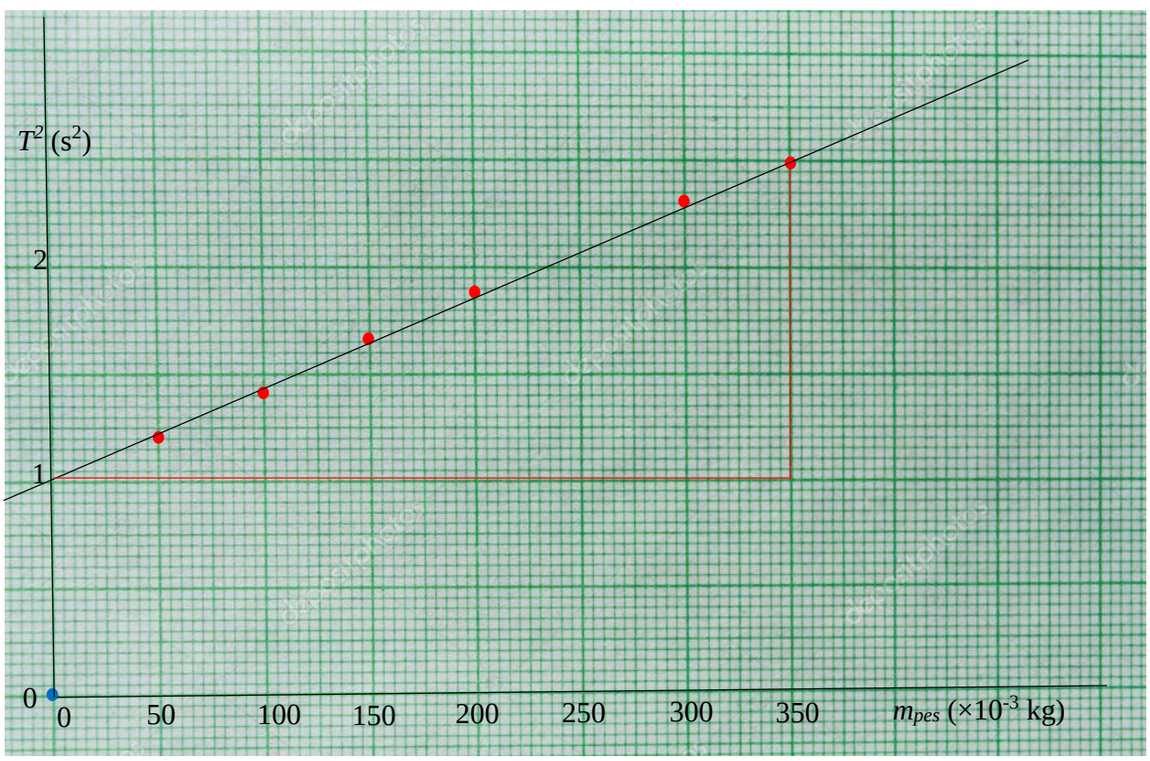
(en castellano)

W-6a

TAREA 2-

Medida de m_{eq} y k (método dinámico): (Tiempo t de 10 oscilaciones)

m(g)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_{avg}(s)	T(s)	T^2(s^2)
50	10.97	11.00	10.94	10.97	1.097	1.203
100	11.97	12.03	11.97	11.99	1.999	1.438
150	12.93	12.94	12.96	12.94	1.294	1.674
200	13.72	13.69	13.62	13.68	1.368	1.871
300	15.28	15.21	15.28	15.26	1.526	2.327
350	15.81	15.81	15.84	15.82	1.582	2.503



$2\pi/T = [k/m]^{1/2} = [k/(m_{pes} + m_{eq})]^{1/2}$

$T^2 = (4\pi^2/k)\, m_{pes} + (4\pi^2/k)\, m_{eq}$

Pendiente = (2.5 – 1.0) / (0.350 – 0) = 4.286 = $4\pi^2/k$; k = 9.21 N/m

Intercepto = 1.00 = $(4\pi^2/k)\, m_{eq}$; m_{eq} = 0.233 kg

Por propagación de errores (de las escalas gráficas):

$\delta k = k\,[\delta m_{pes}/\Delta m_{pes} + \delta T^2/\Delta T^2)] = 9.2(2/350 + 0.05/2.5) \approx$ 0.3 N/m

$\delta m_{eq} = m_{eq}\,[\delta k/k + \delta T^2/\, interc)] = 0.233(0.3/9.2 + + 0.05/1.0) \approx$ 0.02 kg

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-7a

TAREA 3-

Medida de I_{yy}: (Medidas de t en 10 oscilaciones)

t(s)	T(s)					
11.31	1.131					
11.35	1.135					
11.34	1.134					
1132	1.132					
11.36	1.136					
			T_{avg}(s)	δT_{avg} (s)		
			1.134	±0.003		

$I_{y'y'} = mghT^2/(4\pi^2) = 0.304\times9.786\times0.203\times1.134^2 / (4\pi^2) =$ 0.0197 kg m^2 (h = 0.200 + 0.003 m)

$I_{yy} = I_{y'y'} - mh^2 = 0.0197 - 0.304\times0.203^2 =$ 0.0072 kg m^2 ≈ 0.007 kg m^2

$I_{yy\ teor} = 1/4\ m(R_e^2 + R_i^2 + L^2/2) = 0.25\times0.304(0.044^2 + 0.043^2 + 0.500^2/3)$

$I_{yy\ teor} =$ 0.0066 kg m^2 ≈ 0.007 kg m^2

$\delta I_{y'y'} = I_{y'y'}(\delta m/m + \delta g/g + \delta h/h + 2\delta T/T) =$

$= 0.0194(0.001/0.304 + 0 + 0.001/0.203 + 2\times0.003/1.134) =$ 0.0003 kg m^2

Dif(%) = (6/66)×100 = 9%

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-9a

TAREA 4-

Medida de I_{eq}: (Medidas de t en 10 oscilaciones)

t(s)	T(s)				δT_{avg} (s)		
12.10	1.210						
11.88	1.188						
12.00	1.200						
11.91	1.191						
11.97	1.197						
				T_{avg}(s)	δT_{avg} (s)		
				1.197	±0.013		

$I_{t\text{-}r} = kr^2T^2/(4\pi^2) = 9.2\times0.400^2\times0.200\times1.197^2 / (4\pi^2) =$ 0.0534 kg m^2

Pero: $I_{t\text{-}r} = I_{y'y'} + I_{eq}$

$I_{eq} = I_{t\text{-}r} - I_{y'y'} = 0.0534 - 0.0197 = 0.0337$ kgm^2 = 0.034 kg m^2 $(I_{y'y'} = 0.0197 - 0.0004)$

$\delta I_{t\text{-}r} = I_{t\text{-}r}(\delta k/k + 2\delta r/r + 2\delta T/T) =$

$\delta I_{t\text{-}r} = 0.0534(0.3/9.2 + 2\times0.003/0.400 + 2\times0.013/1.197) \approx 0.004$ kg m^2

$\delta I_{eq} = \delta I_{t\text{-}r} + \delta I_{y'y'} = 0.004 + 0.0003 \approx$ 0.004 kg m^2

$I'_{eq} = m_{eq}r^2 = 0.233\times0.400^2 = 0.0373$ kg m^2 = 0.0373 kg m^2

$\delta I'_{eq} = I'_{eq}(\delta m_{eq}/m_{eq} + 2\delta r/r) = 0.037(0.002/0.233 + 2\times0.001/0.400) =$ 0.0005 kg m^2

$I'_{eq} = 0.0373 \pm 0.0005$ kg m^2

$0.030 < I_{eq} < 0.038$ y $0.0368 < I'_{eq} < 0.0378$

Los dos valores coinciden dentro de sus márgenes de incertidumbres.

XXIII Olimpiada IBEROAMERICANA de FÍSICA

Puerto Rico 2018

Prueba Experimental

(en castellano)

W-10a

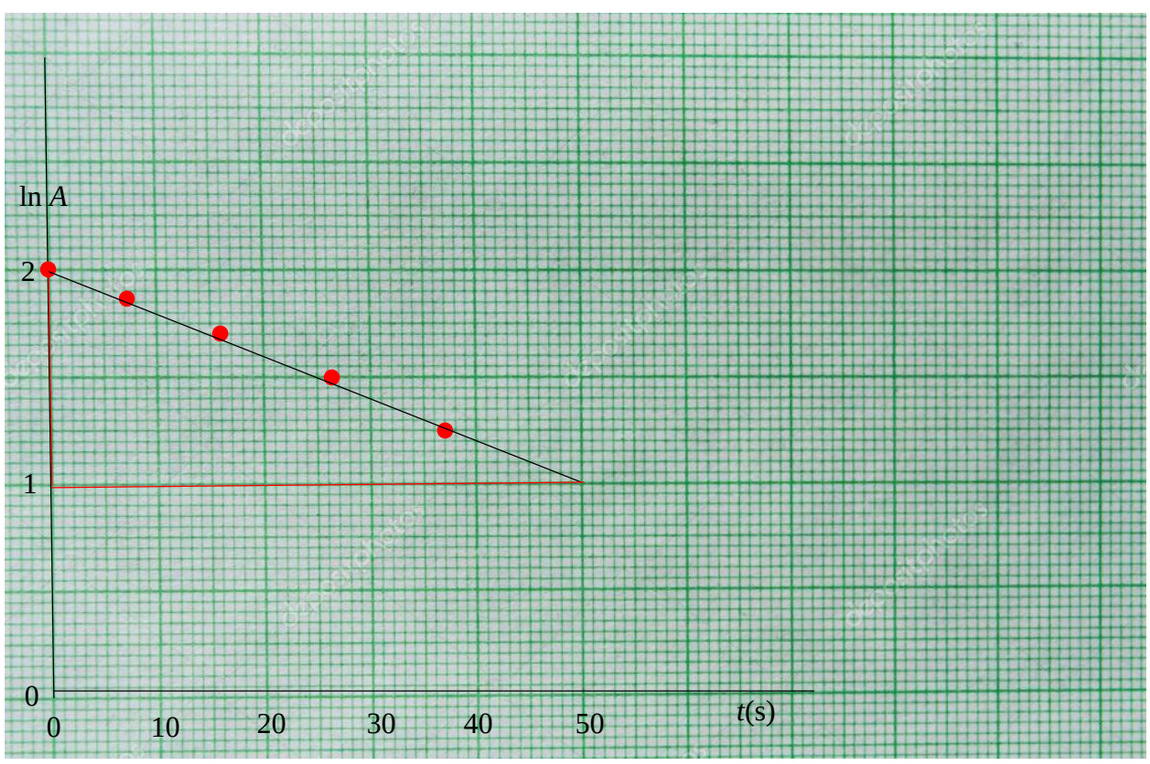
TAREA 5-

Medida de λ.

Posición de equilibrio en la regla: x_o = 30.5 cm

x(cm)	t_1(s)	$t2_1$(s)	t_3(s)	t_{avg}(s)	A(cm)	ln A
38	0	0	0	0	7.5	2.01
37	8.28	6.19	7.35	7.2	6.5	1.87
36	17.47	14.35	15.78	15.8	5.5	1.70
35	26.51	26.66	25.36	26.2	4.5	1.50
34	37.50	36.75	36.41	36.9	3.5	1.25

λ = 0.020 s^{-1}



λ =(2 -1) / (50 – 0) = 1/50 = 0.020 s^{-1} $A = 7.5(\text{cm})\, e^{-.020t}$

XXIII Olimpiada Iberoamericana de Física

Mayagüez, PR, 2018

CÓDIGO

T1-1

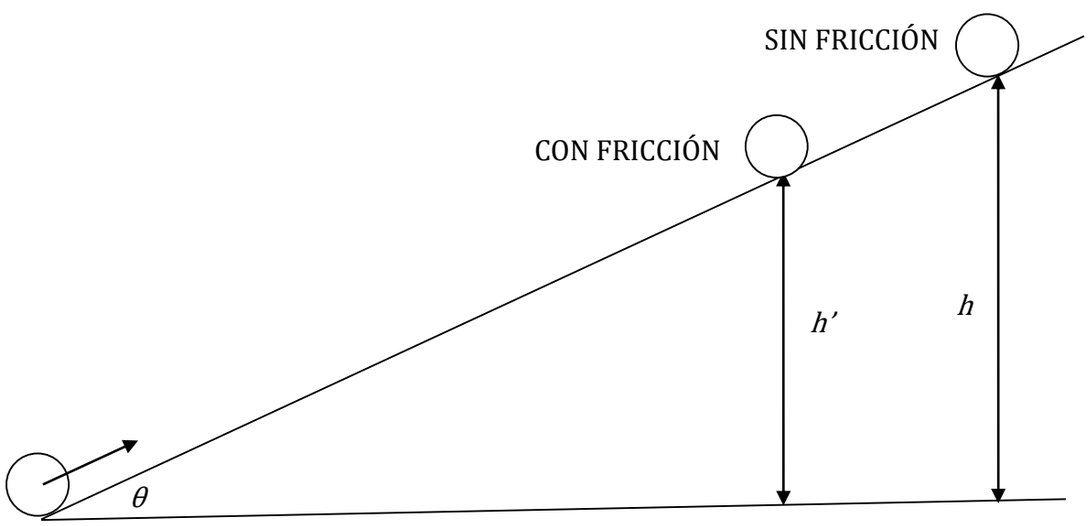
Problema

1-BOLA DE BILLAR EN PLANO INCLINADO. (8.0 puntos)

Una bola de billar (esfera homogénea) es golpeada de modo que la bola adquiere instantáneamente un movimiento de traslación pura en la dirección ascendente del plano inclinado, por el que sube cierta altura máxima hasta detenerse. Si el plano es sin fricción, la bola asciende cierta altura h y si tiene fricción, asciende hasta otra altura h'.

Calcule la razón h'/h para el caso en que el ángulo θ de inclinación del plano satisface la relación $\tan\theta = \mu/2$, donde μ es el coeficiente de fricción (cinético y estático) entre la bola y el plano.

El momento de inercia de una esfera homogénea con respecto a un eje que pasa por el centro de masa es $I = \frac{2}{5}MR^2$.



Debe presentar:

1-Diagramas de cuerpo libre para cada una de las situaciones que analice. **0.8 punto**

2-Todas las ecuaciones con las cuales realiza algún cálculo. **6.7 puntos**

3-Resultado numérico de la fracción h'/h. **0.5 punto**

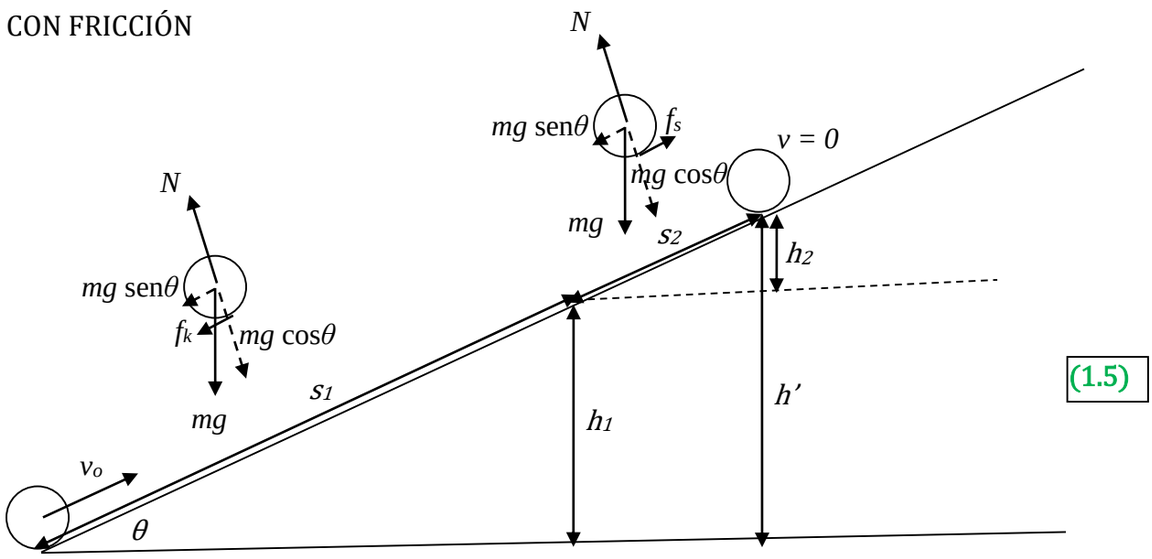
1-SOLUCIÓN: {(8.0)}

(a) En el ascenso sin fricción, por conservación de la energía mecánica:

(0.5)

$\frac{1}{2} mv_o^2 = mgh$ por lo que $h = v_o^2/(2g)$ (1)

CON FRICCIÓN



(1.5)

(b)Cuando hay fricción, si $\tan\theta = \mu/2$, entonces la inclinación permite que se desarrolle fricción estática y pueda alcanzarse la rodadura pura (habría sólo deslizamiento si $\tan\theta \geq \mu$). El ascenso será primero de rodadura con deslizamiento y continuará a partir de un punto con rodadura pura. Llamemos s_1 al segmento en que hay deslizamiento (y h_1 la altura subida hasta ahí), y s_2 el segmento en rodadura pura (y h_2 su correspondiente altura) (Ver figura con fricción)

Mientras desliza hacia arriba se oponen al ascenso las fuerzas $mg\,\text{sen}\theta$ y $\mu mg\cos\theta$, por lo que la aceleración de frenado será

$a = -g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)$,

considerando positiva la dirección de avance. El torque de la fricción alrededor del eje central producirá una rotación acelerada positivamente:

$R\,\mu mg\cos\theta = (2/5)mR^2\propto$ De donde: $\propto = (5/2)(\mu g/R)\cos\theta$

La velocidad angular ω aumentará y la velocidad de traslación disminuirá hasta que se cumpla la condición de rodadura pura: $\omega = v/R$. Habrá transcurrido un tiempo t dado por:

$\omega = \omega_o + \propto t$ con $\omega_o = 0$.

Por tanto: $v/R = (5/2)(\mu g/R)\,t\cos\theta$

De aquí: $t = (2/5)\,v/(\mu g\cos\theta)$

La velocidad alcanzada hasta ese punto será:

$v = v_o + at = v_o - g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)\times(2/5)\,v/(\mu g\cos\theta)$

De aquí: $v = v_o / [1 + (2/5)(1 + (\tan\theta) / \mu)] = (5/8)v_o$

donde se tuvo en cuenta $\tan\theta = \mu/2$

La velocidad angular en ese instante es: $\omega = (5/8)v_o / R$

Hasta ahí la bola recorrió una distancia s_1 tal que:

$v^2 = v_o^2 + 2a\, s_1$

$[(5/8)v_o]^2 = v_o^2 - 2g(\text{sen}\theta + \mu \cos\theta)\, s_1$

Despejamos: $s_1 = (39/128)(v_o^2/g) / (\text{sen}\theta + \mu \cos\theta)$

La altura ascendida es: $h_1 = s_1 \,\text{sen}\theta = (39/128)(v_o^2/g) / (1 + \mu/\tan\theta)$

Y como $\tan\theta = \mu/2$: $\boxed{h_1 = (39/384)(v_o^2/g)}$ (2) **(3.0)**

(c)Comienza el ascenso en rodadura pura, donde se conserva la energía mecánica:

$½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = mgh_2$

Sustituyendo valores:

$½\, m[(5/8)v_o]^2 + ½\,(2/5)\, mR^2(5/8 \cdot v_o/R)^2 = mgh_2$

De aquí: $\boxed{h_2 = (35/128)(v_o^2/g)}$ (3) **(2.5)**

(d)Entonces: $\boxed{h' = h_1 + h_2 = (3/8)\,(v_o^2/g)}$ (4)

De (1) y (4):

(e) $h'/h = (3/8) / (1/2) = ¾ = 0.75 =$ $\boxed{75\%}$ **(0.5)**

2-CALENTAMIENTO ELÉCTRICO DE OLLA CON AGUA (8.0 puntos)

Una olla cerrada contiene 500 g de agua. En el interior, sumergida en el agua, hay una resistencia de calentamiento R_c = 12.0 Ω, en serie con una fuente externa de 120 V y con una resistencia externa variable R_v (Fig, 1). En el interior de la olla hay también un termómetro para registrar la temperatura del agua. Inicialmente el sistema se encuentra a una temperatura de 90ºC. Estando el interruptor abierto se registra la curva de enfriamiento que se muestra en la Fig. 2.

La capacidad calorífica de la olla, la resistencia de calentamiento R_c y el termómetro juntos es de 200 J/ºC (sin incluir el agua).

El calor especifico del agua es de 4.18 kJ/kg.ºC y se supone constante en todo el experimento.

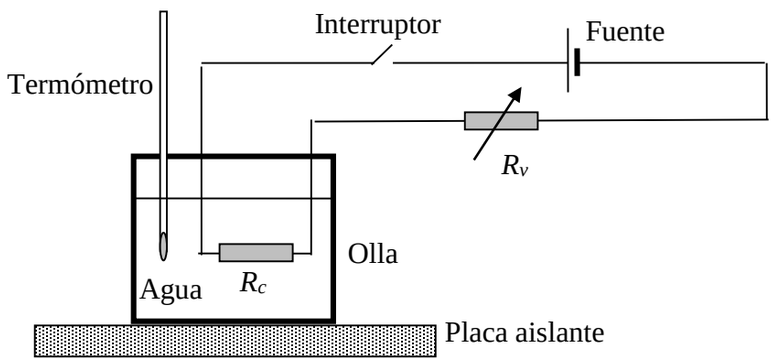


Fig. 1

Cuando la temperatura llega a 50.0º C se cierra el interruptor y queda conectada la fuente de 120 V.

Las condiciones ambientales en torno a la olla no cambian durante los procesos de enfriamiento y calentamiento.

2.3 puntos a) ¿Qué valor debe tener la resistencia variable R_v para que el agua se mantenga a 50.0º C?

3.6 puntos b) ¿Qué temperatura alcanzará el agua si la resistencia variable R_v se ajusta a 16.8 Ω y la fuente se mantiene conectada por un tiempo muy largo?

2.1 puntos c) Mientras el agua se calienta con la resistencia variable de 16.8 Ω, ¿cuál es su rapidez de calentamiento, en ºC/min, cuando pasa por los 58.0º C?

CURVA DE ENFRIAMIENTO

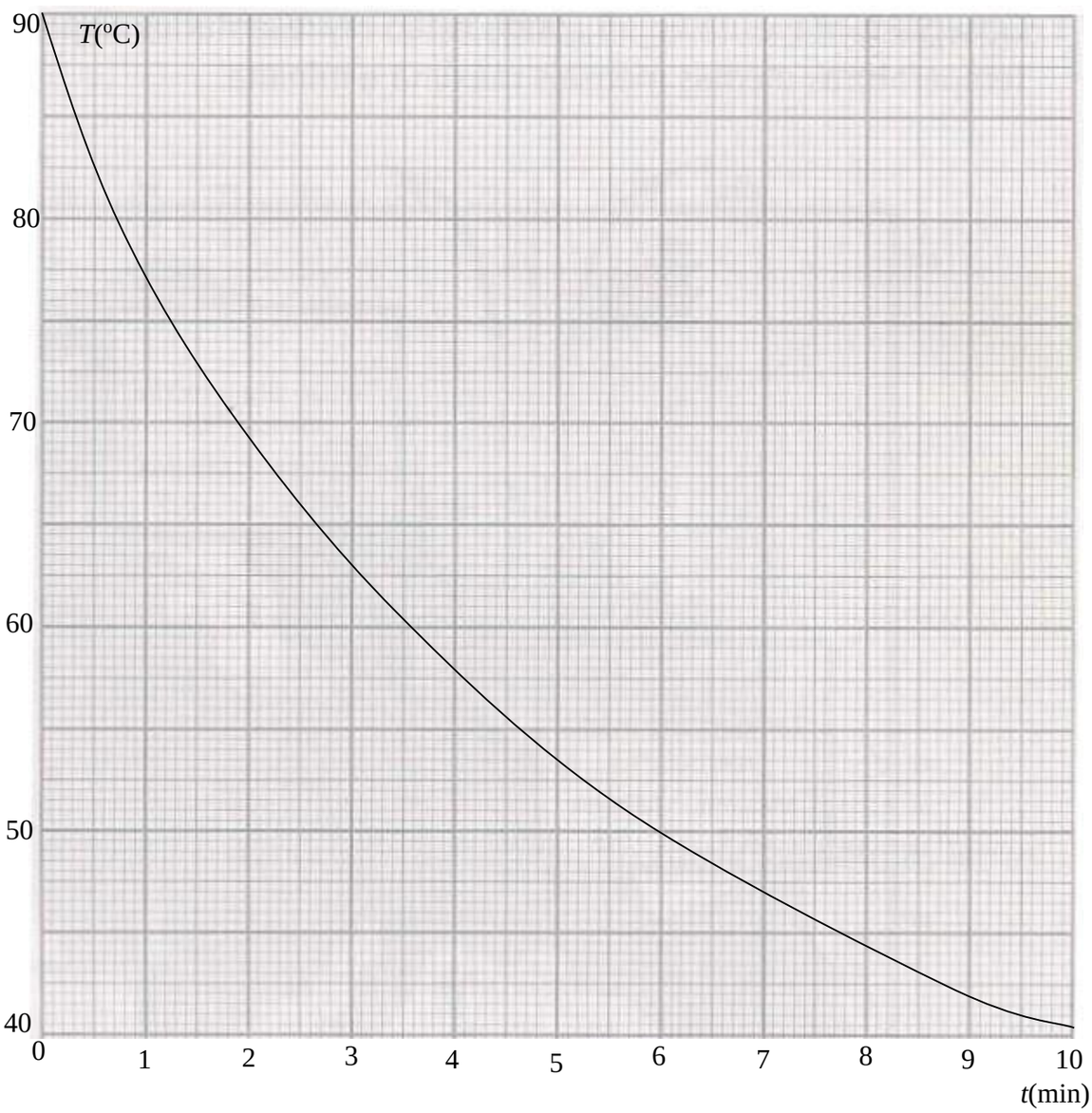
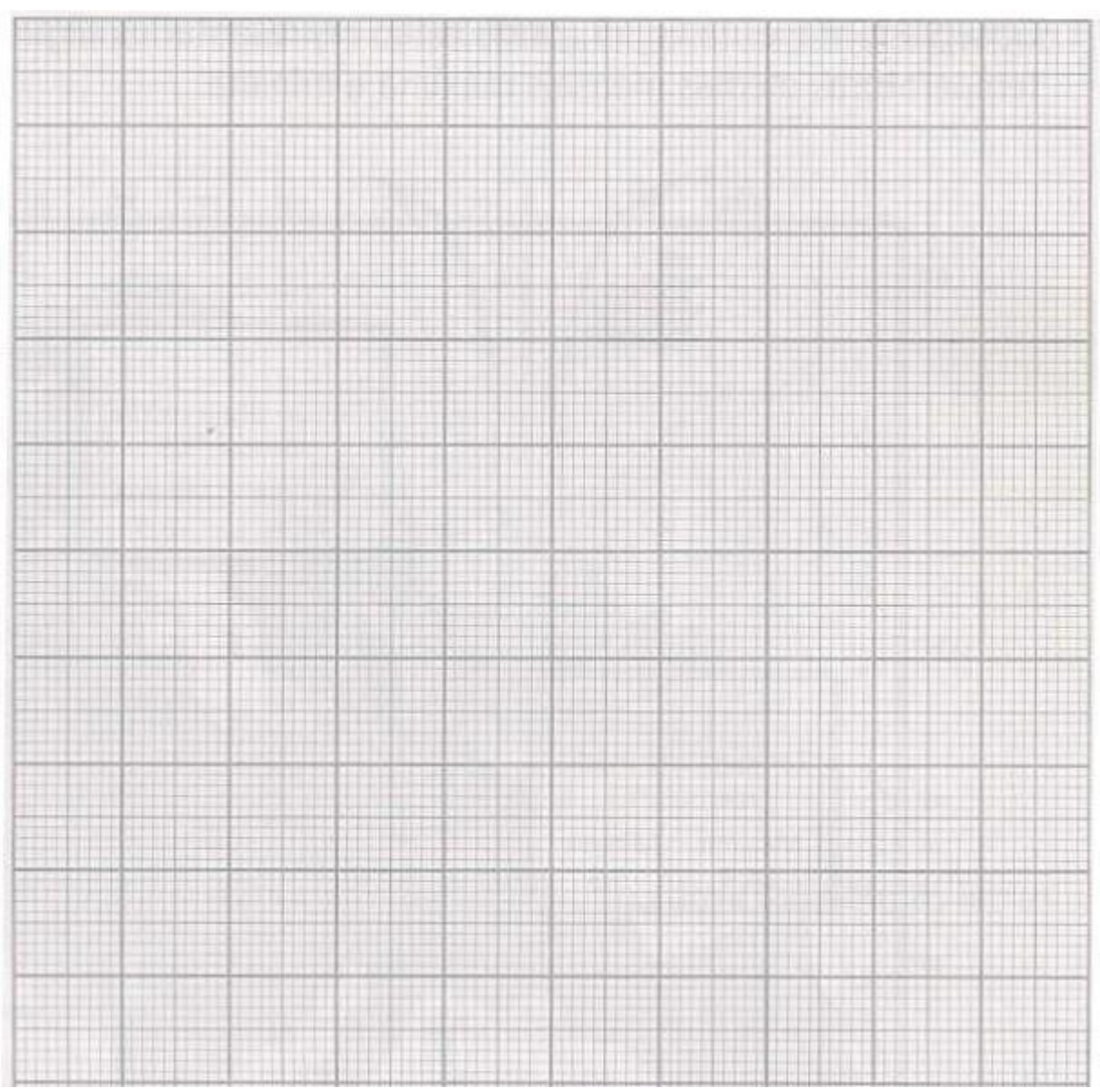


Fig. 2

HOJA AUXILIAR



XXIII Olimpiada Iberoamericana de Física

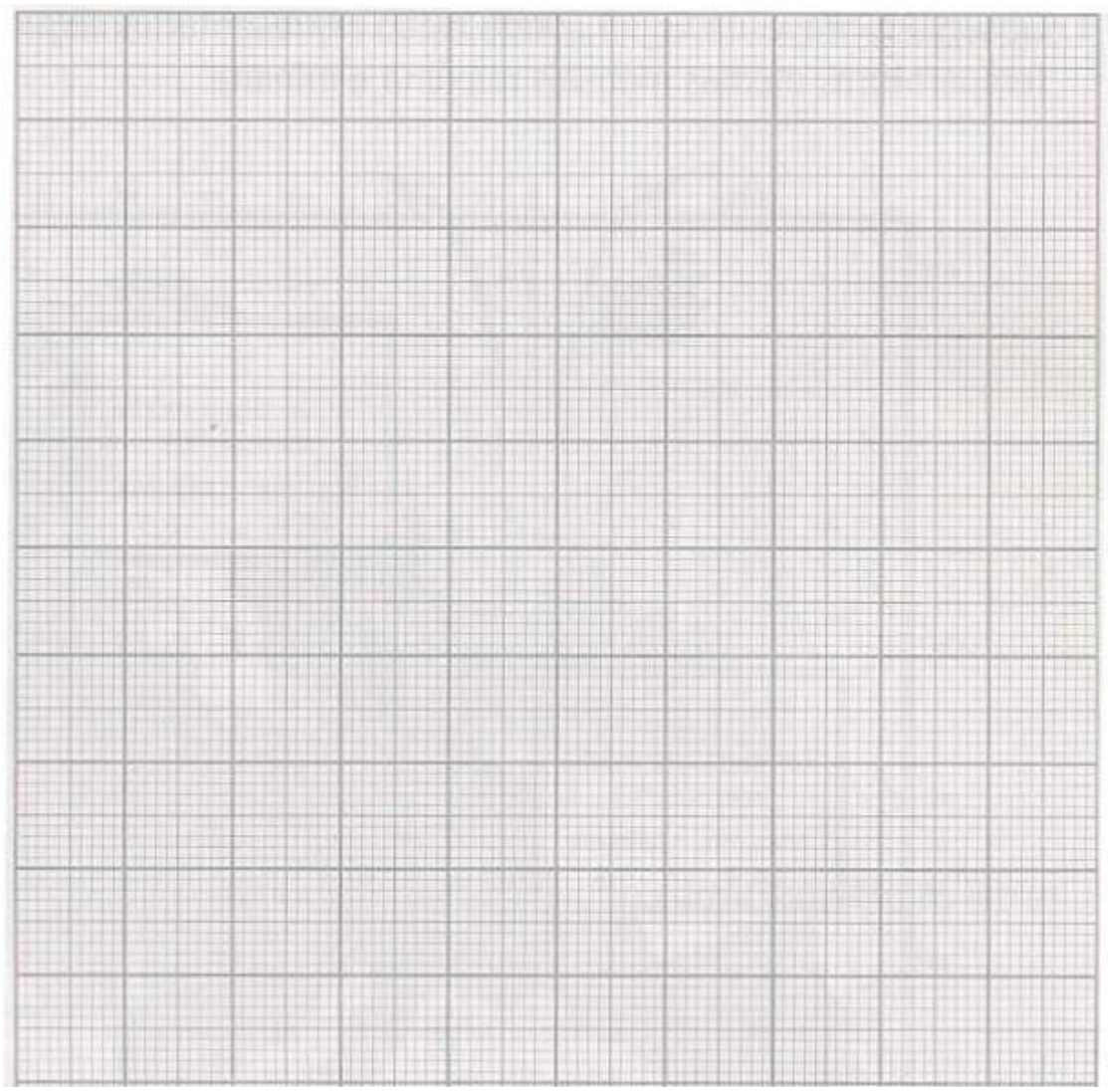
Mayagüez, PR, 2018

CÓDIGO

T2-4

Problema

HOJA AUXILIAR



2-SOLUCIÓN: {[8.0}

a)(Fig. A) En los 50ºC se enfría a razón de: (cálculo de la pendiente)

$\Delta T/\Delta t| = (68.5 - 40)/9.2 = 3.10$ ºC/min = 0.0516 ºC/s. (0.6)

Se cede calor al ambiente a razón de:

$\Delta Q^{ced}/\Delta t = (Mc + C)\,\Delta T/\Delta t = (0.500\times4.18\times103 + 200)\times0.0516 = 118$ J/s. (0.6)

Para que no cambie la temperatura hay que inyectar energía a razón de $P = V_c^2/R_c = 118$ W lo que implica $V_c = (118\times12)^{1/2} = 37.6$ V. Entonces: $V_v = 120.0 - 37.6 = 82.4$V (0.6)

La resistencia R_v que permite fijar este voltaje forma un divisor de voltaje con la de calenta-miento R_c, por lo que $R_v = R_cV_v/V_c = 12\times82.4/37.6 = 26.3\ \Omega$ (0.5)

b)Con la nueva resistencia el voltaje aplicado a R_c cumplirá: $120 = I(12.0 + 16.8)$ y de aquí: $I = 4.17$ A. (0.5)

Por tanto $V_c = IR_c = 4.17\times12.0 = 50.0$ V (0.5)

Se alcanzará una temperatura máxima cuando la potencia eléctrica entregada por R_c iguale a la potencia cedida al ambiente. O sea, cuando

$\Delta Q^{ced}/\Delta t = V_c^2/R_c = 50^2/12 = 208$ W (0.6)

Lo mismo que se hizo en la Fig. A se repite para tres o cuatro puntos más (Fig. B) y con las cuatro pendientes se calculan las potencias cedidas al ambiente a cada temperatura y se hace el grafico de **potencia cedida al ambiente** a diferentes temperaturas (Fig. C). (2.0)

El punto rojo indica la temperatura 62.5 ºC a la cual la potencia cedida es de 208 W, igual que la que provee la resistencia de calentamiento,

OTRA FORMA:

A una potencia cedida de 208 W corresponde una pendiente de enfriamiento de:

$\Delta T/\Delta t = (\Delta Q^{ced}/\Delta t) / (Mc + C) = 208/ 2290 = 0.0908$ ºC/s = 5.45 ºC/min

Se traza una recta con esa pendiente en el gráfico y se busca el punto en que mejor hace la tangencia a la curva. Es la recta de la Fig. D, que hace tangencia en el punto de temperatura

$T \approx 62.5$ ºC

Con los errores en la estimación visual de la pendiente, el resultado puede estar en:

$T = (62.5 \pm 1)$ ºC (entre 61.5 y 63.5 ºC, que está muy por debajo de la temperatura de ebullición del agua).

c) La Fig. C muestra (punto cuadrado negro) que la potencia cedida a 58ºC es P^{cedida} = 175 W : las condiciones ambientales son las mismas en el recalentamiento con la resistencia de 16.8 Ω que durante el enfriamiento desde 90ºC, por lo que a las mismas temperaturas habrá igual velocidad de enfriamiento (por radiación, conducción y convección) tanto en el enfriamiento como en el recalentamiento. La potencia de calentamiento es P^{calent} = 208 W por lo que la potencia neta absorbida es: P^{abs} = 208 – 175 = 33 W. **(1.2)**

La velocidad de calentamiento se obtiene de: $P^{abs} = (Mc + C)\,\Delta T/\Delta t$, por lo que

$\Delta T/\Delta t = P^{abs}/(Mc + C)$ = 33/2290 = 0.0144 ºC/s = 0.86 ºC/min **(0.9)**

Fig. A: CURVA DE ENFRIAMIENTO

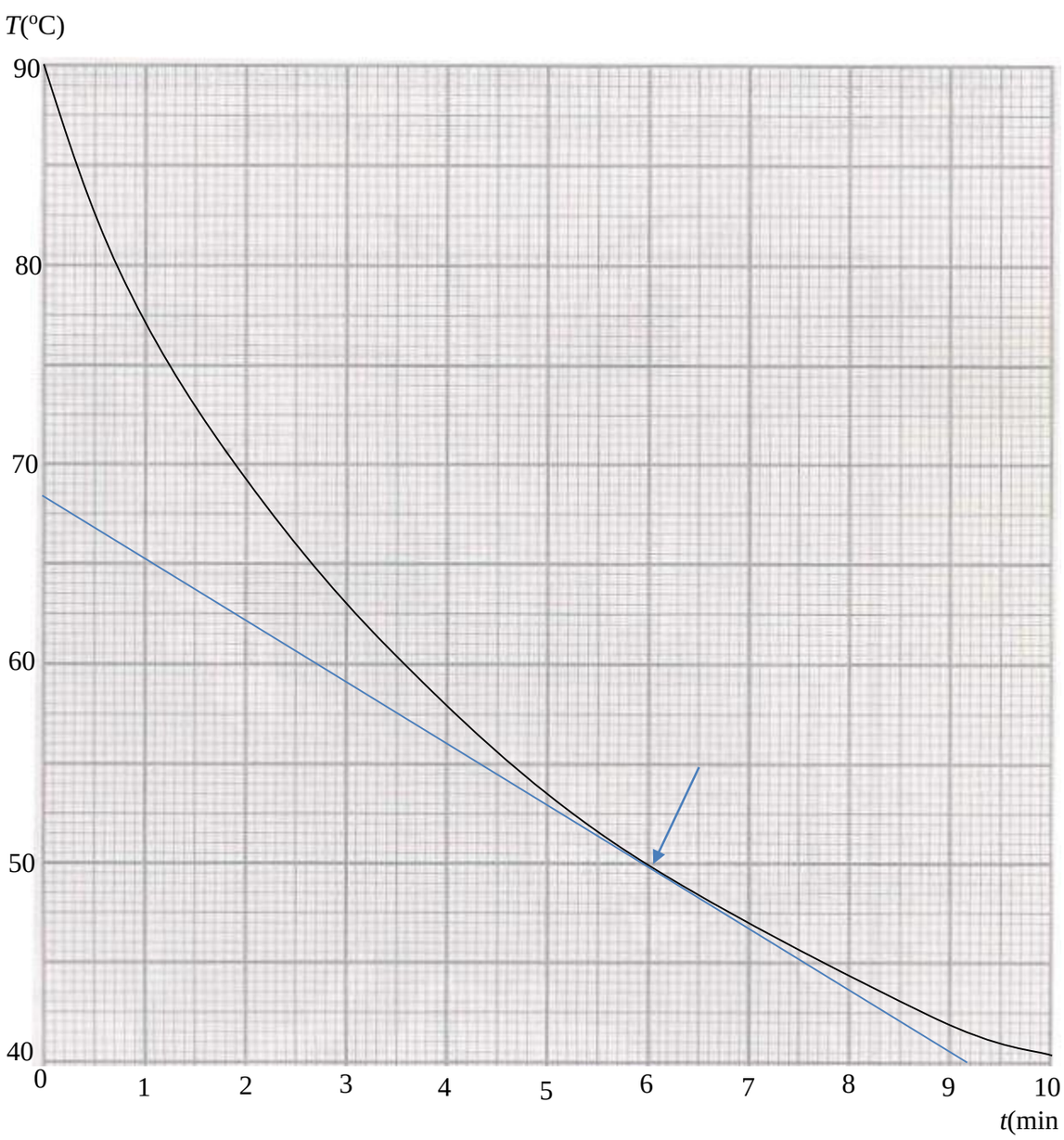


Fig. B: CURVA DE ENFRIAMIENTO

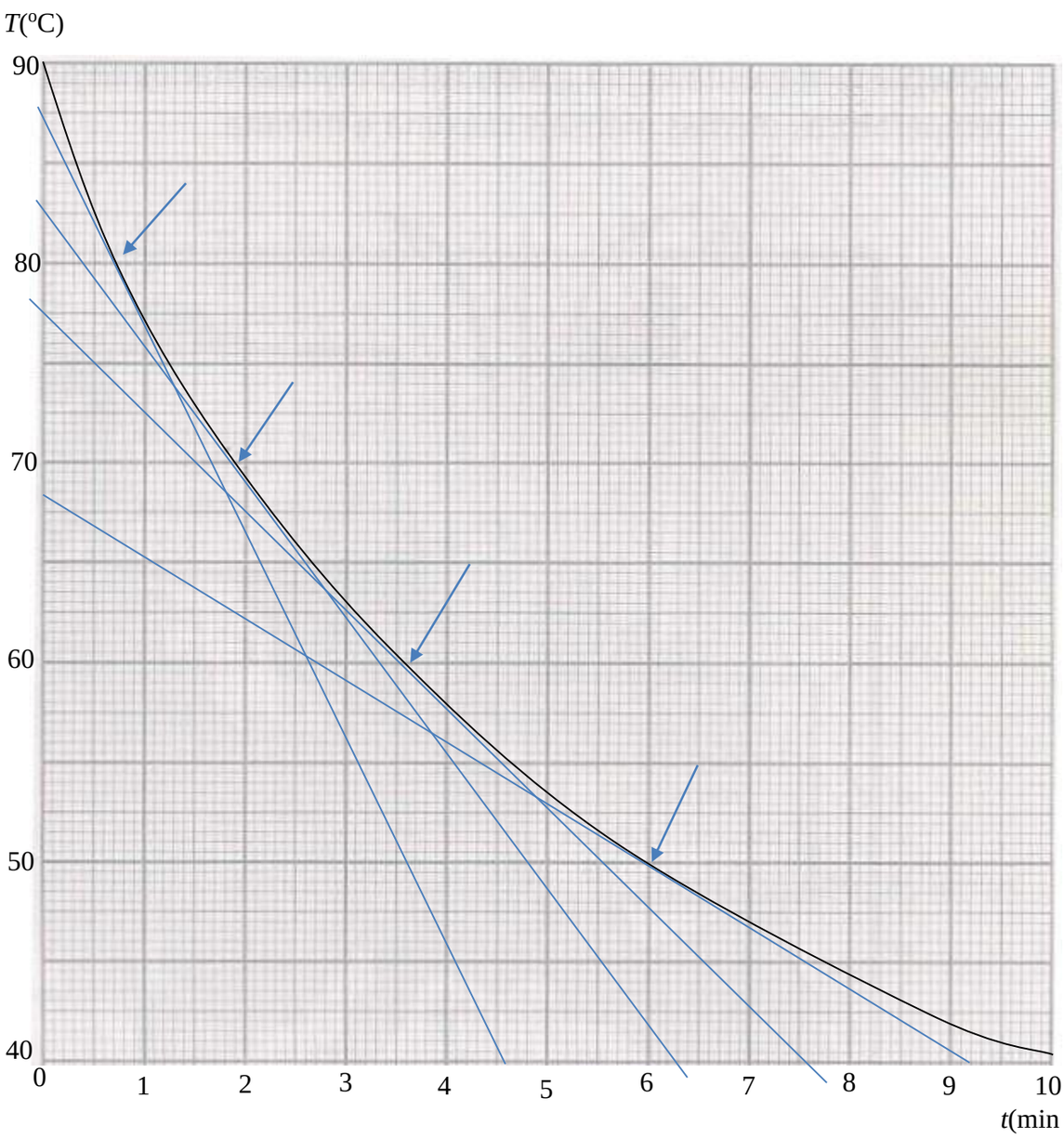
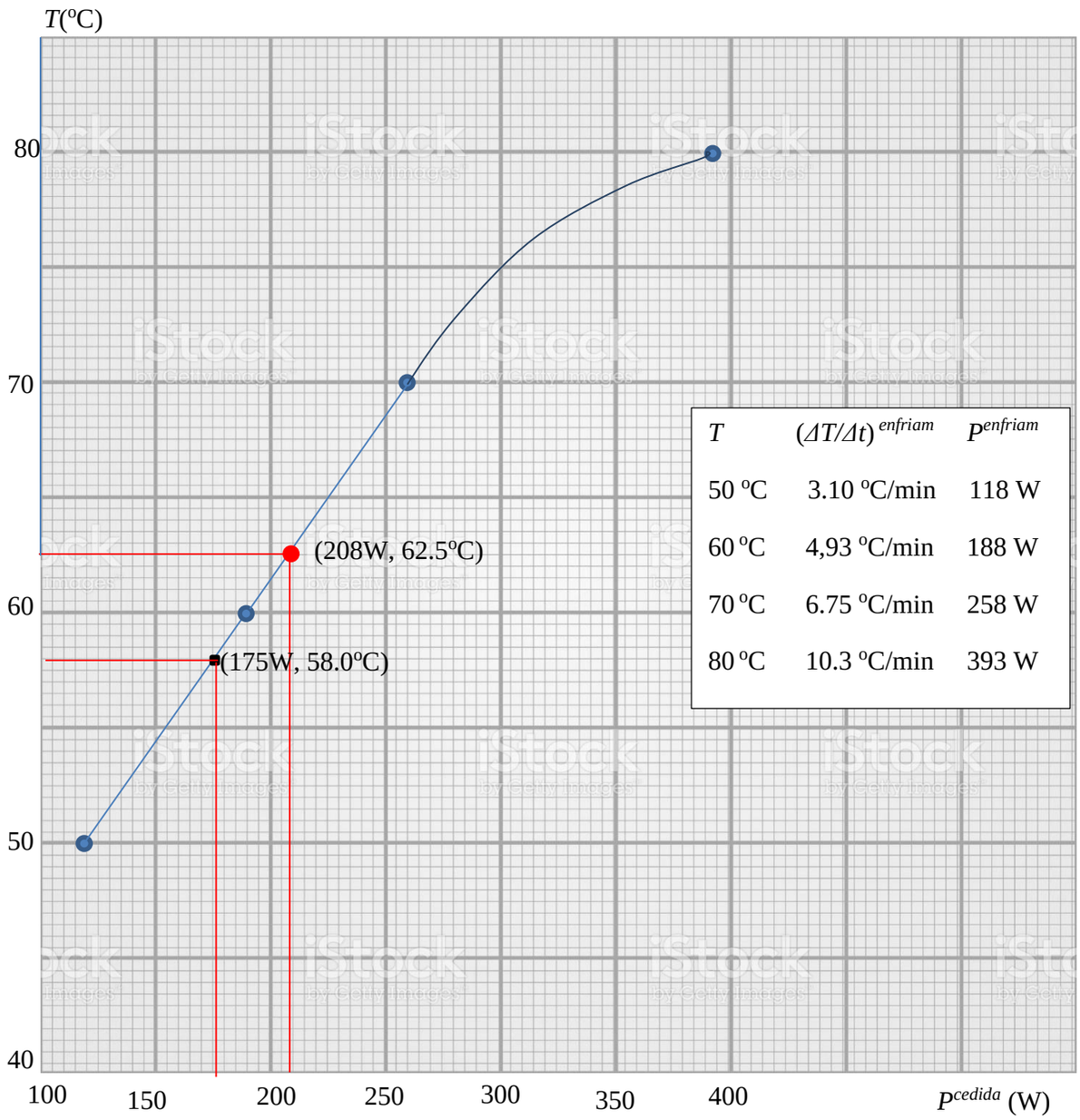


Fig. C: TEMPERATURA *vs* POTENCIA CEDIDA AL AMBIENTE



XXIII Olimpiada Iberoamericana de Física

Mayagüez, PR, 2018

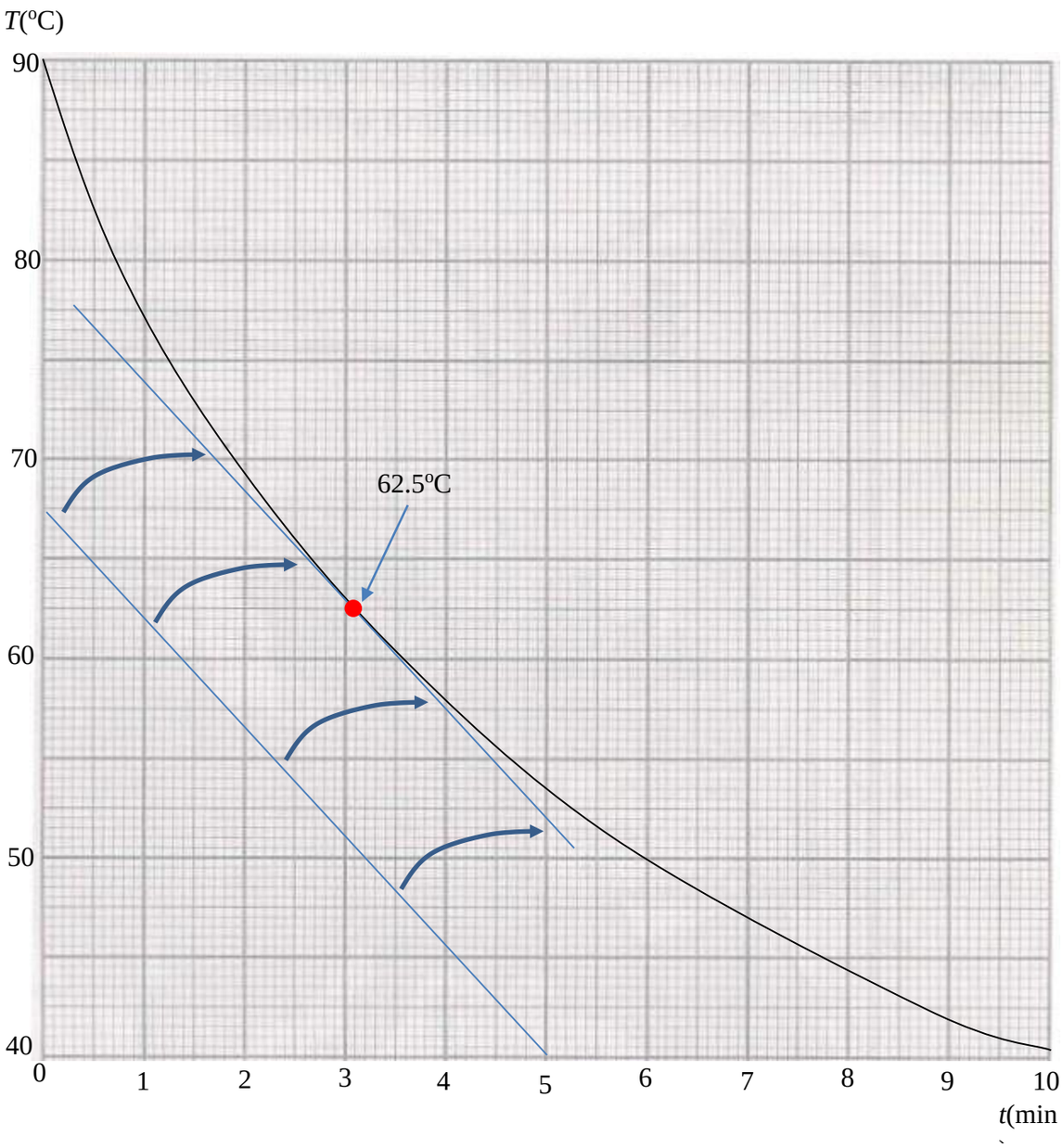
Prueba Teórica: Solución

(en castellano)

T2-4S'

Problema

(Otra variante) Fig. D: CURVA DE ENFRIAMIENTO



3- CAPACITORES. **(8.0 puntos)**

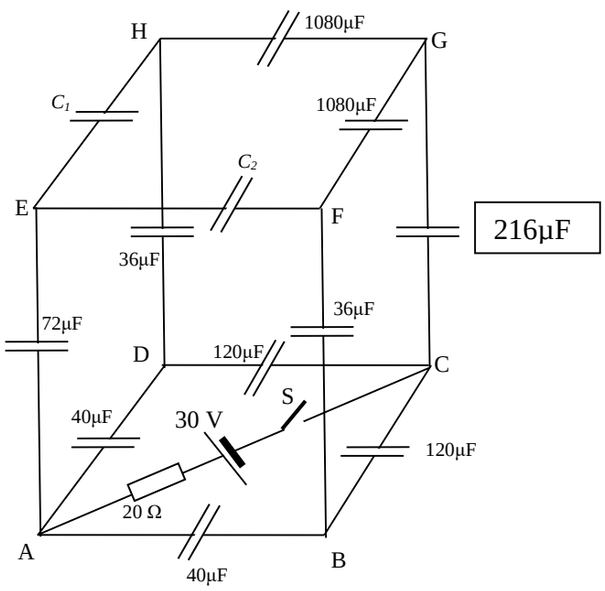
Se tiene el circuito esquematizado en la figura, en donde el interruptor está abierto y los capacitores descargados. Se cierra el interruptor y después de un cierto tiempo se observa que los capacitores de 36 μF han quedado descargados.

2.5 puntos a) Calcule los valores de C_1 y C_2.

4.5 puntos b) ¿Qué carga adquiere cada uno de los capacitores del circuito?

0.5 punto c) ¿Qué energía total se acumula en los capacitores?

0.5 punto d) ¿Cuánta energía gastó la batería en el proceso de carga del sistema de capacitores?



SOLUCIÓN: {(8)}

a)Si los de 36 μF no se cargan es como si no estuvieran en el circuito (Fig. 2). Además, esto significa que $V_{HD} = V_{BF} = 0$, por lo que $V_{AD} = V_{AH} = V_{AE} + V_{EH}$ y $V_{AB} = V_{AF} = V_{AE} + V_{EF}$. Atendiendo a la simetría de los capacitores respecto a la diagonal EACG podemos anticipar que $C_1 = C_2$ pues solamente así se lograrán distribuciones iguales de cargas en las ramas EHG y EFG que produzcan los mismos voltajes nulos entre las esquinas simétricas D-H y B-F. Podemos llamar C a ambos capacitores.

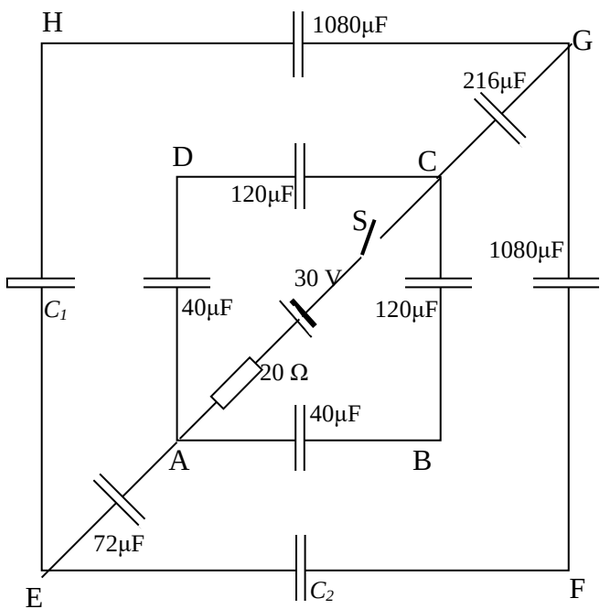


Fig. 2

(0.5)

Asumamos que de A a D la batería envía una carga q_1 (la misma que envía de A a B, debido a la simetría de las ramas ADC y ABC) de modo que el voltaje $V_{AD} = q_1/C_{AD}$. Esa misma carga llegaría al capacitor que está entre D y C, de modo que $V_{DC} = q_1/C_{DC}$. Así, el voltaje de la batería queda dividido en dos partes por el punto D, cuya suma es $V_{AD} + V_{DC} = 30$ V y cuya razón es $V_{AD} / V_{DC} = C_{DC} / C_{AD} = 120/40 = 3.0$. (La resistencia no produce voltajes cuando ya los capacitores se cargaron). Entonces $V_{AD} = 22.5$ V $= V_{AH}$. Y $V_{DC} = 7.5$ V $= V_{HC}$.

La batería envía otra carga q_2 por la rama AE que se divide a partes iguales, $½\ q_2$, por las ramas EHG y EFG, para retornar por la rama GC como q_2. Se cumplirá:

$V_{AH} = V_{AE} + V_{EH} = q_2/C_{AE} + ½\ q_2/C_{EH} = q_2/72 + ½\ q_2/C$)

Pero debe cumplirse $V_{AD} = V_{AE} + V_{EH}$ por lo que: $22.5 = q_2/72 + ½\ q_2/C$ (A)

Y: $V_{HC} = V_{HG} + V_{GC} = (½\ q_2/C_{HG} + q_2/C_{GC}) = ½\ q_2/1080 + q_2/216) = (11/2160)q_2 = 7.5$ V

De aquí: $q_2 = 1472$ μC $= 1.47$ mC

De (A): $C = 360$ μF ---------- (2.0)

b)El circuito de la Fig. 2 puede reducirse a un circuito equivalente más simple:

Las ramas ADC y ABC quedan en paralelo. La capacitancia de cada rama es:

$1/C_1 = 1/40 + 1/120 = 1/30$, $C_1 = 30$ μF (0.5)

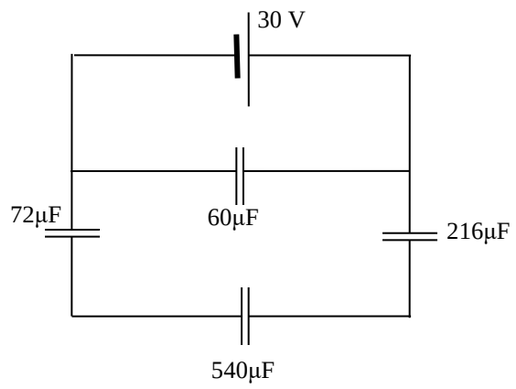
Y las dos en paralelo tienen una capacitancia $C_{p1} = 30 + 30 = 60$ μF

Las ramas EHG y EFG quedan en paralelo. La capacitancia de cada rama es:

$1/C_2 = 1/360 + 1/1080 = 1/270$, $C_2 = 270$ μF

Y las dos en paralelo tienen una capacitancia $C_{p2} = 270 + 270 = 540$ μF (0.5)

El sistema se reduce al circuito siguiente (Fig. 3):



(0.5)

Fig. 3

Las tres capacitancias en serie equivalen a 49.1 μF y la capacitancia total del sistema es:

$C_t = 60 + 49 = 109$ μF. (0.6)

La carga que sale de la batería es $Q = C_t\mathcal{E} = 109\times30 = 3.3$ mC (0.6)

La carga en las de 40 μF y 120 μF es $Q' = 30\times30 = 0.90$ mC (0.6)

La carga en las de 72 μF y 216 μF es $3.27 - 2\times0.90 = 1.5$ mC (0.6)

En todos los demás capacitores la carga es $½\times1.47 = 0.74$ mC (0.6)

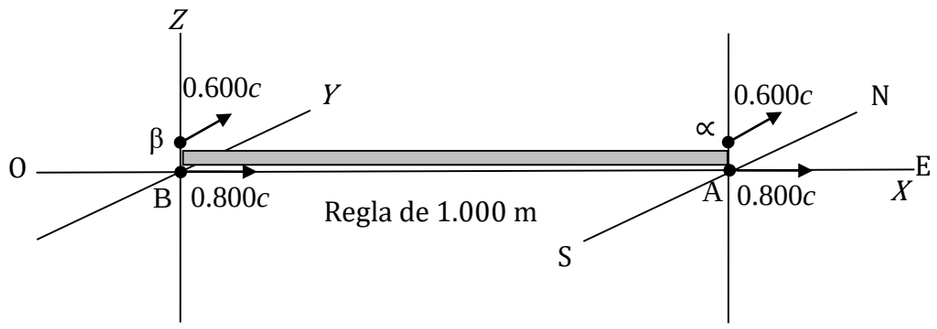
c)La energía total acumulada en los capacitores es:

$U = ½\, C\, \mathcal{E}^2 = ½\times109\times30^2 = 49$ mJ (0.5)

d)El trabajo realizado por la batería al mover toda la carga es: $W = Q\,\mathcal{E} = 3.27\times30 = 98$ mJ (0.5)

Es el doble de la acumulada en el circuito. La mitad se pierde en las resistencias inevitables del circuito (alambres conductores, resistencia interna de la batería, contactos) representadas en el circuito por el resistor de 20 Ω.

4-ELECTRONES RELATIVISTAS (6.0 puntos)



Sucesos observados en el Sistema del laboratorio-regla

Fig. 1

Dos electrones, A y B, se mueven en el sentido positivo del eje *X* a 0.800*c* respecto a una regla de 1.000 m fija a un laboratorio. Otros dos electrones, ∝ y β, se mueven en el sentido positivo del eje *Y* a 0.600*c* respecto a la misma regla (Fig. 1).

En el sistema de la regla, el cruce de A con ∝ y el de B con β ocurren simultáneamente sin colisionar, separados en el espacio por la longitud de la regla. La separación en el eje *Z* entre las trayectorias de los electrones es despreciable. Desprecie la interacción eléctrica entre los electrones.

0.4 punto a) Haga un esquema en el plano *X,Y* que muestre dónde están los electrones B y β cuando A coincide con α, de acuerdo con un sistema que viaja con los electrones A y B.

0.4 punto b) Haga otro esquema similar al anterior que muestre dónde están los electrones A y α cuando B coincide con β, de acuerdo con un sistema que viaja con los electrones A y B. Coloque el origen de coordenadas en el punto en que se cruzan B y β.

1.2 puntos c) En el sistema que viaja con A y B, ¿cuál encuentro se produce primero, A con α, o B con β, y cuánto tiempo primero?

2.0 puntos d) ¿Qué distancia separa a los electrones A y α, según el sistema que viaja con los electrones A y B, cuando B y β se cruzan?

1.2 puntos e) ¿Qué distancia separa a los electrones α y β, según el sistema que viaja con los electrones A y B?

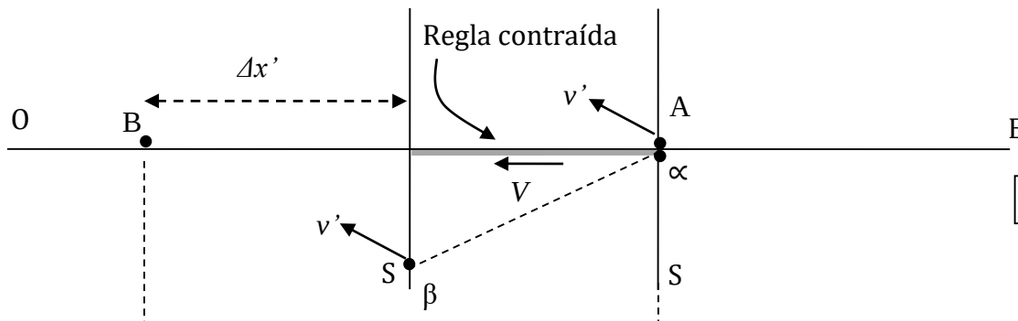
0.4 punto f) ¿Qué energía total tiene el electrón α respecto al A?

0.4 punto g) ¿Qué momento lineal (módulo o magnitud) tiene el electrón α respecto al A?

Masa del electrón: 9.11×10^{-31} kg = 0.500 MeV/c^2 Velocidad de la luz: 3.00×10^{8} m/s

4-SOLUCIÓN: {[6.0}

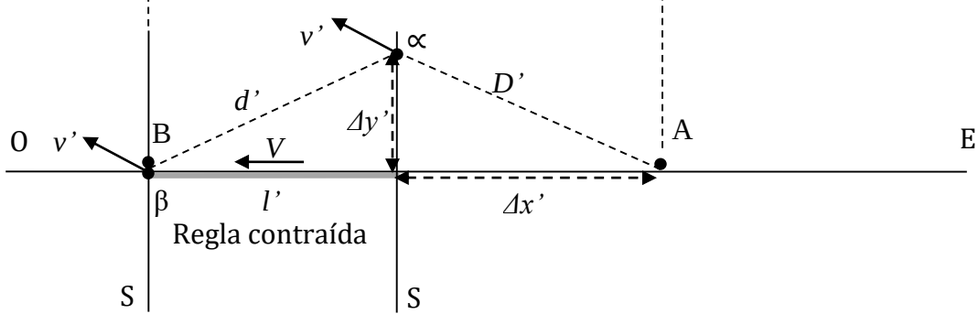
a) Sucesos observados en el Sistema móvil AB



(0.4)

Fig. 1a

b) Sucesos observados en el Sistema móvil AB



(0.4)

Sucesos observados en el Sistema móvil AB

Fig. 1b

c) Tomamos los orígenes O (de la regla) y O' (del sistema AB) donde se cruzan los electrones B y β, y tomamos ese cruce de B y β como suceso de referencia en el tiempo. Entonces:

$x_B = x'_B = 0$ en $t_B = t'_B = 0$

Para el sistema AB, el cruce de A y α ocurre en:

$t'_A = \gamma(t_A - x_A\, V/c^2)$ con $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0.800^2} = 1/0.600$

$t'_A = (0 - 1.000\times 0.800/c)/0.600 = -4.44$ ns

(1.2)

El encuentro de A con α ocurre 4.44 ns antes que el de B con β en el sistema S' que viaja con los electrones A y B.

d) En S' pasan 4.44 ns entre el encuentro de A con α y el de B con β. En ese tiempo se sepa-ran A y α una distancia dada por $D' = v't'$ (Fig. 1b), donde v' es la velocidad de α respecto a A, según se observa desde el sistema AB:

$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}$

Ahora: $v'_x = (v_x - V) / (1 - v_xV/c^2) = (0 - 0.800c) / (1 - 0) = -0.800c$

Y: $v'_y = [v_y/(1 - v_xV/c^2)] \sqrt{1 - V^2/c^2} = [0.600c / (1 - 0)] \sqrt{1 - 0.800^2} = 0.360c$

Entonces: $v' = \sqrt{(0.800c)^2 + (0.360c)^2} = 0.877c$

$D' = v't' = 0.877 \times 3.00 \times 10^8 \times 4.44 \times 10^{-9} = 1.17$ m **(2.0)**

(De otra forma:

$\Delta x' = -0.800c \times 4.44 \times 10^{-9} = -1.066$ m, $\Delta y' = 0.360c \times 4.44 \times 10^{-9} = 0.480$ m y

$D' = \sqrt{1.066^2 + 0.480^2} = 1.17$ m)

e) La distancia entre α y β se obtiene por Pitágoras (Fig. 1b), con un cateto igual a la longitud de la regla contraída, $l' = l_o\sqrt{1 - V^2/c^2}$ y con el otro cateto igual a $\Delta y' = v'_y\, t'$:

$l' = 1.000 \sqrt{1 - 0.800^2} = 0.600$ m y $\Delta y' = 0.360 \times 3.00 \times 10^8 \times 4.44 \times 10^{-9} = 0.480$ m

Entonces: $d' = \sqrt{0.600^2 + 0.480^2} = 0.768$ m **(1.2)**

f) $E' = mc^2/\sqrt{1 - v'^2/c^2}$ donde v' es la velocidad de α respecto a A:

Por tanto: $E = 0.511/\sqrt{1 - 0.877^2} = 1.06$ MeV **(0.4)**

g) El momento lineal de α respecto a A será:

$p' = mv'/\sqrt{1 - v'^2/c^2} = 0.511c^{-2} \times 0.877c/\sqrt{1 - 0.877^2} = 0.932$ MeV/c **(0.4)**

(O por componentes:

$\mathbf{p'} = mv'_x/\sqrt{1 - v'^2/c^2}\,\mathbf{i} + mv'_y/\sqrt{1 - v'^2/c^2}\,\mathbf{j} = (-0.851\,\mathbf{i} + 0.383\,\mathbf{j})$ MeV/c

$p' = \sqrt{0.511^2 + 0.383^2} = 0.933$ MeV/c)

Ruptura de la tensión superficial y ecosistemas

Introducción

La tensión superficial es un fenómeno físico-químico ligado a las interacciones moleculares de un fluido. Ella resulta del aumento de la energía a la interfaz entre dos fluidos. Este sistema tiende hacia un equilibrio que corresponde a la configuración de energía más baja, modificando así su geometría para disminuir el área de esta interfaz.

Existen agentes tensoactivos, también llamados surfactantes, que disminuyen la tensión superficial entre la superficie o entre dos líquidos.

El poder contaminante de los detergentes se manifiesta también con los desechos sólidos, es más fácil que muchos desechos no floten y causen la ruptura del ecosistema y desaparición de seres vivos, tal y como es el caso controversial de las tortugas de mar y los pingüinos, por desperdicios humanos; aunque claramente ¡tampoco es la única causa!

Es por esto que en esta prueba experimental se verá cómo afecta la concentración de jabón en el agua, utilizando para ello, una propiedad particular de la tensión superficial: **la capilaridad.** Cuando un fluido sube por un tubo capilar, es debido a la tensión superficial, la cual, a su vez, depende de la cohesión del fluido, y que le confiere la capacidad de subir o bajar a lo largo de un tubo delgado.

Un líquido sube por un tubo capilar debido a que la fuerza intermolecular o cohesión intermolecular es menor que la adhesión del líquido con el material del tubo; es decir, es un líquido que moja la superficie. El líquido sigue subiendo hasta que la tensión superficial es equilibrada por el peso del líquido que llena el tubo (ver Figura 1). Éste es el caso con el agua, y esta propiedad es la que regula parcialmente su ascenso dentro de las plantas, sin gastar energía para vencer la gravedad. Cuando la tensión superficial disminuye, ocasiona que esta propiedad se vea afectada y por ende los organismos también.

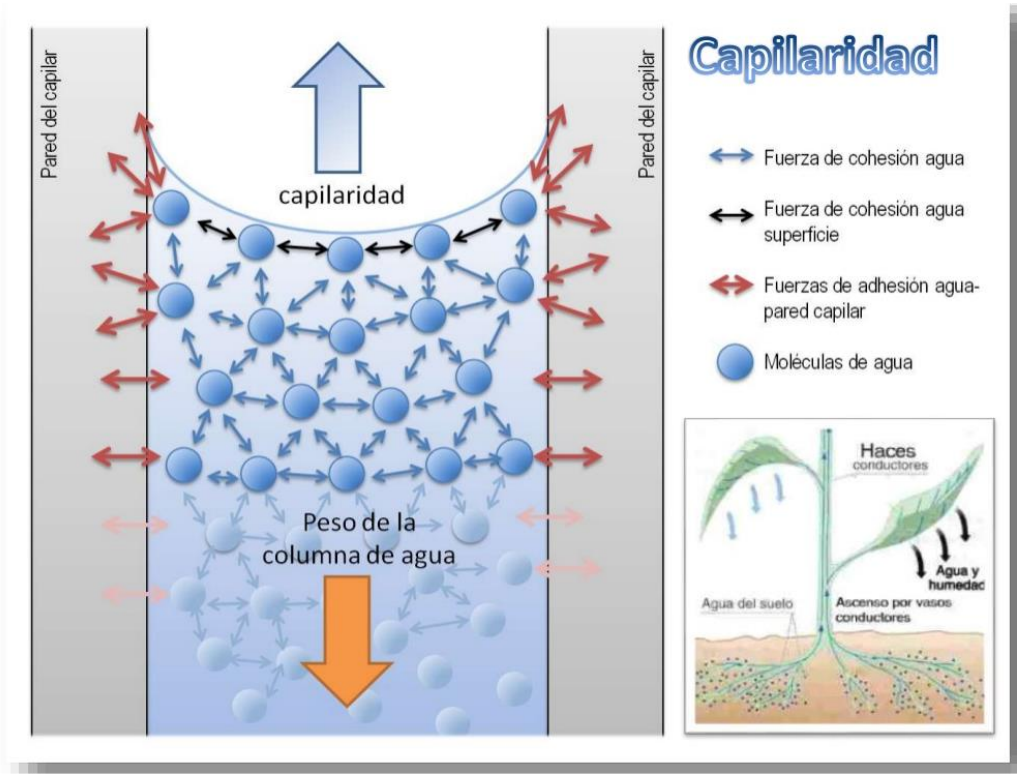


Figure 1: Esquema de fuerzas de la tensión superficial en las paredes de un tubo capilar y en una planta

La capilaridad puede ser utilizada para medir tensión superficial, sumergiendo un tubo de vidrio en una muestra de solución y luego sacándolo. Con la altura de la columna de líquido retenida en el tubo se puede determinar el coeficiente de tensión superficial σ.

En efecto, la condición de equilibrio del líquido en el tubo tiene la forma

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho g h \tag{1}$$

Donde ρ es la densidad del líquido y r es el radio de capilaridad. A partir de esta condición se utiliza la ecuación para determinar el coeficiente de tensión superficial σ

Denotaremos ρ_0 , σ_0 , la densidad y el coeficiente de tensión superficial del agua pura y h_0 la altura del nivel de agua pura en el tubo. De esta manera podremos calcular el coeficiente de tensión superficial de la solución de agua con jabón con la ecuación siguiente.

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\rho h}{\rho_0 h_0} \tag{2}$$

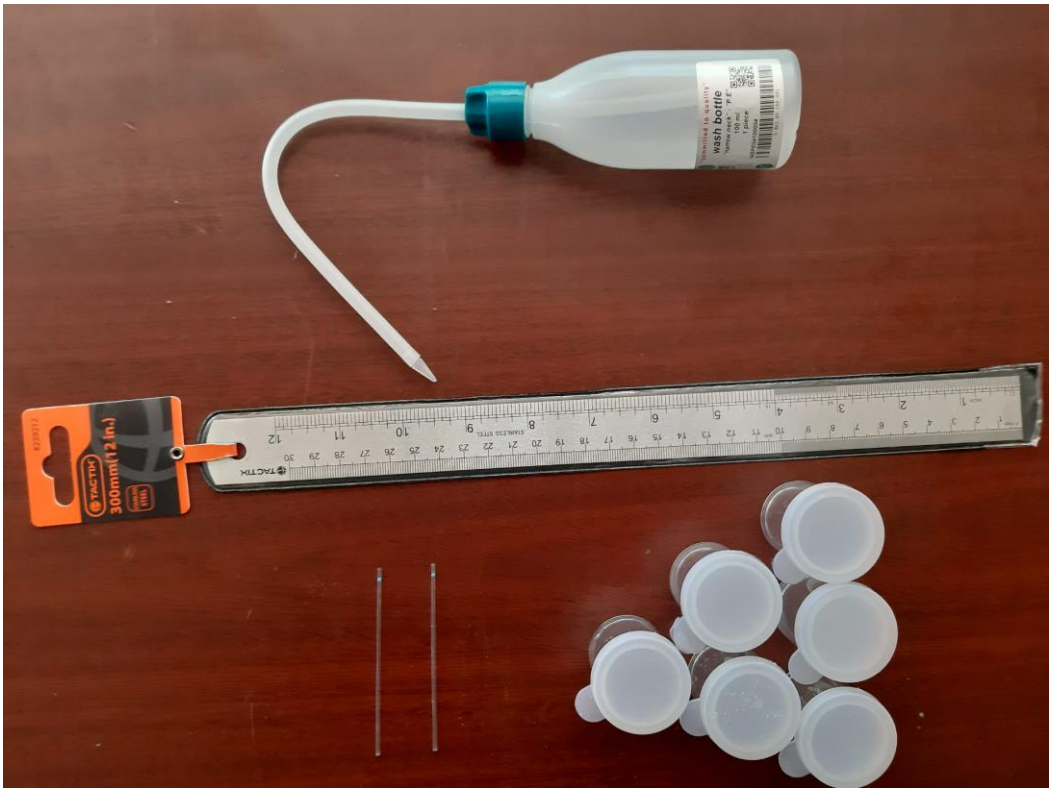
Debido a la propiedad del jabón con el agua y los niveles de concentración muy bajos de jabón, haremos la aproximación que la densidad de la solución se mantiene constante. Así:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{h}{h_0} \tag{3}$$

Con $\sigma_0 = 72.75 \times 10^{-3}$ N/m y $h_0 = (2.60 \pm 0.05)$ cm en el rango de temperatura de (25 ± 2) °C a presión atmosférica.

Materiales

- 2 Tubos capilares
- 7 frascos con soluciones de jabón y agua de diferentes concentraciones
- Regla graduada
- 1 piseta o bombita
- Papel milimetrado



Parte A. Dependencia de la concentración

En esta parte se busca ver la relación que tiene la tensión superficial de un líquido según la concentración de los agentes tensoactivos en él. Particularmente, estudiaremos la tensión superficial de una solución de agua y jabón, según la concentración del jabón. Para esto, se han creado 7 soluciones de diferentes concentraciones (ver tabla A) y se pretende que, con ayuda del tubo capilar, se calcule la tensión superficial.

Procedimiento de medición:

1. Dibuje con el marcador una raya sobre el tubo, que servirá de guía para saber la profundidad que se sumergirá en la solución. Puede usar como referencia la franja azul señalada en el tubo.
2. Introduzca el tubo en la solución y agítelo, de tal manera que su interior se empape de la solución a medir, sáquelo y luego sóplelo con ayuda de la piseta para vaciarlo. Repítalo al menos 3 veces para "ambientarlo" a cada solución.
3. Tape con el dedo el extremo superior del tubo y sumérjalo en la solución. De esta manera se evita que se acumulen burbujas en el interior.
4. Destape el tubo del extremo y espere a que la solución deje de ascender.
5. Saque el tubo de la solución y espere a que el líquido deje de descender, debido al cambio de presión y viscosidad.
6. Tape el tubo del mismo extremo superior, acerque cuidadosamente a la regla sin tocarlos y mida la altura de la columna del líquido.

<u>Antes de tomar medidas, tenga en cuenta las siguientes recomendaciones:</u>

- Debido a los errores aleatorios en la toma de medidas de la altura de la columna de líquido en el capilar, es esencial llevar a cabo estas medidas las veces que considere conveniente.
- Es importante limpiar el tubo luego de cada medición, para esto haremos uso de la piseta (bombita), que nos permite soplarlo de tal manera que no queden gotas en el interior de él.
- Se recomienda que antes de hacer mediciones para una concentración, sumergir el tubo en la solución y soplarlo con la piseta (bombita) para así ambientarlo a la solución y evitar que gotas de otras concentraciones queden dentro de él y se mezclen.
- Evitar secar el tubo con la camisa debido a que podría romperse.
- **Atención:** el segundo tubo es sólo de repuesto. Cada tubo es distinto.

A. 1	Construya una tabla con las concentraciones y alturas capilares con el cálculo de error respectivo. Esta tabla, será rotulada como tabla A1.	**2.5pt**

A. 2	Calcule el valor del coeficiente de tensión superficial σ para cada concentración *c* y haga el gráfico correspondiente.	**2 pt**

Se ha determinado experimentalmente que la tensión superficial de la solución depende de la concentración de jabón, por lo que podríamos establecer esta relación como

(4) $$\sigma = Ac^b$$

Donde *c* es la concentración de jabón. A y b dos parámetros a determinar.

A. 3	Linealice la gráfica de la parte A.2.	**2.0 pt**

A. 4	Calcule el parámetro *b* con su incertidumbre.	**1.0 pt**

Parte B. Aplicación práctica

Una de las ventajas que nos proporciona la estadística es la interpolación y extrapolación de datos para predecir eventos a partir de una variable conocida. En este caso usaremos los datos obtenidos en la Parte A para caracterizar la solución de agua y jabón X de concentración desconocida.

B. 1	A partir de la medición de la altura, determine la tensión superficial de la solución X con su incertidumbre.	**0.5 pt**

B. 2	Utilizando los resultados de la parte A, determine la concentración de la solución X con su incertidumbre.	**2.0 pt**

Tabla A1

Tabla A

Solution	C (% m/v)
A	0.0021
B	0.0142
C	0.0383
D	0.0800
F	0.2507
H	0.8009

Ruptura de la tensión superficial y ecosistemas

Solución

Parte A. Dependencia de la concentración

A. 1	Construya una tabla con las concentraciones y alturas capilares con el cálculo de error respectivo. Esta tabla, será rotulada como tabla A1.	**2.5pt**

Tabla A1 (1.5pts)

C [gr/ml]	h1 [cm]	h2 [cm]	h3 [cm]	h4 [cm]	h5 [cm]	h prom. [cm]	Error
0.0021	2.25	2.35	2.35	2.35	2.25	2.31	0.02
0.0142	2.00	1.85	1.80	1.80	1.75	1.84	0.04
0.0383	1.80	1.70	1.60	1.60	1.55	1.65	0.04
0.0800	1.75	1.55	1.50	1.45	1.45	1.54	0.06
0.2507	1.35	1.35	1.20	1.10	1.15	1.23	0.05
0.8009	1.15	1.10	1.10	1.05	1.00	1.08	0.03
1.6004	1.00	1.00	0.95	1.00	1.00	0.99	0.01

La altura en el capilar se obtiene de promediar al menos 5 mediciones de la altura

El error de las alturas se puede obtener como el error estándar de la media de las mediciones de cada concentración especifica

$$\Delta h = \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$$

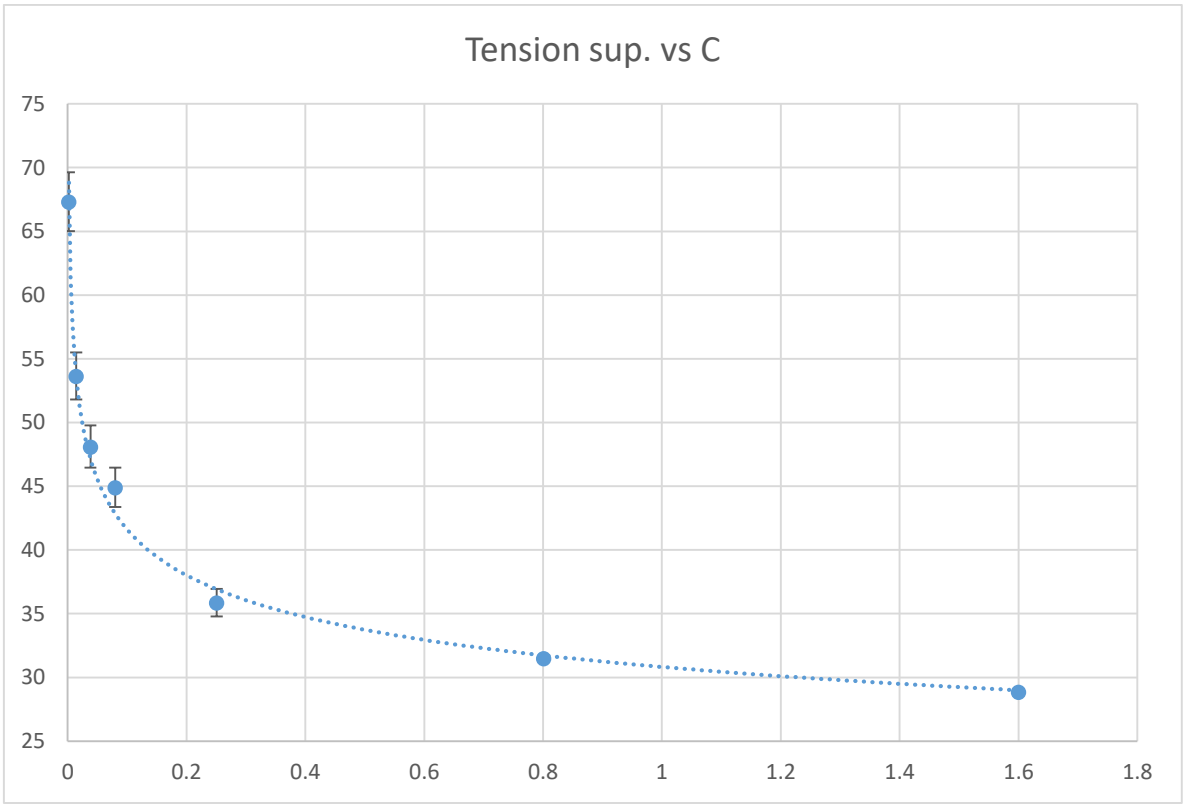
Donde σ es la desviación estándar de las muestras de altura (1.0pt)

A. 2 Calcule el valor del coeficiente de tensión superficial σ para cada concentración c y haga el gráfico correspondiente. **2 pt**

Tabla A2 (1.0pt)

C [gr/ml]	h prom. [cm]	Error	sigma (dinas/cm)
0.0021	2.31	0.02	67.30
0.0142	1.84	0.04	53.60
0.0383	1.65	0.04	48.07
0.0800	1.54	0.06	44.86
0.2507	1.23	0.05	35.83
0.8009	1.08	0.03	31.46
1.6004	0.99	0.01	28.84

(1.0pt)

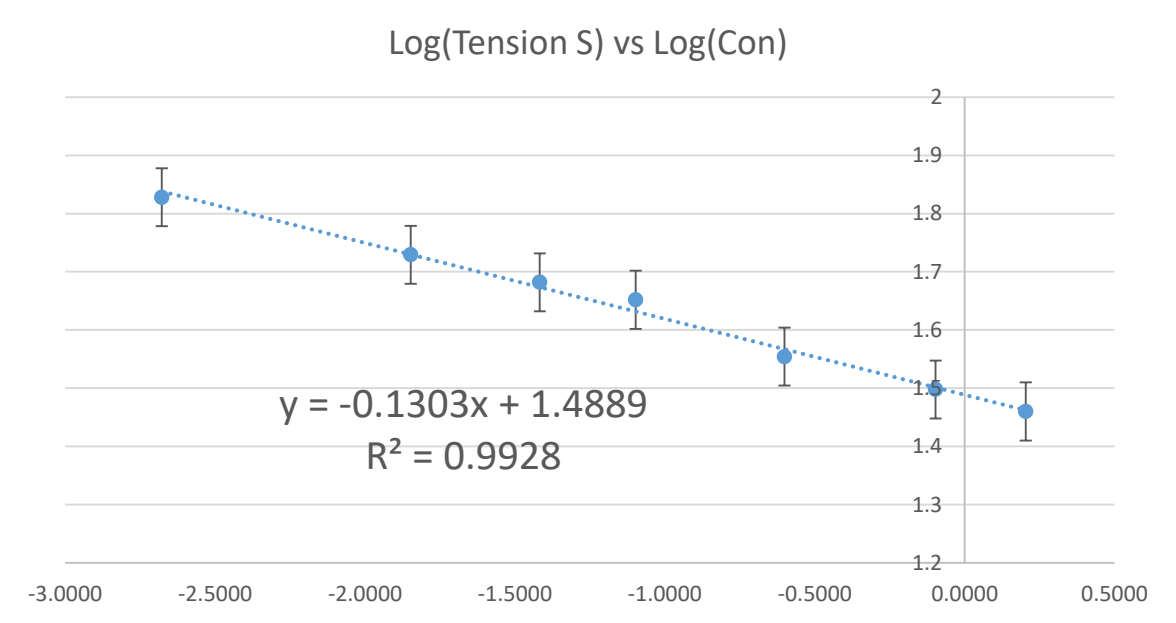


A. 3 Linealice la gráfica de la parte A.2. **2.0 pt**

(1.0pt)

C [gr/ml]	Log(C)	sigma (dinas/cm)	Log(sigma)
0.0021	-2.6778	67.306	1.83
0.0142	-1.8477	53.60	1.73
0.0383	-1.4168	48.07	1.68
0.0800	-1.0969	44.86	1.65
0.2507	-0.6008	35.83	1.55
0.8009	-0.0964	31.46	1.50
1.6004	0.2042	28.84	1.46

(1.0pt)



A. 4	Calcule el parámetro *b* con su incertidumbre.	**1.0 pt**

Pueden determinar la pendiente mediante el método gráfico, midiendo directamente la pendiente en el gráfico que obtuvieron en la parte A3 (0.5pts)

Pueden estimar la incerteza de la pendiente trazando las pendientes máxima y mínima en el gráfico (0.5pts)

$$\mathrm{b} = (-13.03 \pm 0.49) \times 10^{-2}$$

Alternativamente pueden obtener el parámetro mediante mínimos cuadrados y obtener el error estándar de la pendiente (0.5pts)

$$b = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}$$

Donde σ_x^2 es la varianza de *x,* y cov(x,y) es la covarianza entre *x* e *y* (0.5pts)

$$\Delta b = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

Donde σ_y es la desviación estándar de la muestra de *y*

Parte B. Aplicación práctica

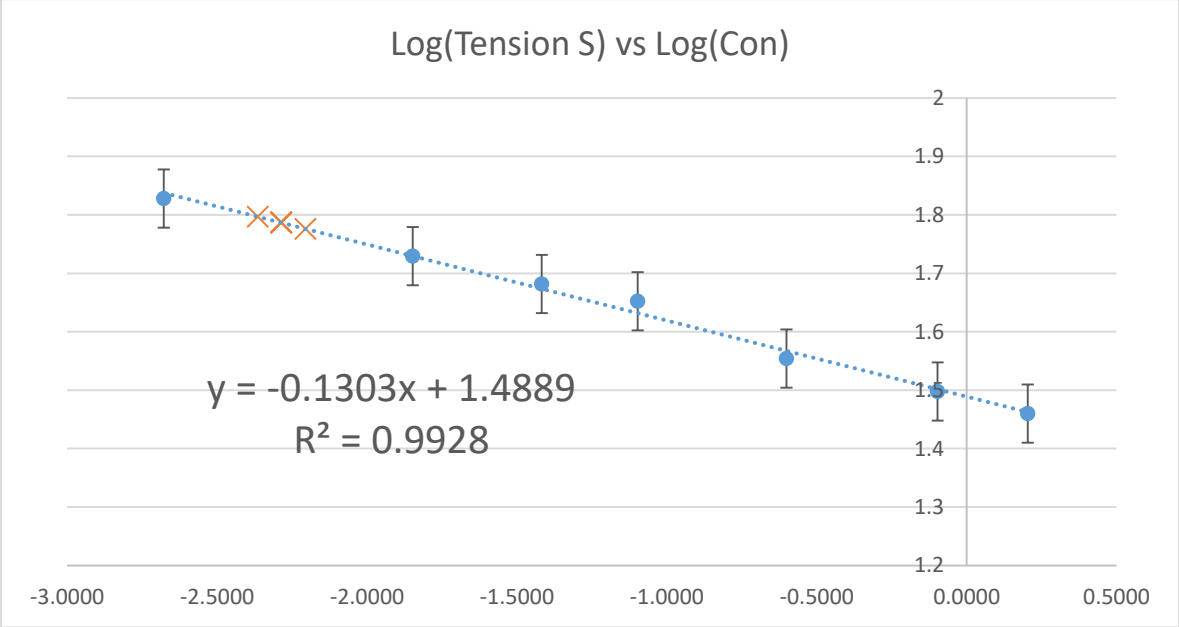
B. 1	A partir de la medición de la altura, determine la tensión superficial de la solución X con su incertidumbre.	**0.5 pt**

h1 [cm]	h2 [cm]	h3 [cm]	h4 [cm]	h5 [cm]	h prom. [cm]	Error
2.15	2.1	2.1	2.05	2.1	2.1	0.01

Se hacen varias medidas de la altura en el capilar y se obtiene el promedio (0.25pts)

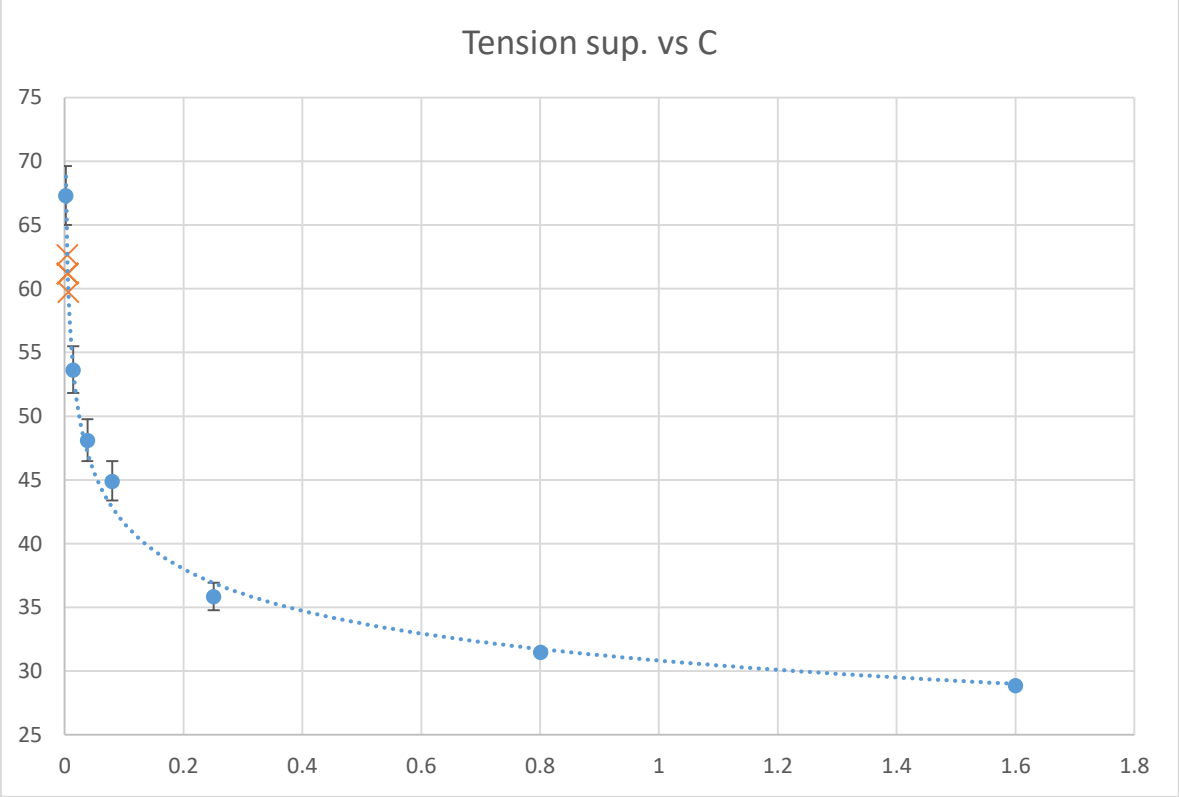
Nuevamente se obtiene la incerteza como el error estándar de la media (0.25pts)

B. 2	Utilizando los resultados de la parte A, determine la concentración de la solución X con su incertidumbre.	**2.0 pt**



(1.0pts)

Solution	C (% m/v)
A	0.0021
B	0.0142
C	0.0383
D	0.0800
F	0.2507
H	0.8009
J	1.6004



$$C_x = (5.1 \pm 0.9) \times 10^{-3}\%(m/v)$$

(1.0pts)

El error se estima como el intervalo que abarca todas las concentraciones

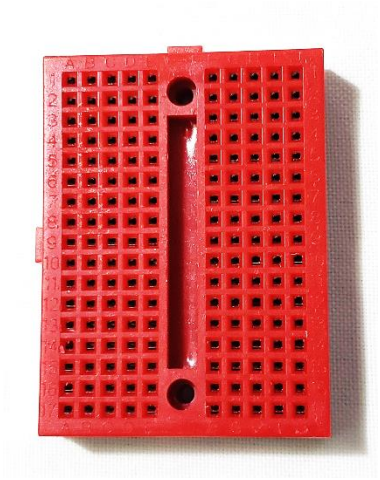
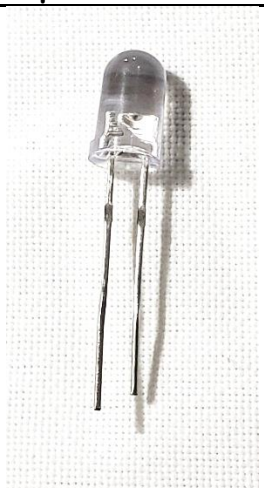
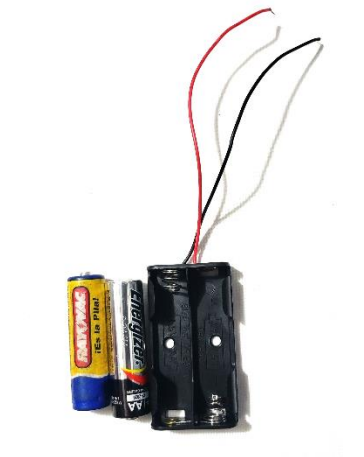
XXIV OIbF Olimpiada Iberoamericana de Física 2019 - El Salvador

PRUEBA EXPERIMENTAL

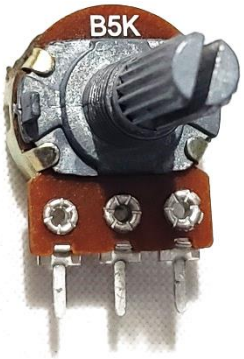
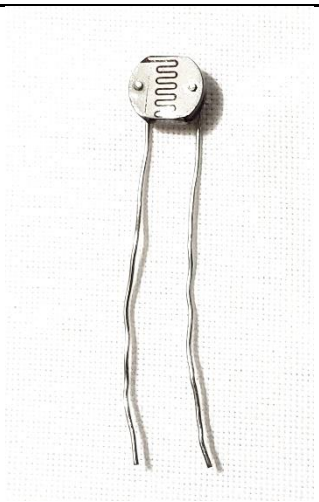
E-2

Caracterización de LED y Fotorresistencia (10 puntos)

Materiales:

 Breadboard o protoboard.	 Cables conectores para breadboard.	 Cables cocodrilos.
 LED de luz roja.	 Porta baterías con baterías	 Dos multímetros digitales

GOBIERNO DE EL SALVADOR
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Jóvenes Talento El Salvador
XXIV OIbF
Olimpiada Iberoamericana de Física

 **Una resistencia variable o reóstato (potenciómetro).**	 **Una fotorresistencia**

El breadboard o protoboard que se utilizará para este experimento, a diferencia de otras protoboard comerciales, consta únicamente de dos columnas con hileras de 5 agujeros u orificios. Estos 5 agujeros están conectados entre sí internamente y cada hilera es independiente de las demás.

Los diodos emisores de luz (LED por sus siglas en inglés) son fuentes de luz prometedoras capaces de producir altas intensidades de luz con eficiencias al menos 10 veces mayor que las fuentes de luz tradicionales. Sus aplicaciones van desde señalización y uso en sensores e indicadores, retroiluminación de pantallas de computadoras y dispositivos móviles, hasta la iluminación general.

La forma comercial de los LED de diferentes colores presenta un encapsulado de resina epóxica del que sobresalen dos terminales que son necesarios para proveer el voltaje V que permitirá la emisión de luz. Es de notar que, este componente tiene polaridad, tal como muestra la Figura 1 (a).

Teniendo un dispositivo capaz de emitir luz con alta eficiencia, resulta útil contar con un dispositivo que nos permita estimar la intensidad de la luz emitida. Uno de los primeros dispositivos creados para tal fin es la fotorresistencia. Éste es un componente cuya resistencia es inversamente proporcional a la intensidad de la luz incidente. Puede ser llamado también fotoconductor, celda

fotoeléctrica o resistencia dependiente de la luz (LDR por sus siglas en inglés). Su construcción se muestra en la Figura 1(b).

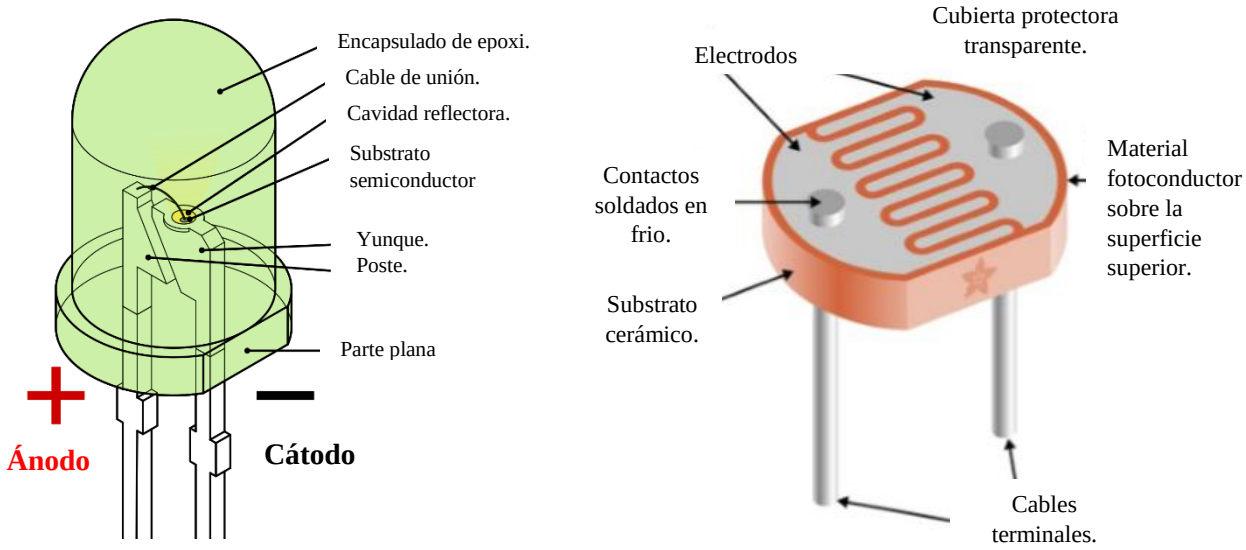


Figura 2: (a) Diagrama de un LED mostrando sus componentes y destacando sus cables conectores con la polaridad apropiada [1]. (b) Diagrama de una fotorresistencia mostrado sus componentes y sus terminales no polarizados [2].

Parte A: Curva Característica del LED.

En esta parte estudiaremos el comportamiento no lineal de la corriente que circula a través de un diodo emisor de luz con respecto un voltaje externo aplicado entre sus terminales. Para ello tenemos que medir la diferencia de potencial entre los terminales del diodo y la corriente que circula a través del mismo. Primeramente, con los materiales provistos, tenemos que armar el circuito mostrado en la Figura 3, teniendo cuidado de respetar la polaridad indicada.

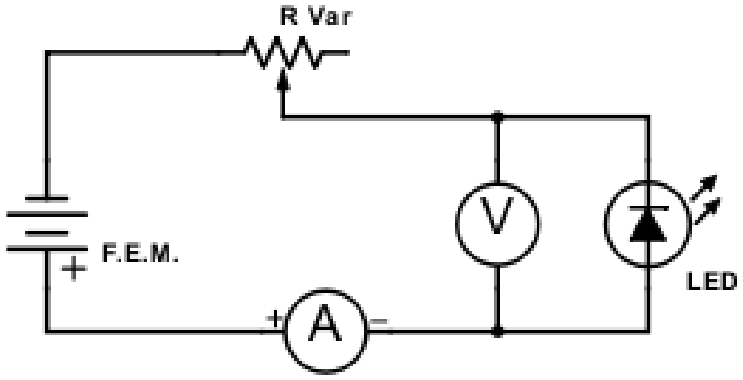


Figura 3: Diagrama de conexión de los elementos requeridos para la Parte A. Observe que la fuerza electromotriz (F.E.M. con la polaridad indicada), el amperímetro (A), el LED (con la polaridad apropiada) y la resistencia variable (R Var) se encuentran conectados en serie. El voltímetro (V) se encuentra conectado en paralelo con el LED.

Antes de armar el equipo y tomar mediciones, favor leer las siguientes recomendaciones:

- Asegúrese que el lugar de trabajo se encuentra seco, sin residuos de jabón.
- Arme en su totalidad los componentes, asegurándose que no exista corto circuito antes de conectar las baterías (F.E.M.).
- Por su sensibilidad, el amperímetro NO DEBE conectarse directamente para medir la corriente de las baterías. Se corre el peligro de quemar el protector interno (fusible) del mismo, inutilizándolo para medir corrientes.
- Revise que el multímetro digital se encuentra en la posición apropiada y en la escala apropiada para medir las cantidades solicitadas.
- Desconecte las baterías cuando termine de medir, evitando que se agoten prematuramente.
- El potenciómetro funciona como una resistencia variable si conectas la terminal de en medio junto con cualquier terminal de los lados. Puede dejar la terminal del otro lado sin conectar.
- Los multímetros pueden funcionar como voltímetros o como amperímetros dependiendo de la selección que hagamos con la palanca del centro. Debe tener cuidado a la hora de escoger la escala apropiada.

A. 1	Construya una tabla que muestre la información de la corriente que circula por el LED junto con el Voltaje a los extremos de sus terminales. Tome un número de medidas apropiado para realizar análisis estadísticos.	**2.0 pt**

Experimentalmente se ha determinado que la relación entre la corriente y el voltaje está determinada por la siguiente ecuación:

$$I = I_1 e^{\beta V} + I_0 \qquad (1)$$

De manera que el voltaje vs corriente tiene una proporcionalidad logarítmica de la forma:

$$V = V_1 \log(I) + V_0 \qquad (2)$$

A. 2	Encuentre el valor de los parámetros V_0 y V_1 de la Ecuación 2 con sus respectivas incertezas.	**3.0 pt**

Parte B: Caracterización de una Fotorresistencia usando el LED.

En esta parte estudiaremos el comportamiento de una fotorresistencia y su relación con la intensidad generada por el LED. Para ello asumiremos que el diodo convierte la potencia eléctrica que se le suministra de forma eficiente y la transforma en una intensidad de luz apropiada:

$$\text{Intensidad} \propto \text{Potencia}.$$

Esta relación es válida dentro de nuestro intervalo de medición.

Con una fuente de intensidad variable (puesto que podemos variar la potencia del LED con el potenciómetro), podemos encontrar la relación entre la intensidad de la luz y la resistencia de la fotorresistencia. Para ello procederemos a armar el circuito mostrado en la Figura 4, teniendo cuidado de respetar la polaridad indicada.

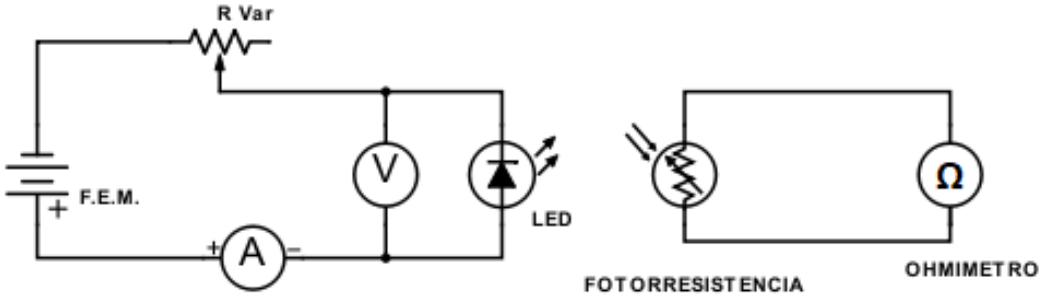


Figura 4: Diagrama de conexión de los elementos requeridos para la Parte B. Observe que la fuerza electromotriz (F.E.M. con la polaridad indicada), el amperímetro (A), el LED (con la polaridad apropiada) y la resistencia variable (R Var) se encuentran en serie. El multímetro se coloca en modo ohmímetro y mide la resistencia efectiva de la fotorresistencia.

Antes de armar el equipo y tomar mediciones, favor leer las siguientes recomendaciones:

- Asegúrese que el lugar de trabajo se encuentra seco, sin residuos de jabón.
- Asegúrese que la fotorresistencia esté cerca del LED, para que reciba principalmente luz proveniente del LED y no del ambiente.
- Arme en su totalidad los componentes, asegurándose que no existan corto circuitos antes de conectar las baterías (F.E.M.).
- Por su sensibilidad, el amperímetro NO DEBE conectarse directamente para medir la corriente de las baterías. Se corre en peligro de quemar el protector interno (fusible) del mismo, inutilizándolo para medir corrientes.
- Revise que el multímetro digital se encuentra en la posición apropiada y en la escala apropiada para medir las cantidades solicitadas.
- Desconecte las baterías cuando termine de medir, evitando que se agoten prematuramente.
- El potenciómetro funciona como una resistencia variable si conectas la terminal de en medio junto con cualquier terminal de los lados. Puedes dejar la terminal del otro lado sin conectar.

- Los multímetros pueden funcionar como ohmímetros o como amperímetros dependiendo de la selección que hagamos con la palanca del centro. Debe tener cuidado a la hora de escoger la escala apropiada.

B. 1	Construya una tabla que muestre la corriente que circula por el LED vs. la resistencia medida por la fotorresistencia. Tome un número de mediciones apropiada para análisis estadístico.	**1.0 pt**

Dado que necesitamos conocer la potencia con la que el LED emite (para conocer su intensidad), podemos calcular a partir de la gráfica del apartado A.2 el valor del voltaje en los extremos del LED usando la información dada por la Ecuación (2) y con ello encontrar la potencia usando la relación:

$$P = I\,V \;\rightarrow f(I) \qquad (4)$$

Donde vemos que podemos expresar la potencia como una función de la corriente únicamente.

B. 2	Construya una tabla que muestre el valor medido de la corriente que circula por el LED, el voltaje calculado en los extremos del LED, la potencia que el LED emite para esa corriente dada y el valor medido de la resistencia a los extremos de la fotorresistencia.	**2.0 pt**

B. 3	Utilizando los datos de la tabla B.2, encuentre la relación entre la potencia del LED y la resistencia de la fotorresistencia.	**2.0 pt**

[1] Safa Kasap. Electrical Engineering Department. University of Saskatchewan. Canada.

[2] GL55 Series Photoresistor Datasheet. CdS Manual.

Caracterización de LED y Fotorresistencia (10 puntos)

A. 1	Construya una tabla que muestre la información de la corriente que circula por el LED junto con el Voltaje a los extremos de sus terminales. Tome un número de medidas apropiado para realizar análisis estadísticos.	**2.0 pt**

LED Rojo	
I (mA)	**V (Volts)**
0.75	1.802
0.8	1.807
0.89	1.813
0.93	1.815
1.08	1.825
1.19	1.832
1.26	1.836
1.39	1.845
1.51	1.852
1.6	1.857
1.66	1.859
1.72	1.863
1.81	1.866
1.85	1.87
2.02	1.875
2.15	1.876
2.31	1.883
2.4	1.881
2.7	1.901
2.47	1.892
2.86	1.907
2.96	1.909
3.42	1.923
3.97	1.939
3.99	1.938
5.7	1.98

5.84	1.983
6.01	1.986
6.4	1.968

A. 2	Encuentre el valor de los parámetros V_0 y V_1 de la Ecuación 2 con sus respectivas incertezas.	**3.0 pt**

Para ello tenemos que realizar el cambio de variable de $I \rightarrow \ln I$ y construir la siguiente Tabla:

LED Rojo		
I [A]	**ln(I)**	**V [Volt]**
0.00075	-7.19544	1.802
0.0008	-7.1309	1.807
0.00089	-7.02429	1.813
0.00093	-6.98033	1.815
0.00108	-6.83079	1.825
0.00119	-6.7338	1.832
0.00126	-6.67664	1.836
0.00139	-6.57845	1.845
0.00151	-6.49565	1.852
0.0016	-6.43775	1.857
0.00166	-6.40094	1.859
0.00172	-6.36543	1.863
0.00181	-6.31443	1.866
0.00185	-6.29257	1.87
0.00202	-6.20466	1.875
0.00215	-6.14229	1.876
0.00231	-6.07051	1.883
0.0024	-6.03229	1.881
0.0027	-5.9145	1.901
0.00247	-6.00354	1.892
0.00286	-5.85693	1.907
0.00296	-5.82257	1.909

0.00342	-5.67811	1.923
0.00397	-5.52899	1.939
0.00399	-5.52396	1.938
0.0057	-5.16729	1.98
0.00584	-5.14302	1.983
0.00601	-5.11433	1.986

El analisis estadistico de la tabla mostrada anteriormente, usando las columnas ln(I) y Voltaje es el siguiente:

Regression Statistics	
Multiple R	0.993233254
R Square	0.986512297
Adjusted R Square	0.985993539
Standard Error	0.006182345
Observations	28

	Coefficients	*Standard Error*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	2.42441	0.01256	2.39859	2.45022
X Variable 1	0.08792	0.00202	0.08378	0.09207

De donde vemos que nuestros valores buscados son:

$$V_0 = 2.42441 \pm 0.01256$$

$$V_1 = 0.08792 \pm 0.00202$$

De manera que nuestro intervalo del 95% de confianza para V_0 y para V_1 viene dado por:

$$2.39859 \leq V_0 \leq 2.45022$$

$$0.08378 \leq V_1 \leq 0.09207$$

B. 1	Construya una tabla que muestre la corriente que circula por el LED vs. la resistencia medida por la fotorresistencia. Tome un número de mediciones apropiada para análisis estadístico.	**1.0 pt**

I [mA] (Medida)	Resistencia (Medida)
0.00020	103000.0
0.00023	101900.0
0.00025	101000.0
0.00030	99000.0
0.00032	98100.0
0.00035	96700.0
0.00041	94800.0
0.00044	93900.0
0.00053	91300.0
0.00064	89600.0
0.00071	87500.0
0.00076	84700.0
0.00083	84200.0
0.00102	80000.0

B. 2	Construya una tabla que muestre el valor medido de la corriente que circula por el LED, el voltaje calculado en los extremos del LED, la potencia que el LED emite para esa corriente dada y el valor medido de la resistencia a los extremos de la fotorresistencia.	**2.0 pt**

I [mA] (Medida)	Voltaje [V] (Calculada)	Potencia [mW] (Calculada)	Resistencia (Medida)
0.00020	1.76741	0.00036	103000.0

0.00023	1.77776	0.00040	101900.0
0.00025	1.78561	0.00044	101000.0
0.00030	1.80219	0.00054	99000.0
0.00032	1.80821	0.00058	98100.0
0.00035	1.81616	0.00064	96700.0
0.00041	1.82911	0.00074	94800.0
0.00044	1.83726	0.00082	93900.0
0.00053	1.85246	0.00098	91300.0
0.00064	1.86942	0.00119	89600.0
0.00071	1.87865	0.00133	87500.0
0.00076	1.88506	0.00143	84700.0
0.00083	1.89265	0.00157	84200.0
0.00102	1.91104	0.00195	80000.0

B. 3	Utilizando los datos de la tabla B.2, encuentre la relación entre la potencia del LED y la resistencia de la fotorresistencia.	**2.0 pt**

LED Rojo				
I [mA]	**Voltaje [V]**	**Potencia [mW]**	**Resistencia**	**1/R**
(Medida)	**(Calculada)**	**(Calculada)**	**(Medida)**	
0.00020	1.76741	0.00036	103000.0	9.709E-06
0.00023	1.77776	0.00040	101900.0	9.814E-06
0.00025	1.78561	0.00044	101000.0	9.901E-06
0.00030	1.80219	0.00054	99000.0	1.010E-05
0.00032	1.80821	0.00058	98100.0	1.019E-05
0.00035	1.81616	0.00064	96700.0	1.034E-05
0.00041	1.82911	0.00074	94800.0	1.055E-05
0.00044	1.83726	0.00082	93900.0	1.065E-05
0.00053	1.85246	0.00098	91300.0	1.095E-05
0.00064	1.86942	0.00119	89600.0	1.116E-05

0.00071	1.87865	0.00133	87500.0	1.143E-05
0.00076	1.88506	0.00143	84700.0	1.181E-05
0.00083	1.89265	0.00157	84200.0	1.188E-05
0.00102	1.91104	0.00195	80000.0	1.250E-05

A partir de esta tabla tenemos que encontrar el análisis estadístico para las columnas de potencia vs. 1/R:

Regression Statistics	
Multiple R	0.996433
R Square	0.992879
Adjusted R Square	0.992286
Standard Error	7.6E-08
Observations	14

	Coefficients	*Standard Error*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	9.17E-06	4.43E-08	9.08E-06	9.27E-06
X Variable 1	0.001741	4.26E-05	0.001648	0.001834

De donde vemos que la relación entre la Potencia del LED cumple una relación directa con $1/R$ (es decir una relación inversa con R). Nuestros coeficientes de regresión entonces son:

$$\frac{1}{R} = C_1 * I + C_0$$

Con valores $C_1 = 0.00171$ y $C_0 = 9.17 \times 10^{-6}$. Dichos coeficientes calculados tienen el siguiente intervalo de 95% de confianza:

$$0.001648 \leq C_1 \leq 0.001834$$

$$9.08 \times 10^{-6} \leq C_0 \leq 9.27 \times 10^{-6}$$

Con un valor de $R^2 = 0.992879$ vemos un fit apropiado para la cantidad de datos.

Problema 1.
Conductividad térmica en un gas (10 puntos)

La conducción térmica se define como la transferencia de energía interna entre dos puntos de un gas cuando hay una diferencia de temperatura ΔT. Si consideramos la corriente calorífica $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, como cantidad de calor transferido por un intervalo de tiempo Δt en una sola dirección, esta queda definida como:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = H = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Donde κ es una constante conocida como coeficiente de conductividad térmica, y A es el área transversal a la dirección en la que se da el flujo de calor.

El camino libre medio λ es la distancia media que recorre una molécula antes de colisionar con otra.

En este problema trataremos un modelo simplificado para encontrar la conductividad térmica de un gas. Para esto asumiremos moléculas esféricas de radio r, que se mueven en una sola dirección con velocidad media, v, y sea n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen.

A. Demuestre que el camino libre medio modelando un área efectiva para la colisión viene dado por **2.5 pt**

$$\lambda = \frac{1}{4\,\pi r^2 n_0}$$

La cual indicará la máxima área para que la molécula pueda colisionar.

Ayuda: Encuentre el número de moléculas con las que choca una de estas al viajar un tiempo.

La teoría cinética de los gases predice que la energía interna de un gas monoatómico está dada por:

$$E_c = Nc_vT = \frac{3}{2}Nk_BT$$

donde N es el número de partículas (moléculas), c_v es el calor específico a volumen constante del gas, k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura del gas.

B.	¿Cuál debe ser el incremento de energía que se le da a cada molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K?	**1.0 pt**

C.	Calcule la cantidad de energía media ganada o liberada por una molécula entre dos choques consecutivos si se encuentra en un gradiente de temperatura $\Delta T/\Delta x$ en la dirección x.	**1.5 pt**

D.	Dé una expresión para la transferencia de energía por unidad de tiempo y área teniendo en cuenta el resultado anterior y sabiendo que hay n_0 partículas por unidad de volumen con velocidad media v.	**1.5 pt**

La teoría cinética de los gases también predice que la velocidad media de las partículas en un gas es:

$$v = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi M}}$$

E.	Con ayuda de los resultados anteriores encuentre una expresión para la conductividad térmica del gas en función de la temperatura del gas.	**2.0 pt**

En un experimento de medición de la conductividad térmica de argón (se comporta como un gas ideal) se obtuvieron las siguientes curvas:

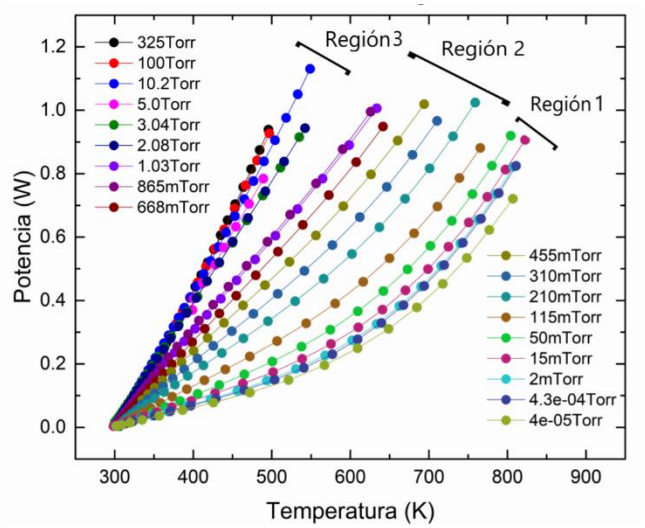


Figura 1. Curvas de potencia vs temperatura a presión constante.

En la Fig.1 se identifican tres regiones debido a diferentes comportamientos:

a. Cuando el camino libre medio es del orden de las dimensiones del contenedor ($\lambda \sim L$) la conductividad térmica deja de ser dependiente de λ debido a los choques con las paredes. Este hecho es la base sobre la cual se basa el funcionamiento de los manómetros de Pirani, ya que permiten relacionar la presión con la conductividad térmica del gas sometido a un flujo de calor constante.
b. Cuando el camino libre medio es mucho menor que las dimensiones del contenedor ($\lambda \ll L$) la conductividad térmica es predicha por las relaciones encontradas anteriormente.
c. Al ser el camino libre medio mucho mayor a las dimensiones del contenedor ($\lambda \gg L$) la conductividad térmica deja de ser dependiente del camino libre medio y además procesos transferencia de calor por radiación tienen mayor relevancia.

F.	Asocie cada una de estas regiones de la figura con estos comportamientos.	**1.5 pt**

Problema 1. Conductividad térmica en un gas (10 puntos)

A. Demuestre que el camino libre medio modelando un área efectiva para la colisión viene dado por **2.5 pt**

$$\lambda = \frac{1}{4\,\pi r^2 n_0}$$

La cual indicará la máxima área para que la molécula pueda colisionar.

El área efectiva debe tener radio igual al diámetro de la molécula porque si las moléculas están más separadas que esta distancia, entonces no se tocarán. La distancia recorrida en un tiempo t, es vt, este arreglo forma un cilindro de radio $2r$ y altura vt.

El número de moléculas que hay en este cilindro es: $N = vt(4\pi r^2)n_0$

Por cada una de estas moléculas habrá una colisión, entonces el tendremos N colisiones mientras la molécula recorre una distancia t. Por tanto, el camino libre medio es la razón entre la distancia recorrida entre el número de colisiones que se dieron en esa distancia:

$$\lambda = \frac{vt}{vt(4\pi r^2)n_v} = \frac{1}{(4\pi r^2)n_0}$$

B. ¿Cuál debe ser el incremento de energía que se le da a cada molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K? **1.0 pt**

El incremento de energía por molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K es

$$\frac{3}{2}K_B = c_v.$$

C. Calcule la cantidad de energía media ganada o liberada por una molécula entre dos choques consecutivos si se encuentra en un gradiente de temperatura $\Delta T/\Delta x$ en la dirección x. **1.5 pt**

Sabiendo que la distancia media entre choques es el camino libre medio, la diferencia de energía por partícula es

$$\Delta E = c_v\,\Delta T' = c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\lambda$$

D.	Dé una expresión para la transferencia de energía por unidad de tiempo y área teniendo en cuenta el resultado anterior y sabiendo que hay n_0 partículas por unidad de volumen con velocidad media v.	**1.5 pt**

La cantidad de partículas en un volumen $Av\Delta t$ es $\Delta N = n_0 Av\Delta t$

$$\frac{J}{A} = -\Delta E \frac{1}{A}\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\Delta E\, n_0 v = -c_v n_0\, v\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

E.	Con ayuda de los resultados anteriores encuentre una expresión para la conductividad térmica del gas en función de la temperatura del gas.	**2.0 pt**

$$\kappa = c_v n_0\, v\lambda = \frac{K_B}{\pi r^2}\sqrt{\frac{K_B T}{8\pi M}}$$

F.	Asocie cada una de estas regiones de la figura con estos comportamientos.	**1.5 pt**

De la expresión del camino libre medio se puede ver que a menor presión el camino libre medio aumenta. Región 1 → C

Cuando el camino libre medio es mucho menor que las dimensiones la conductividad térmica no depende de la presión, lo que se puede ver en la acumulación de curvas para diferentes presiones. Región 3 → B

Y cuando es del orden la conductividad térmica depende de la presión y por tanto a diferentes presiones se obtendrían diferentes curvas. Región 2 → A

Problema 2.
Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

En 1897, el físico irlandés Joseph Larmor escribió un artículo donde describía la radiación debida a iones con movimiento acelerado. A pesar de que al momento de su publicación la física de partículas todavía se encontraba en sus inicios, la fórmula de Larmor ha servido para estudiar diferentes modelos. La manera convencional de escribir la potencia total radiada debida a una carga eléctrica puntual acelerada viene dada por

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

donde q es la carga eléctrica, a es su aceleración, c es la velocidad de la luz en el vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. Esta expresión es también conocida como Fórmula de Larmor no relativista.

En este ejercicio estudiaremos la potencia de radiación emitida en diferentes modelos: electrón como partícula uniformemente acelerada, electrón como oscilador armónico simple y el átomo de hidrógeno. En todos estos modelos solamente serán consideradas pérdidas de energía por radiación.

Parte A. Electrón como partícula uniformemente acelerada

Considere un electrón de masa m que desacelera a ritmo constante a desde una velocidad inicial v_0 hasta el reposo ($v = 0$). Responda las siguientes preguntas asumiendo que $v_0 \ll c$ por lo que la fórmula de Larmor puede ser utilizada.

A. 1	Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema).	**1.0 pt**

A. 2	Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15\text{Å}$.	**1.0 pt**

A. 3	Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro.	**1.0 pt**

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

Considere ahora que el electrón describe un movimiento armónico simple. Asuma que la fórmula de Larmor no relativista todavía es válida.

B. 1	Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación).	**1.0 pt**

Sugerencia:

El promedio de la función $sin^2\theta(t)$ sobre un periodo T es igual a $\frac{1}{2}$ donde $\theta(t)$ es una función que depende del tiempo.

Si en el instante $t = 0$, el electrón inicia su movimiento con una velocidad que varía de acuerdo a la siguiente expresión $v = (4.030 \times 10^4)\cos[2\pi(6.414 \times 10^{13})t]\, m/s$.

B. 2	Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio?	**1.0 pt**

Parte C. Átomo de hidrógeno

En el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, un electrón no relativista, de masa m, describe un órbita alrededor de un protón con momento angular $L = \hbar$ (estado fundamental).

C.1	Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental.	**2.0 pt**

C.2	Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a	**0.5 pt**

	$\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina.

Admitiendo que en un modelo clásico del átomo de hidrogeno ocurre radiación (No hay estados estacionarios). responda los siguientes apartados.

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Constantes

Masa del electrón: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

Carga del electrón: $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Permeabilidad magnética en el vacío: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3.0 \times 10^{8} m/s$

Constante de Planck: $h = 6.62 \times 10^{-34} J \cdot s$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Permitividad en el vacío: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$

$$1\text{Å} = 10^{-10} m$$

Problema 2.
Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

A. 1 Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema). **1.0 pt**

Inicialmente el electrón posee únicamente energía cinética, utilizando el concepto de potencia podemos determinar la energía emitida.

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\Delta U = P \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{P \cdot \Delta t}{\frac{1}{2} m v_0^2}$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \Delta t$$

Aplicando cinemática tradicional determinamos el tiempo t necesario para que el electrón alcance una velocidad igual a cero.

$$v = v_0 - a\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{-v_0}{-a} = \frac{v_0}{|a|}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \frac{v_0}{|a|} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

A. 2 Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15\text{Å}$. **1.0 pt**

Nuevamente con cinemática tradicional encontramos el valor de la aceleración

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$d = v_0\left(\frac{v_0}{|a|}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{|a|}\right)^2$$

$$d = \frac{v_0^2}{|a|} - \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{v_0^2}{2|a|}$$

$$|a| = \frac{v_0^2}{2d}$$

Con los valores proporcionados encontramos el resultado numérico utilizando la expresión del literal A.1)

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 v_0}{6\pi m c d}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 e^2 (5\times10^4 m/s)}{6\pi m c (15\times10^{-10} m)} = 2.1\times10^{-10}$$

A. 3 Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro. **1.0 pt**

Utilizando lo aprendido en los literales previos, la situación cambia de movimiento horizontal a movimiento vertical con aceleración igual a g y $v_0 = 0$. La energía inicial será igual a la energía potencial gravitatoria mgh

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\Delta t$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2(9.80 m/s^2)}{1.00\times10^{-2} m}} = 2.80\times10^{-22}$$

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

B. 1 Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación). **1.0 pt**

Ahora el movimiento del electrón se ha modelado como armónico simple. Recordando la expresión de la posición y la aceleración

$$x = x_0 sin(\omega t)$$
$$a = -x_0 \omega^2 sin(\omega t)$$

Reemplazando en la fórmula de Larmor

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{6\pi c} sin^2(\omega t)$$

Para encontrar la potencia irradiada promedio necesitaremos utilizar la expresión anterior. Si el estudiante hace un análisis de que la función $P(t)$ depende únicamente del promedio de la función seno y utiliza la sugerencia puede reescribir la expresión como

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi c}$$

B. 2 Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio? **1.0 pt**

La expresión de la velocidad en el movimiento armónico simple es igual a

$$v = \omega x_0 cos(\omega t)$$

Por lo que la expresión del literal corresponde a

$$\omega x_0 = 4.030 \times 10^4 m/s$$
$$\omega = 2\pi(6.414 \times 10^{13}) Hz$$
$$\omega = 4.030 \times 10^{14} Hz$$
$$x_0 = 10^{-10} m$$
$$P = \frac{\mu_0 e^2}{12\pi c}(4.030 \times 10^{14})^4 (10^{-10})^2 = 2.394 \times 10^{-16} W$$

Parte C. Átomo de hidrógeno

C.1 Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental. **2.0 pt**

El electrón, en el modelo del átomo de Bohr, describe una órbita circular, planteando la segunda ley de Newton

$$F = \frac{ke^2}{r_0^2} = ma$$

$$\frac{ke^2}{r_0^2} = \frac{mv^2}{r_0}$$

$\frac{ke^2}{r_0} = mv^2$ este resultado indica que $U = 2T$

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr_0}$$

Utilizando la expresión del momento angular y despejando el radio de Bohr

$$\hbar = mvr_0$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_0}$$

Combinando ambas expresiones para la velocidad, el radio de Bohr es igual al

$$r_0 = \frac{\hbar}{mke^2}$$

La expresión de la energía total se describe como

$$E = T - U = \frac{U}{2} - U$$

$$E = -\frac{U}{2} = -\frac{ke^2}{2r_0}$$

C.2 Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a $\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina. **0.5 pt**

$$\frac{r_0}{\lambda_c} = \frac{\frac{\hbar^2}{mke^2}}{\frac{\hbar}{mc}} = \frac{\hbar c}{ke^2} = 136.97 \approx 137$$

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

Escribiendo primero la velocidad en función de α, obtenemos la siguiente expresión

$$\alpha = \frac{\hbar}{r_0 mc}$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_0} = \frac{\hbar}{mr_0}\frac{c}{c} = \alpha c$$

La potencia total irradiada viene dada por la fórmula de Larmor y la expresión de la aceleración centrípeta

$$P = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\frac{v^4}{r_0^2}$$

$$P = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}$$

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Encontrando primero la energía radiada por revolución

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = P \cdot T = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}\frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^3 c^2}{3 r_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\mu_0 c^2}{3k}\alpha^3 \approx 3.26 \times 10^{-6}$$

Problema 3.
Vasos comunicantes (10 puntos)

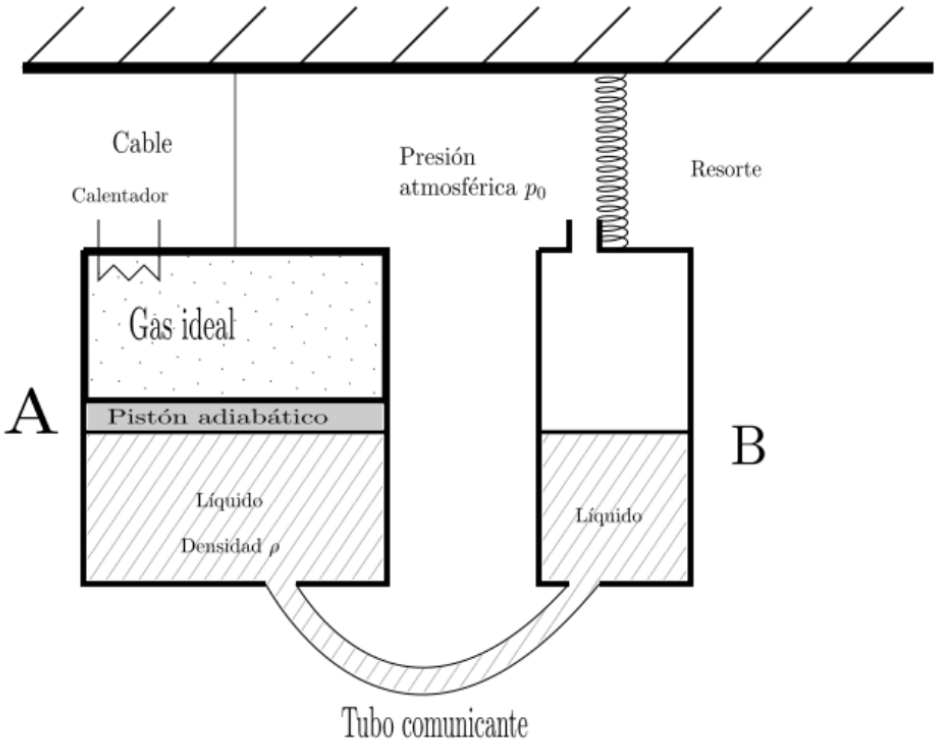


Figura 1. Sistema de vasos comunicados por un tubo delgado.

Se tiene un contenedor A de sección transversal S y un contenedor B de sección transversal $\frac{1}{2}S$, ambos colgados al techo de un laboratorio. El fondo de ambos contenedores está conectado por un tubo delgado y de fricción despreciable, como se muestra en la Figura 1.

El contenedor A está dividido en 2 secciones por un pistón de masa despreciable que puede moverse libremente. La sección del contendor A sobre el pistón está llena de un gas ideal. La sección bajo el pistón en A, el delgado tubo que une a los contenedores, y la parte inferior del contenedor B están llenas de un líquido de densidad ρ. La masa del líquido contenido en el tubo delgado se considera despreciable. A través de un calentador, se puede calentar

el gas ideal en el contenedor A. El tope del contenedor B tiene un pequeño orificio por lo que su parte superior está llena de gas a presión atmosférica p_0. El contenedor A está colgado al techo mediante un cable inextensible y de masa despreciable y, el contenedor B está colgado mediante un resorte de masa despreciable. La aceleración de la gravedad en el sistema es g.

La condición inicial es que la longitud del cable del que se ha suspendido el contenedor A se ajusta de tal forma que los niveles de líquido en ambos contenedores estén a la misma altura. El volumen del gas ideal en esta condición inicial es V_0.

Para este problema, haga las siguientes consideraciones:

- Usando la constante de gases ideales R, el calor específico molar a volumen constante c_v y el calor específico molar a presión constante c_p están dados por: $c_v = \frac{3}{2}R$ y $c_p = \frac{5}{2}R$, respectivamente.
- El líquido puede desplazarse entre los contenedores A y B.
- Aunque el resorte se estire, se asume siempre un equilibrio de fuerzas.
- El tubo delgado que une a los contenedores no se obstruye o bloquea debido al movimiento del contenedor B.

Se calienta el gas ideal de modo que se expande cuasiestáticamente desde la condición inicial hasta que su volumen haya aumentado en ΔV. La constante del resorte usado en este caso es k.

A.	Demuestre que la nueva presión del gas ideal es $p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$	**3.0 pt**

Usando un nuevo resorte de constante k_{ii} se repite el procedimiento del inciso anterior con la diferencia de que la presión del gas en A permanece constante.

B.	Determine esta nueva constante del resorte, k_{ii}, en términos de S, g, y ρ.	**2.0 pt**
C.	Además, determine el calor Q_{ii} que le fue suministrado al gas durante este proceso.	**1.5 pt**

Para cierta constante del resorte, si se repite el proceso de los dos incisos anteriores, existe el caso en que la temperatura del gas baja. Usando ese resorte, se aumenta el volumen del gas en $\Delta V = \frac{1}{4}V_0$, y se observa que su temperatura final es $\frac{15}{16}$ de la temperatura inicial.

D.	Realice una gráfica $p - V$ de este proceso y determine el calor neto en este proceso, Q_{iii}, en términos de V_0 y p_0.	**3.5 pt**

Problema 3. Vasos comunicantes (10 puntos)

A. Demuestre que la nueva presión del gas ideal es **3.0 pt**

$$p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$$

Un cambio de volumen $\Delta V > 0$ en el gas supone un cambio de altura hacia arriba $2\Delta V/S$ en el recipiente B y $\Delta V/S$ hacia abajo en el recipiente A. Como las presiones deben ser iguales en 2 puntos del líquido a la misma altura, se obtiene

$$p' = p_0 + \rho\left(\frac{2\Delta V}{S} + \frac{\Delta V}{S}\right)g = p_0 + \frac{3\rho g}{S}\,\Delta V$$

Sin embargo, un aumento de líquido ΔV en B supone un aumento de masa $\rho\Delta V$, por lo que el resorte se estirará $\frac{\rho\Delta V g}{k}$. Tomando esto en consideración, se obtiene la respuesta

$$p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$$

B. Determine esta nueva constante del resorte, k_{ii}, en términos de S, g, y ρ. **2.0 pt**

Como la presión inicial y final del gas son iguales, usando la respuesta del inciso anterior se obtiene

$$p_0 = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k_{ii}}\right)\Delta V$$

$$k_{ii} = \frac{\rho S g}{3}$$

C. Además, determine el calor Q_{ii} que le fue suministrado al gas durante este proceso. **1.5 pt**

El calor suministrado al gas viene dado por

$$Q_{ii} = c_p nR\Delta T = \frac{5}{2}p_0\Delta V$$

D. Realice una gráfica $p - V$ de este proceso y determine el calor neto en este proceso, Q_{iii}, en términos de V_0 y p_0. **3.5 pt**

Sea p la presión del gas cuando su volumen es V, para ver más claramente la relación entre la presión y el volumen del gas en este proceso, reescribimos el resultado del inciso (B) como

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)(V - V_0)$$

Se puede ver claramente que la presión y el volumen guardan una relación lineal en este proceso, por lo tanto el diagrama pV es como en la Figura 1.

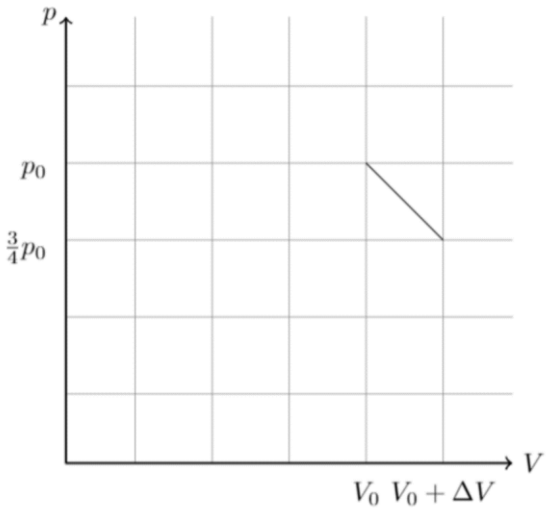


Figura 1. Grafica p-V

Ahora, usando la ley de Boyle-Charles, se puede determinar la presión p_f del gas al finalizar el proceso:

$$\frac{p_0 V_o}{T_0} = \frac{p_f\left(\frac{5}{4}V_0\right)}{\frac{15}{16}T_0} \quad \therefore \; p_f = \frac{3}{4}p_0$$

El cambio de energía interna ΔU del gas durante este proceso es

$$\Delta U = nc_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\left(\frac{15}{16}T_0 - T_0\right) = -\frac{3}{32}nRT_0 = -\frac{3}{32}p_0V_0$$

El trabajo hecho por el gas durante este proceso puede ser determinado encontrando el área bajo la curva del diagrama pV, o sea

$$W = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{3}{4}p_0\right)\left(\frac{1}{4}V_0\right) = \frac{7}{32}p_0V_0$$

Finalmente, usando la primera ley de la termodinámica, se encuentra la cantidad de calor suministrada al gas durante el proceso

$$Q_{ii} = \Delta U + W = -\frac{3}{32}p_0V_0 + \frac{7}{32}p_0V_0 = \frac{1}{8}p_0V_0$$

GOBIERNO DE EL SALVADOR
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Olimpiada Iberoamericana de Física

OIbF virtual 2020

Prueba teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

Problema 1. Un modelo de catapulta

Un modelo simple de catapulta consiste en una palanca, puede verse en naranja en la figura 1. Esta palanca es una varilla rígida homogénea de masa M y de longitud $L+l$, que gira alrededor del punto de pivote O (ver figura 1 y 2), de tal forma que uno de sus extremos está a una distancia L del punto O (este último ubicado a una altura h respecto al suelo), y el otro a l del mismo, con $L > l$.

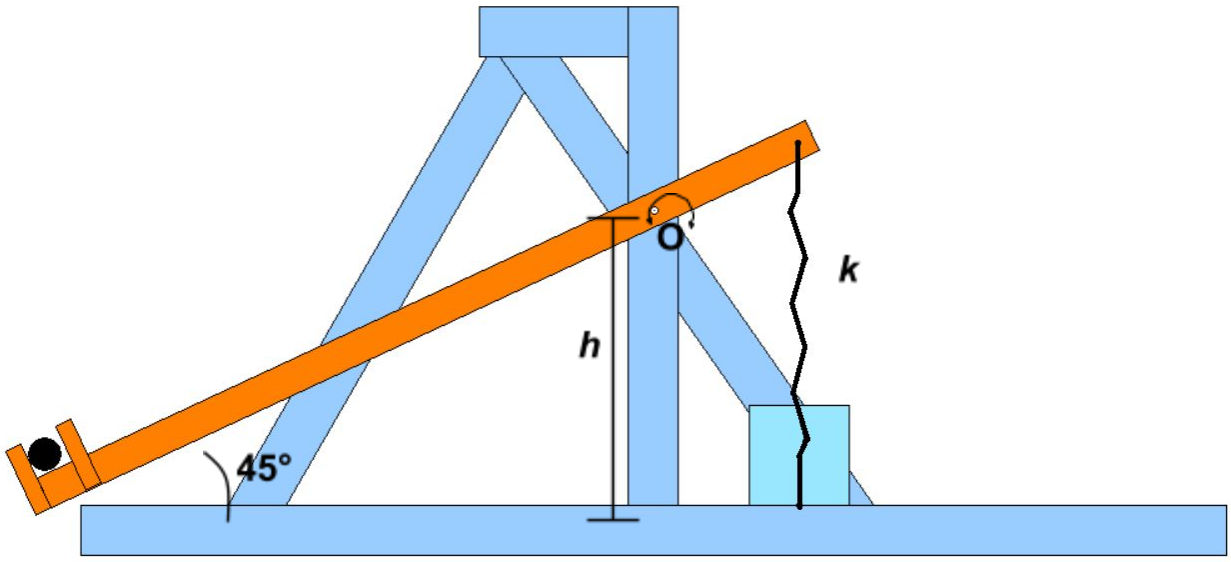


Figura 1.

Las dimensiones de la palanca son tales que cuando el extremo del brazo mayor alcanza el suelo, esta forma un ángulo de $45°$ con la horizontal. En el brazo mayor se coloca el proyectil de masa m a lanzar, para el desarrollo de este problema considérese un objeto puntual. Además, el extremo del brazo menor está unido a un resorte de longitud natural l_0 ($l_0 < l$) y constante elástica k (cuando el brazo mayor alcanza el suelo, como en la figura 1, el resorte se encuentra elongado y en posición vertical).

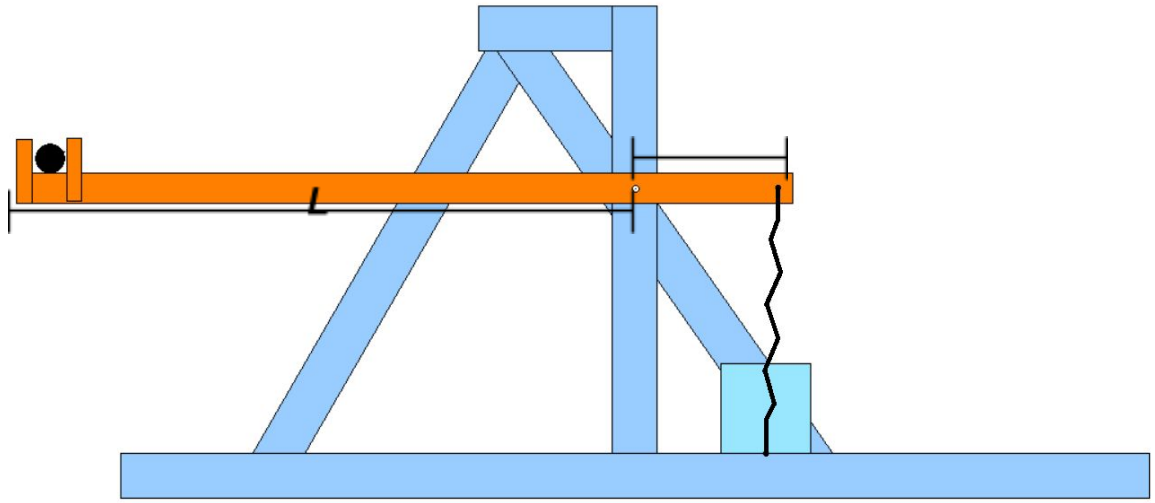


Figura 2.

Además, para el funcionamiento de este modelo, se utiliza un obstáculo que frena el giro de la palanca cuando ésta forma un ángulo de $45°$ con la vertical (ver figura 3). A partir de ese instante el proyectil es lanzado al aire. Para el análisis del funcionamiento de este modelo, se considera que no hay fricción en el eje de la palanca, así como también se desprecia el rozamiento con el aire.

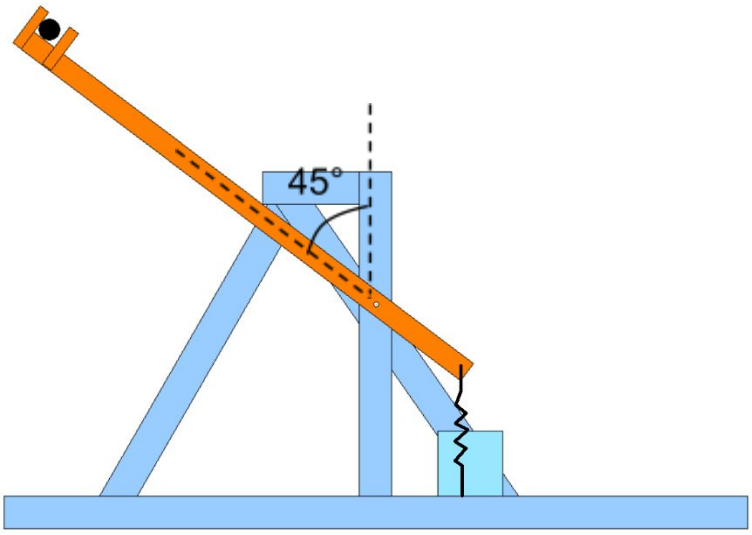


Figura 3.

La posición del extremo inferior del resorte se puede fijar a diferentes alturas ***h'*** para poder ajustar el lanzamiento hacia un objetivo (ver figura 4).

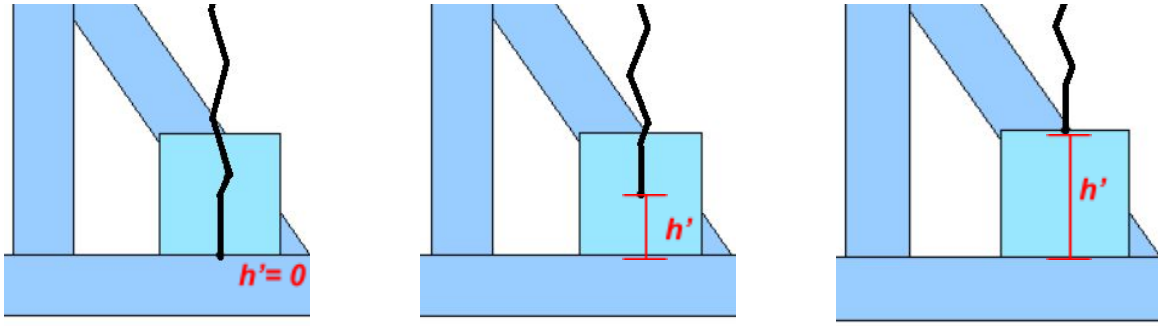


Figura 4. Se muestran diferentes alturas de ajuste de la altura *h'* del extremo inferior del resorte.

De los literales del a) al e) dejar expresado $sen\ 45°$ y $cos\ 45°$ como tal, si los necesita; NO sustituya por su valor numérico.

a. Encuentre una expresión para el momento de inercia I de la palanca en el eje perpendicular a ella y que pasa por O, en función de sus dimensiones y masa. Para ello suponga que las piezas que evitan que el proyectil salga eyectado antes de llegar a la posición final, son de masa despreciable. **[1 punto]**

   Ayuda: El momento de inercia para una varilla girando alrededor de eje perpendicular a ella que pasa en por su centro de masa es:

   $$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$, donde L es la longitud total de la varilla

Para los siguientes literales, si involucran el momento de inercia, dejarlo expresado como I.

Cuando la catapulta se carga con un proyectil de masa m, y ésta se pone en funcionamiento, ajustando el extremo bajo del resorte a una altura h' del suelo:

b. Determinar la expresión para el cambio de energía potencial, en función de las masas m y M, de la altura h, la longitud del brazo menor de la palanca, la constante elástica k y longitud natural l_0 del resorte, así como también de la altura h' a la cual se ajusta el resorte. **[2.5 puntos]**

c. Determine la magnitud de la velocidad de salida del proyectil. **[2.5 puntos]**

d. Según las expresiones anteriores, ¿cuál es la expresión para la altura máxima $h'_{máx}$ a la que se ajusta el resorte a partir de la cual dicho proyectil podrá salir disparado? **[2 puntos]**

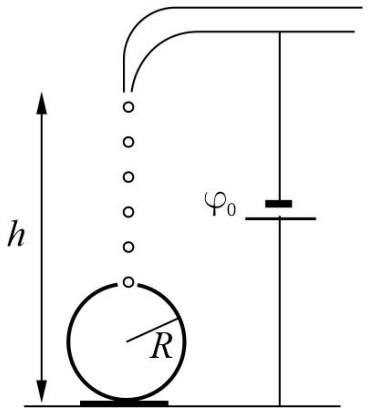
e. Si se desea impactar a un punto que está a una altura $2h$ respecto al suelo. Escriba la expresión para la distancia horizontal de dicho proyectil hasta que encuentra el objetivo, utilizando la expresión encontrada en c. **[2 puntos]**

Problema 2. Gotas eléctricas.

1.- Un sistema deja caer continuamente gotas esféricas de un líquido, idénticas de radio *r* y potencial eléctrico φ_0 dentro de una esfera hueca metálica previamente descargada de paredes delgadas y radio *R*. Las gotas se liberan desde una altura *h* medida desde el piso tal que $h > 2R$. La esfera está aislada eléctricamente del piso. Considere las gotas conductoras. Se desprecia la resistencia del aire. Considere que la distribución de la carga en la esfera de radio *R* permanece uniforme y desprecie los efectos del agujero.

a) Halle el potencial eléctrico máximo que puede alcanzar la esfera. Considere dos posibilidades: que la esfera se llene completamente, o que no alcance a llenarse. **[7 puntos]**
b) Para los datos siguientes determine el potencial eléctrico que alcanza la esfera de radio *R*: el líquido es agua, $r = 0{,}50$ mm, $\varphi_0 = 150\ V$, $R = 5{,}0$ cm y $h = 25{,}0$ cm. **[2 puntos]**
c) Para el resultado del literal b) determine si hay ruptura del dieléctrico aire, la cual ocurre cuando el campo eléctrico alcanza el valor 3,00 kV/mm. **[1 punto]**

La constante dieléctrica del vacío es $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m$, la densidad del agua $\rho = 1,00 \times 10^3 kg/m^3$, y la aceleración gravitatoria $g = 9,81\ m/s^2$.



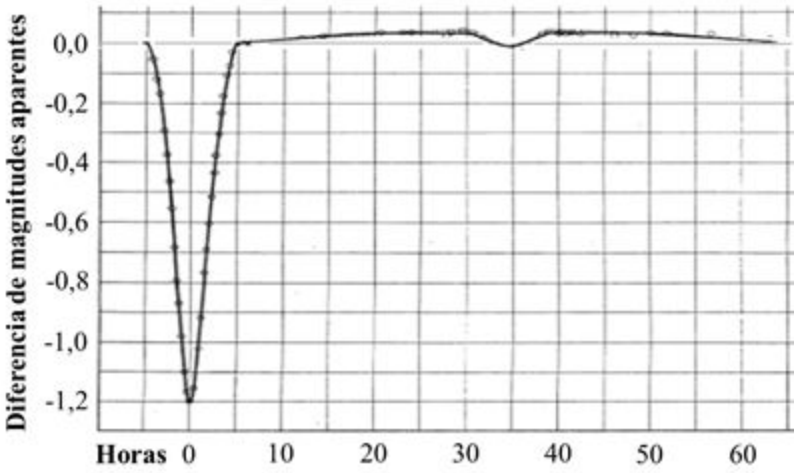
Problema 3. El brillo de las estrellas: fotometría fotoeléctrica.

Uno de los problemas más importantes en astronomía es la medida del brillo de los astros. De ello se encarga la fotometría. Durante mucho tiempo la fotometría fue muy imprecisa, pues se hacía mediante estimaciones visuales o por medios fotográficos. Pero a principios del siglo XX el astrónomo Joel Stebbins, en el Observatorio de la Universidad de Illinois, con la colaboración del físico Jakob Kunz, empezó a utilizar células fotoeléctricas en los detectores de los telescopios. Así empezó la era de la fotometría fotoeléctrica, que se convirtió en la técnica estándar hasta la llegada de las modernas cámaras CCD.

En este problema vamos a considerar el montaje básico de Stebbins y Kunz para estudiar las *estrellas de brillo variable*. Se utiliza un telescopio refractor cuyo objetivo tiene **31 cm** de diámetro y una distancia focal de **4,57 m**. El fotómetro consiste en una celda fotoeléctrica cuyo cátodo metálico produce una corriente de electrones cuando es iluminado. El cátodo es de rubidio, cuya función de trabajo es **2,261 eV**. El fotómetro se acopla al telescopio de forma que el cátodo queda situado en el plano focal del objetivo. La corriente eléctrica se mide mediante la deflexión de la aguja de un electrómetro.

Algol (o Beta Persei), en la constelación de Perseo a **90 años luz** de la Tierra, es una de las primeras estrellas variables conocidas. En realidad, es un sistema de tres estrellas A, B y C muy juntas. Algol A y Algol B orbitan una en torno a la otra formando lo que se llama una *estrella binaria eclipsante*. Como la Tierra se halla en su plano orbital, Algol B (la más débil, pero la más grande) eclipsa a Algol A (más brillante y más pequeña) al pasar por delante cada período orbital. En consecuencia, la cantidad de luz que llega a la Tierra decrece temporalmente. La gráfica muestra la *curva de luz* que midió Stebbins.





En astronomía la *luminosidad*, *L*, es la potencia emitida por una estrella en todas direcciones. El *brillo*, *B*, es la potencia por unidad de área que llega a la Tierra. La *curva de luz* es la diferencia $m_1 - m_2 = 2,5 \cdot log_{10}(B_2/B_1)$ en función del tiempo, donde B_1 es el brillo máximo de Algol y B_2 es el brillo en cualquier otro momento; m_1 y m_2 se llaman *magnitudes aparentes*.

DATOS

Constante de Wien = 2897,6 μm · K
Constante de Planck = $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s
Carga del electrón = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Velocidad de la luz = $3 \cdot 10^{8}$ m/s^2
Luminosidad del Sol = $3{,}828 \cdot 10^{26}$ W

Estrella	Temperatura (K)	Luminosidad (*)	Radio (*)
Algol A	13000	182	2,7
Algol B	4500	6,9	3,5
Algol C	7500	10	1,7

* En unidades solares

SE PIDE CALCULAR:

a) El brillo máximo de Algol, teniendo en cuenta las tres estrellas. Desprecie la absorción atmosférica. **[1,5 puntos]**

b) El período orbital de la estrella binaria eclipsante, a partir de la curva de luz. **[1 punto]**

c) La longitud de onda del pico de emisión de Algol A y Algol B. **[1 punto]**

d) La frecuencia mínima de la luz, y su longitud de onda, que puede producir efecto fotoeléctrico en el cátodo. **[1 punto]**

En los siguientes apartados utilice una longitud de onda media de 400 nm para el espectro de Algol.

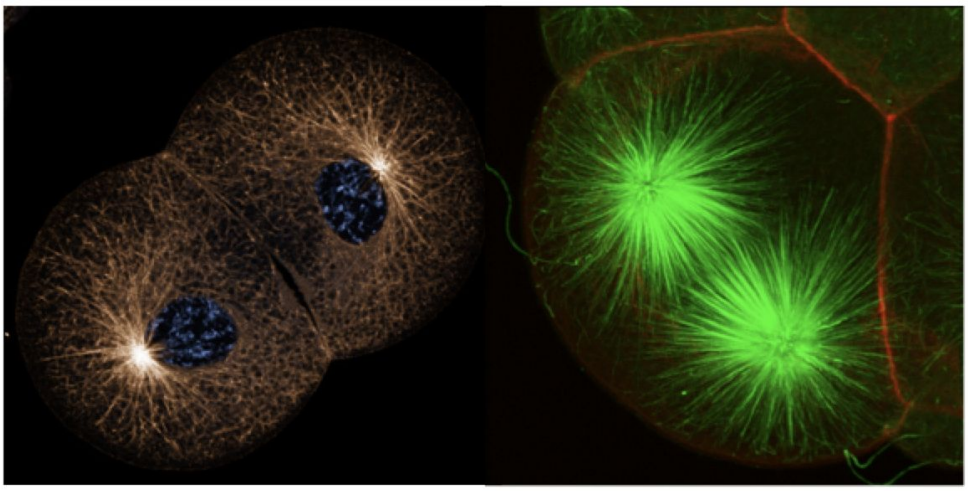
e) El diámetro de la imagen de Algol sobre el cátodo. Suponga que Algol es un objeto puntual y que su imagen está limitada únicamente por la difracción. **[1,5 puntos]**

f) La corriente eléctrica que mide el electrómetro, sabiendo que: la luz útil es el 10% del total, los electrones se arrancan del metal con una eficiencia del 2% y todos los electrones que salen del cátodo llegan al ánodo. **[2,5 puntos]**

g) En qué factor se reduce la corriente eléctrica cuando Algol B eclipsa a Algol A. **[1,5 puntos]**

Problema 4. Dinámica de Microtúbulos.

Los microtúbulos son filamentos que dan rigidez a las células del cuerpo humano. Estos filamentos comienzan radialmente en una región cercana al núcleo celular y se extienden hacia la membrana celular (ver figura).



En esta pregunta implementaremos una versión simplificada de la dinámica de los microtúbulos para describir el trabajo que realizan en una membrana. La variación en la longitud de un microtúbulo ocurre al agregar o sustraer moléculas de una proteína llamada tubulina a un extremo del filamento (el otro extremo está anclado cerca del núcleo). Estas moléculas de tubulina se pueden encontrar en dos formas diferentes, que llamaremos A y B. Solo se pueden agregar moléculas de tipo A al filamento en crecimiento. En el filamento pueden cambiar de tipo, y solo cuando tienen el tipo B pueden dejar el filamento. Consideremos que la concentración C_A de moléculas de tipo A en el medio ambiente se mantiene constante. La unidad de concentración usada en este problema es el $\mu M = 10^{-6}$ mol dm^{-3}.

De esta forma, consideraremos que pueden ocurrir tres procesos diferentes, cada uno asociado a una tasa de probabilidad específica.

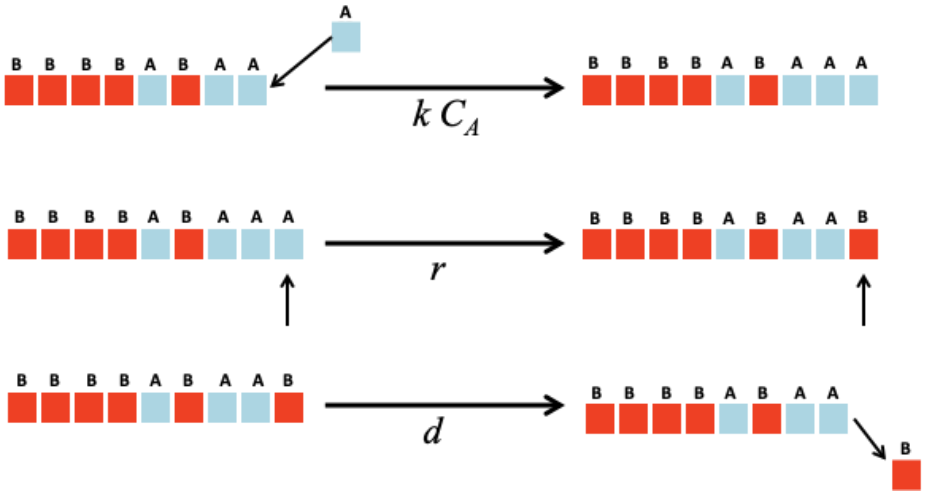
La tasa de probabilidad asociada con cada proceso corresponde a la probabilidad de que el proceso ocurra por unidad de tiempo. Esto implica que si la tasa asociada con un proceso dado es a, entonces el tiempo característico para que suceda ese proceso es $1/a$, y la probabilidad de que el proceso no ocurra durante un período de tiempo t es $P(t) = e^{-at}$.

Los 3 procesos que describen la dinámica de los microtúbulos son los siguientes (ver figura):

1. con tasa de probabilidad dada por $k\,C_A$, con $k = 3,2\ \mu M^{-1}s^{-1}$, se puede agregar una molécula de tubulina tipo A al final del filamento, haciéndolo crecer (proceso de polimerización);
2. con tasa de probabilidad $r = 0,50\ s^{-1}$, una molécula en el microtúbulo puede convertir su tipo de A en B; y

3. si al final del filamento hay una molécula de tipo B, entonces puede salir del microtúbulo con una tasa de probabilidad $d = d_0 = 290\ \text{s}^{-1}$ (proceso de despolimerización)

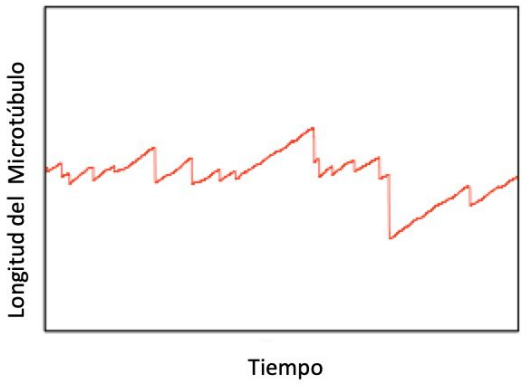
Atención: Los procesos 1 y 3 están asociados con la suma o resta, respectivamente, de una única molécula al filamento. Por otro lado, el proceso 2, con tasa r, puede suceder independientemente en cualquier molécula que esté en el filamento y que sea del tipo A.



También tenga en cuenta que si hay una fuerza que comprime el filamento en la dirección longitudinal, la tasa de probabilidad asociada con el proceso de despolimerización aumenta, tomando el valor de $d = d_0(1 + \alpha F)$, donde F es la fuerza que comprime el microtúbulo y es una constante (este hecho será importante en la segunda parte de este problema).

Debido a estos procesos, la mayoría de las moléculas de tubulina que componen el microtúbulo están en forma B. Sin embargo, suele haber un grupo de moléculas al final del filamento que aún son de tipo A, y que forman un casquete que dificulta la formación de un evento de despolimerización. Puede calcular fácilmente el número medio n de moléculas de tipo A en este límite: teniendo en cuenta que en promedio en todos los intervalos de tiempo $t_1 = 1/kC_A$ una molécula de tipo A es añadida al filamento, obtenemos que durante el tiempo promedio en que una molécula A se convierte en B, $t_2 = 1/r$, se conectarán al filamento $n = t_2/t_1 = kC_A/r$ moléculas de tipo A, que forman la tapa.

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de una simulación de la longitud de un microtúbulo en función del tiempo. Se puede observar que la dinámica del microtúbulo se caracteriza por momentos de crecimiento lento separados por eventos muy rápidos de disminución de su tamaño (que ocurren cuando, debido a una fluctuación probabilística, el microtúbulo pierde la cobertura), donde la longitud disminuye dramáticamente.



Parte I

a) Demuestre que el número característico de moléculas de tipo B que abandonan el filamento durante cada evento de despolimerización es $n_d = d_0 / kC_A$. Justifique. **[1 punto]**

b) Estime la vida útil típica del casquete de las moléculas de tipo A al final del microtúbulo. Note que para perder este casquete ninguna molécula del tipo A se puede añadir al microtúbulo durante el tiempo en que las demás moléculas del casquete se cambian de A a B. **[2 puntos]**

c) En promedio, ¿cuántas moléculas crece el filamento en cada período de crecimiento (es decir, siempre que la fibra no pierda la capa)? Exprese este valor en función del número de moléculas en la tapa $n = kC_A/r$ y derive la relación que la concentración C_A tiene que cumplir de modo que la longitud del filamento sea aproximadamente constante. Con la calculadora, obtenga una aproximación numérica (con dos cifras significativas) para el valor de esta concentración. **[2,5 puntos]**

Parte II

Entonces considere que un conjunto de $N = 100$ microtúbulos están dispuestos radialmente dentro de una membrana esférica permeable delgada con tensión superficial $\gamma = 3 \times 10^{-3}$ N/m. Debido a la tensión superficial, sólo se evita que la membrana colapse si existe una diferencia de presión entre su interior y su exterior dada por la ley de Laplace: $\Delta P = 2\gamma/R$, donde R es el radio de curvatura de la membrana.

d) Calcule la fuerza realizada por cada microtúbulo en una membrana con radio 35 μm. **[2 puntos]**

e) Calcule el valor de α, sabiendo que cuando el valor de C_A es tal que el número de moléculas de tubulina de tipo A en la capa del filamento es $n = 10$, el valor más alto posible para el radio de la membrana es 35 μm. **[2,5 puntos]**

Problema 5. Descarga de una botella. Problema de tratamiento de datos. (Experimental).

Una botella cilíndrica, abierta, contiene un líquido azul que se descarga a través de un tubo horizontal. Para este sistema se prueba que la altura del nivel de líquido (z) con respecto al tubo de salida, sigue la siguiente función del tiempo (t),

$$z(t) = z_0 e^{-t/\tau},$$

donde z_0, es la altura del líquido en $t = 0$, y τ es una constante que depende de los parámetros del sistema,

$$\tau = \frac{32\, L\, D^2\, \eta}{d^4\, \rho\, g},$$

siendo g la aceleración gravitatoria, ρ y η son la densidad y la viscosidad del líquido, respectivamente, L es el largo del tubo, d es su diámetro y D es el diámetro de la botella.

El objetivo de este problema es determinar la viscosidad del líquido a partir de medidas que se deben realizar sobre un video del experimento. Para medir la altura del líquido se debe utilizar una regla sobre la pantalla. No está permitido imprimir.

Además deben considerarse los siguientes datos:

$g = 9,8\ m/s^2$
$\rho = (999 \pm 1)\ kg/m^3$
$L = (11,1 \pm 0,1)\ cm$
$d = (1,8\ \pm 0,1)\ mm$
$D = (8,0 \pm 0,1)\ cm$

El video del experimento para realizar las medidas se puede acceder a través de youtube: https://youtu.be/XFxvM9wm8DQ, o descargando el video en su computadora: https://bit.ly/3qAMDHZ

Sugerencia: Se recomienda diseñar un procedimiento que permita realizar múltiples medidas y obtener la magnitud que estamos buscando a partir del ajuste de una gráfica.

En la solución de este problema se debe incluir:

1) Describa cómo obtuvo las medidas y el tratamiento de datos realizado. **[2 puntos]**

2) Medidas y gráficas realizadas (en papel milimetrado). **[5 puntos]**

3) La viscosidad del líquido con incertidumbre. **[3 puntos]**

Olimpiada Iberoamericana de Física



Prueba teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

SOLUCIONES

Problema 1. Un modelo de catapulta

a. Por el teorema de ejes paralelos el momento de inercia de para la palanca es:

El momento de inercia para una varilla girando alrededor de eje perpendicular a ella que pasa en por su centro de masa es:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{12}M\left(4L^2 - 4Ll + 4l^2\right)$$

$$I = \frac{1}{3}M\left(L^2 - Ll + l^2\right)$$

Solución alternativa:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M\left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + \frac{1}{12}3M\left[(L+l) - 2l\right]^2$$

$$I = \frac{1}{12}M\left[4(L+l)^2 - 12(L+l)l + 12l^2\right]$$

$$I = \frac{1}{3}M\left[(L+l)^2 - 3(L+l)l + 3l^2\right]$$

b. Para el cambio de energía potencial en el sistema.

El ángulo que forma la palanca con el suelo es de 45°. Se cumple que:

$L = h\sqrt{2}\,; h = L\ sen\ 45°$

La energía potencial inicial es igual: a la energía potencial gravitatoria de la palanca cuando está en el punto más bajo más la energía potencial elástica almacenada en el resorte.

$$U_0 = Mg\left[\left(\tfrac{L+l}{2}\right) sen\ 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\left[(L+l)\ sen\ 45° - l_0 - h'\right]^{\ 2}$$

$$U_0 = Mg\left(\tfrac{L}{2} sen\ 45° + \tfrac{l}{2} sen\ 45°\right) + \tfrac{1}{2}k\,(L\ sen\ 45° + l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

$$U_0 = Mg\left(\tfrac{h}{2} + \tfrac{l}{2} sen\ 45°\right) + \tfrac{1}{2}k\,(h + l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

Para la energía potencial final se tiene:

$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \left(\tfrac{L-l}{2}\right) sen\ 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \tfrac{L}{2}\ sen\ 45° - \tfrac{l}{2}\ sen\ 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

$$U_f = 2mgh + Mg\left[h + \tfrac{h}{2} - \tfrac{l}{2}\ sen\ 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

$$U_f = 2mgh + Mg\left[\tfrac{3h}{2} - \tfrac{l}{2}\ sen\ 45°\right] + \tfrac{1}{2}k\,(h - l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}$$

La diferencia de energía en el sistema es:

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\ sen\ 45°) + \tfrac{1}{2}k\left[(h - l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2} - (h + l\ sen\ 45° - l_0 - h')^{\ 2}\right]$$

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\ sen\ 45°) + \tfrac{1}{2}k\,(-2l\ sen\ 45°)\,(2h - 2l_0 - 2h')$$

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg\,(h - l\ sen\ 45°) - 2k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h')$$

c. Por conservación de energía.

$$\Delta K = -\Delta U$$

Donde

$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^{\ 2} + \tfrac{1}{2}I\omega^{\ 2}$

El movimiento angular para el objeto y la palanca es igual, se cumple que:

$\omega = \tfrac{v}{L}$

Entonces

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{mL^{\ 2}+I}{L^{\ 2}}\right) v^{\ 2}$$

Por tanto:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{mL^{\ 2}+I}{L^{\ 2}}\right) v^{\ 2} = 2k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h') - 2mgh - Mg(h - l\ sen\ 45°)$$

Teniendo así, la velocidad de salida del proyectil

$$v^{\ 2} = L^{\ 2}\,\frac{4k(l\ sen\ 45°)(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l\ sen\ 45°)}{mL^{\ 2}+I}$$

$$v = L\sqrt{\frac{4k(l\ sen\ 45°)(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l\ sen\ 45°)}{mL^{\ 2}+I}}$$

d. Para que salga disparado, se debe de cumplir:

$$v > 0$$

Por tanto:

$$4k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l\ sen\ 45°) > 0$$

$$4k\,(l\ sen\ 45°)\,(h - l_0 - h') > 4mgh + 2Mg(h - l\ sen\ 45°)$$

$$h - l_0 - h' > \frac{4mgh+2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{4k(l\ sen\ 45°)}$$

$$h' < h - l_0 - \frac{4mgh+2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{4k(l\ sen\ 45°)}$$

e. La altura a la que está el proyectil cuando sale disparado es $2h$, y el blanco está a la misma altura, el tiempo de caída es:

$$0 = v_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_y}{g}$$

Y el alcace x, es:

$$x = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g}$$

$$x = \frac{v^2 2\ sen\ \theta\ cos\ \theta}{g}$$

$$x = \frac{v^2 sen\ 2\theta}{g}$$

Ya que el proyectil se dispara cuando el ángulo es 45° con la vertical, el proyectil sale con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

Tal que:

$$x = \frac{v^2}{g}$$

$$x = \frac{L^2}{g}\left[\frac{4k(l\ sen\ 45°)(h-l_0-h')-4mgh-2Mg(h-l\ sen\ 45°)}{mL^2+I}\right]$$

Problema 2. Gotas eléctricas.

Al caer las gotas cargadas comunican carga a la esfera, la cual va a la superficie exterior de la misma. De esta manera surge un campo eléctrico de intensidad cada vez mayor. Este campo se opone a la aproximación de más gotas.

a) Debemos analizar dos posibles casos. Que la esfera alcance la carga máxima antes de llenarse o que se llene del líquido antes de alcanzar la carga máxima.

I) *La esfera no se alcanza a llenar.* Hallemos la velocidad de las gotas al alcanzar la esfera con ayuda de la ley de la conservación de la energía.

En el momento de desprenderse la gota

$$E_1 = mgh + k\frac{qQ}{h-R}$$

Donde m es la masa de las gotitas, q la carga de una esferita y Q la carga instantánea de la esfera. Al llegar al orificio de la esfera

$$E_2 = mg2R + k\frac{qQ}{R} + \frac{mv^2}{2}$$

A partir de la igualdad $E_1 = E_2$ despejamos la energía cinética

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-2R) - kqQ\left(\frac{h-2R}{(h-R)R}\right) \tag{1}$$

Las gotas dejan de ingresar a la esfera en el momento en que la velocidad de las gotas es igual a cero. De aquí podemos obtener que

$$Q = \frac{mg(h-R)R}{kq} \tag{2}$$

Considerando que

$$\varphi_0 = k\frac{q}{r} \quad \text{y} \quad \varphi = k\frac{Q}{R} \tag{3}$$

Donde φ es el potencial eléctrico de la esfera. El potencial de la esfera va a ser:

$$\varphi = k\frac{mg(h-R)}{\varphi_0 r}. \tag{4}$$

II) *La esfera se llena.* El número máximo de gotitas que caben en la esfera es

$$N = \frac{R^3}{r^3} \tag{5}$$

La carga que adquiere la esfera es

$$Q = qN = \frac{\varphi_0 r}{k} N = \frac{\varphi_0 R^3}{k r^2}. \tag{6}$$

Donde

$$Q = \frac{\varphi R}{k}. \tag{7}$$

El potencial eléctrico máximo en este caso es:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{R^2}{r^2}. \tag{8}$$

b) Si el líquido es agua, tendremos que si no se llenara la esfera de (4) tenemos

$$\varphi_1 = \frac{\rho g r^2 (h - R)}{3 \varepsilon_0 \varphi_0} = 1,2 \times 10^5 \text{ V}$$

Si la esfera se llena de (8) tenemos

$$\varphi_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ V} > \varphi_1.$$

Debemos verificar que sí es φ_1 el potencial que se establece. De (5) la esfera se llena con $N_1 = 1,0 \times 10^6$ gotitas. De (3) y (6) se encuentra que

$$N_2 = \frac{Q}{q} = \frac{\varphi}{\varphi_0} \frac{R}{r} = 8,2 \times 10^4 \ < \ N_1$$

Que confirma que el potencial que se establece es φ_1.

c) Con ayuda de la expresión $E = \frac{\varphi}{r}$, hallamos que el campo de una gotita es $E' = 3,0 \times 10^5 \text{ V/m}$ y el campo formado por la esfera es $E'' = 2,5 \times 10^6 \text{ V/m}$, por lo que no hay ruptura.

Problema 3. El brillo de las estrellas: fotometría fotoeléctrica.

a) La luminosidad máxima de Algol es la suma de las tres luminosidades (cuando ninguna estrella eclipsa a otra):

$$L = 182 + 6{,}9 + 10 = 198{,}9 \cdot L_{Sol} \rightarrow \quad L = 198{,}9 \cdot 3{,}828 \cdot 10^{26} = 7{,}614 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

El brillo es la luminosidad dividida por la superficie de la esfera que alcanza la Tierra:

$B = \dfrac{L}{4\pi \cdot d^2}$, donde d es la distancia de la estrella a la Tierra.

Pasamos la distancia Algol-Tierra de años luz a metros:

$$d = 90 \cdot (3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) = 8{,}515 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

El brillo de Algol resulta

$$B_{Algol} = 8{,}36 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

b) En la curva de luz vemos dos mínimos. El mínimo principal ocurre cuando Algol B pasa por delante de Algol A, y el mínimo secundario cuando pasa justo por detrás. Entonces, el intervalo de tiempo entre los dos mínimos corresponde a la mitad del período orbital.

En la gráfica medimos aproximadamente 34,5 horas. Por tanto, el período es

69 horas = 2,875 días

c) De acuerdo a la ley de Wien, la longitud de onda en la que se produce el pico de emisión es inversamente proporcional a la temperatura de la estrella. Utilizando el dato de la constante de Wien del enunciado y las temperaturas de Algol A y Algol B, se obtiene

$$\lambda_{pico} = \frac{2897{,}6 \cdot 10^3 \text{ (nm} \cdot \text{K)}}{T \text{ (K)}} = \begin{cases} 222{,}9 \text{ nm, para Algol A} \\ 643{,}9 \text{ nm, para Algol B} \end{cases}$$

d) Según la ley de la emisión fotoeléctrica, la frecuencia mínima se obtiene a partir de la energía del fotón, $h \cdot f$, y de la función de trabajo del metal (rubidio) iluminado, W_0 (pasando previamente de electronvoltios a julios):

$$h \cdot f = W_0 \quad \rightarrow \quad f_{min} = \frac{W_0}{h} = \frac{2{,}261 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}}{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}} = 5{,}47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

La longitud de onda correspondiente es

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f} = 548{,}79 \text{ nm}$$

e) El objetivo del telescopio, de longitud focal $f' = 4{,}57$ m y diámetro $D = 31$ cm, focaliza la luz sobre el cátodo. La difracción producirá una imagen circular (mancha de Airy) de radio

$$\sin\theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{r}{f'} \quad \rightarrow \quad r = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot f' = 1{,}22 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{0{,}31} \cdot 4{,}57 = 7{,}194 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Entonces, el diámetro de la imagen de Algol es el doble del radio:

$$2r = 1{,}44 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 14{,}4 \text{ μm}$$

f) Para calcular la corriente eléctrica primero necesitamos conocer el número de fotones que llegan al cátodo. El área del objetivo del telescopio es

$$A = \pi \cdot (D/2)^2 = \pi \cdot (0{,}31/2)^2 = 0{,}0755 \text{ m}^2$$

Sabiendo el brillo del apartado a), la energía que entra al telescopio en 1 segundo será

$$E = (B_{Algol} \cdot t) \cdot A = 8{,}36 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 0{,}0755 = 6{,}309 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Pero la energía de un único fotón para una longitud de onda de 400 nm vale

$$E_{fotón} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{400 \cdot 10^{-9}} = 4{,}970 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por tanto, el número de fotones por segundo que entran al telescopio es

$$N = \frac{E}{E_{fotón}} = \frac{6{,}309 \cdot 10^{-10}}{4{,}970 \cdot 10^{-19}} = 1{,}27 \cdot 10^{9} \text{ fotones por segundo}$$

Como sólo el 10% de la luz es útil (nótese que por encima de la longitud de onda máxima no se produce efecto fotoeléctrico), la eficiencia en el metal es el 2% y todos los electrones arrancados del cátodo llegan al ánodo. Entonces, los electrones que llegan al ánodo son

$$N_e = N \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 = 1{,}27 \cdot 10^{9} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02 = 2{,}54 \cdot 10^{6} \text{ electrones por segundo}$$

La corriente eléctrica que mide el electrómetro será el número de electrones por segundo, N_e, multiplicado por la carga del electrón:

$$I = N_e \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 2{,}54 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 4{,}07 \cdot 10^{-13} \text{ A}$$

g) De lo anterior concluimos que la corriente eléctrica es proporcional al brillo de la estrella:

$$I_1 / I_2 = B_1 / B_2$$

En la curva de luz vemos que la diferencia de magnitud es $m_1 - m_2 = -1{,}2$.

Entonces, de la expresión para la diferencia de magnitudes obtenemos:

$$-1{,}2 = 2{,}5 \cdot \log_{10}(B_2 / B_1) \quad \rightarrow \quad B_2 = B_1 / 3$$

Es decir, el brillo disminuye a la tercera parte cuando Algol A es eclipsada por Algol B.

En consecuencia, también la intensidad de corriente eléctrica disminuirá en el mismo factor:

$$I_2 = I_1 / 3$$

Problema 4. Dinámica de Microtúbulos.

a) Tiempo para que la molécula se disocie: $t_3 = 1/d$. El número de moléculas que se disocian es el número de eventos de despolimerización durante el tiempo que tarda una molécula en adherirse al filamento: $n_d = t_1/t_3 = d/kC_A$.

b) Probabilidad de no tener eventos de unión a moléculas A durante un tiempo t_2 é $e^{-kC_A/r}$. La tasa de probabilidad asociada con este proceso es entonces $e^{-kC_A/r}/t_2 = re^{-n}$. Entonces, el tiempo característico para perder la tapa es el inverso de este valor: $t_C = e^n/r$.

c) Durante t_C el número típico de moléculas que se agregan es $t_C/t_1 = kC_A e^n/r = n\,e^n$. Para que la longitud sea constante, este número de moléculas debe ser similar al número de moléculas perdidas en un evento de despolimerización, o sea: $n\,e^n = d/kC_A = d/rn$. Entonces, la ecuación que el número de moléculas en el casquete debe obedecer para que la longitud sea constante es $n^2\,e^n = d/r$. Sustituyendo (numéricamente) los valores de n, el resultado del número de moléculas en la capa del filamento es $n = 3,73$. Entonces $C_A = 0,58\ \mu$M.

d) $F = (2\gamma/R)\,4\pi R^2/N = 26\,nN$

e) Para $n = 10$ el microtúbulo está en equilibrio, entonces: $n^2\,e^n = d_0(1 + \alpha F)/r$. Luego: $\alpha = (r\,n^2\,e^n/d_0 - 1)/F = N\,(r\,n^2\,e^n/d_0 - 1)/(8\pi\,\gamma\,R) = 1,4 \times 10^{12}$ /N = 1,4 /pN.

Problema 5. Descarga de una botella. Problema de tratamiento de datos. (Experimental).

Midiendo directamente sobre la pantalla del video se obtienen algunos pares de valores altura-tiempo (sin necesidad de escala, pues el ajuste es logarítmico):

t=[2.5 12.9 37.5 51.9 69.4 83.5 99.5 125.4 146 153.5 167.5 186 205.4 222 233.5] (s)

z=[15.4 15 13.9 13.3 12.7 12.1 11.6 10.7 10 9.8 9.3 8.8 8.3 7.9 7.5] (cm)

Como $z = z_0 e^{-t/\tau}$, entonces $Ln(z) = -\frac{1}{\tau} t + Ln(z_0)$,

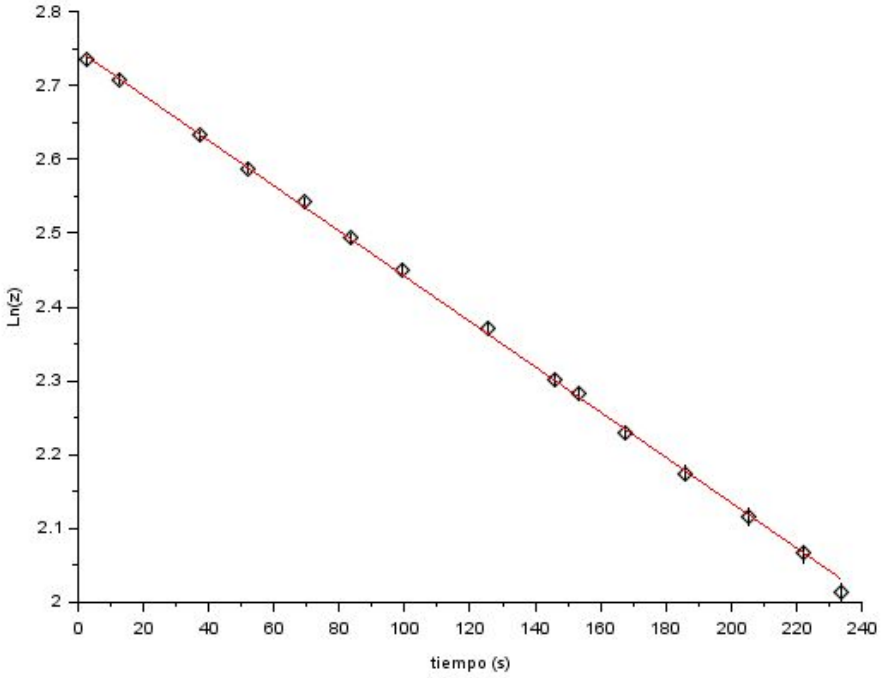
Donde $-1/\tau$, es la pendiente de la recta de mejor ajuste.

A partir de los datos experimentales, se obtiene la recta de mejor ajuste, cuya pendiente es,

$-1/\tau = (-0,00307 \pm 0,00003)\, s^{-1}$

Finalmente, como $\tau = \frac{32\, L\, D^2\, \eta}{d^4\, \rho\, g}$,

entonces la viscosidad del líquido azul es, $\eta = (1,5 \pm 0,7) \times 10^{-3}\ kg/(m{\cdot}s)$



Lea la página de instrucciones generales antes de comenzar con este problema.

Introducción Histórica

Dentro de los modelos propuestos para el estudio de fenómenos magnéticos en materiales, uno de los que tiene gran relevancia es el llamado Modelo de Ising. Propuesto por Wilhelm Lenz en 1920, fue completamente resuelto para el caso de una dimensión por Ernst Ising en 1925. De acuerdo al modelo, si se toma una colección discreta de espines en cualquier dimensión y se lo dispone en una geometría dada, la energía del sistema está descrita por las interacciones de los pares entre los espines, que poseen solamente dos orientaciones posibles, y por la interacción de cada uno con un campo magnético externo. En la solución encontrada por Ising, el modelo no previa las transiciones de fase cuando un material ferromagnético pasa a comportarse como un material paramagnético a partir de una determinada temperatura crítica, algo que solo fue observado en 1944 cuando Lars Onsager resolvió el modelo para dos dimensiones en ausencia de campos magnéticos. De ese modo, el modelo puede usarse para estudiar el comportamiento de las propiedades de un material próximas a la transición de fase, como la magnetización y la capacidad térmica. Más aún, por su simplicidad y éxito, el modelo ha sido adaptado para estudiar fenómenos caracterizados por la interacción de pares generando efectos colectivos.

Modelo de Ising

En esta prueba experimental, exploraremos simulaciones de un modelo de Ising bidimensional aplicado a una red cuadrada $N \times N$. Consideraremos en ese modelo un espín en cada celda, donde dicho espín corresponde a un momento magnético que puede o bien apuntar hacia arriba o bien hacia abajo, teniendo valores $+1$ o -1 respectivamente. Asumimos también que cada espín puede interactuar únicamente con un campo magnético externo aplicado, y con los espines vecinos (en el caso de la red cuadrada, cada espín interactúa con los 4 espines más cercanos), además de adoptar condiciones de contorno periódicas, de modo cada espín situado en un borde de la red interactúa con el espín del borde opuesto [1].

Dependiendo del comportamiento de ciertos materiales sometidos a un campo magnético externo, se destacan dos grupos: los materiales paramagnéticos y los materiales ferromagnéticos. Ambos poseen espines que se orientan en el sentido del campo externo, pero sólo los materiales ferromagnéticos pueden mantener esa magnetización incluso después de retirar el campo. Esto está relacionado con el hecho de que sólo en los materiales ferromagnéticos existe una interacción relevante entre los espines, que forman dominios de magnetización, y en el Modelo de Ising esto se tiene en cuenta despreciando el término de interacción entre vecinos para el caso de los materiales paramagnéticos. El efecto de la temperatura es desajustar el orden del sistema. Por encima de una temperatura crítica, un sistema ferromagnético se comporta como paramagnético.

Sobre el simulador

El comité académico de la OIbF 2021 creó un simulador de espines y está disponible en la siguiente dirección: `https://app.graxaim.org/oibf/2021/page/slsim_r/1?title=`. El simulador es ejecutado por el navegador de internet instalado en la computadora, smartphone, o tablet. En esta sección presentaremos los parámetros utilizados por el programa para la simulación de materiales paramagnéticos y materiales ferromagnéticos con una red de Ising bidimensional. El nombre del simulador es SLSIM (`Spin Lattice Simulator`, simulador de redes de espín en inglés) y su interfaz se muestra en la Figura 1.

En la interfaz del simulador, tenemos los siguientes campos de interés:

A) Tipo de sistema: se debe escojer entre la simulación de un material paramagnético o un material ferromagnético.

B) Estado inicial: hay tres estados iniciales posibles para la simulación: aleatorio (random), todos los espines hacia arriba (up), o todos los espines hacia abajo (down).

C) Tamaño (size): campo para escojer el tamaño de la red considerada. Este campo solo admite un número entero N.

D) Botón de reinicio (Reinitialize): borra la última realización del sistema y lo reinicia. Debe ser usado siempre que se quiera modificar el tamaño de la red de espines.

[1] Válido para los bordes superior/inferior e izquierda/derecha.

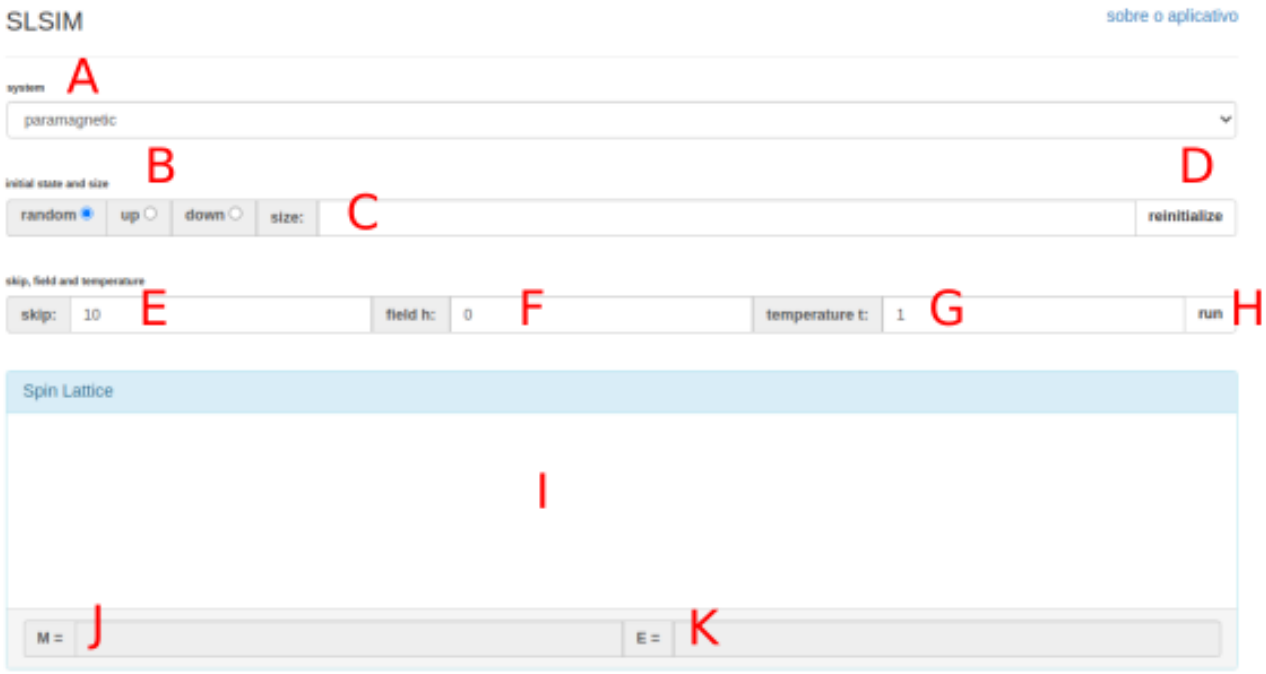


Figura 1: Interfaz del programa de simulación de redes de espines cuadradas.

E) Campo skip: parámetro de tiempo del sistema. Debe tomar siempre un valor entero. Cuando el parámetro skip es igual a T, el simulador realiza TN^2 intentos de giro de espines. Ese parámetro evita la necesidad de apretar el botón "run"varias veces para que el sistema se dirija a los estados de equilibrio.

F) Field H: parámetro adimensional que representa la intensidad del campo magnético. Puede tomar números reales positivos y negativos. Los valores positivos se asocian a la dirección hacia arriba.

G) Temperature t: parámetro adimensional que representa el efecto de la temperatura. Puede tomar números reales mayores a cero.

H) Botón run: lanza la posibilidad de cambio de giro de los espines de la red cristalina conforme a los parámetros configurados en la interfaz. Apretar el botón run con el parámetro skip=10 es estadísticamente equivalente a apretar el botón run 10 veces con la configuración skip=1.

I) Campo de visualización de la última red de espines simulada: los círculos azules representan espines hacia arriba, y los círculos rojos espines hacia abajo.

J) Magnetización total de la red simulada: dada como un múltiplo del momento magnético de un electrón. Se obtiene restando el número de espines hacia arriba, N_+, y el número de espines hacia abajo, N_-, o sea, $M = N_+ - N_-$.

K) Energía total calculada a partir de la última configuración de espines simulada.

La dimensión de la red cuadrada, $N \times N$, puede variar desde 1×1 ($N^2 = 1$ celda), hasta 64×64 ($N^2 = 4096$ celdas). El uso de redes más grandes implica un aumento del tiempo de computación de la simulación realizada. Los parámetros absolutos de magnetización M y energía E varían conforme a la dimensión de la red cuadrada, mientras que las medidas de magnetización por unidad de celda, $m = M/N^2$, y energía por unidad de celda, $e = E/N^2$, son independientes del tamaño de la red.

La configuración de espines obtenida para un mismo conjunto de parámetros puede variar en torno a un valor medio a medida que realizamos diferentes tiradas usando el botón run. Ese efecto se debe a la naturaleza estocástica (probabilística) de las simulaciones. Para ilustrar ese efecto considere el resultado correspondiente a la magnetización total M de una red de 64×64, sujeta a un campo magnético $2H_0$ y parámetro de temperatura

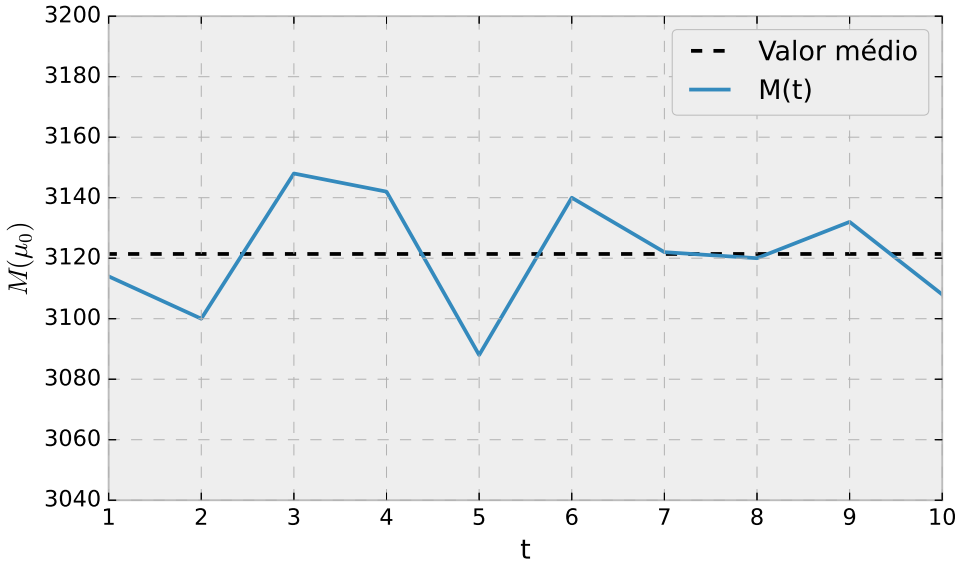


Figura 2: Obtención de diferentes valores de magnetización para una red 64×64, sujeta a un campo magnético $2H_0$ y parámetro de temperatura $T = 2T_0$ para diferentes magnetizaciones (línea continua). El valor medio de las 10 tiradas del sistema se encuentra representado por una línea discontinua.

$T = 2T_0$ para diferentes magnetizaciones, como se muestra en la figura 2. La dispersión de valores obtenidos para diferentes tiradas debe ser usada para evaluar la incertidumbre de la medida.

Aviso: siempre que una medida se solicite en el experimento, el estudiante debe considerar **al menos 10 tiradas del sistema**. Dé su medida **siempre con el valor medio de la medida acompañado por su valor de incertidumbre estimado**. En el resto de la prueba, todo resultado experimental deberá ser presentado con una estimación del error de esa medida, excepto en los apartados A1 y B de la parte 2, donde no es necesario ese análisis de errores.

Estudio de materiales paramagnéticos (7 puntos)

Parte A - espines libres (2,0 puntos)

En esta primera parte del problema, exploraremos los espines de un material paramagnético ideal en la ausencia de campo magnético H. En este caso, cada espín tiene una probabilidad de 50% de estar orientado hacia arriba o hacia abajo.

La magnetización M se mide como la diferencia entre el número de espines orientados hacia arriba, N_+, y el número de espines orientados hacia abajo, N_-. Como esa cantidad depende del tamaño de la red ($N \times N$), investigaremos la magnetización por celda, $m = M/N^2$.

En lo que sigue, siempre que se solicite la toma de una medida, debe darse siempre un valor medio acompañado de su respectiva incertidumbre estimada.

A.1	Realice algunas tiradas del sistema y observe cómo son los valores de magnetización total del sistema, M. ¿Esta magnetización es siempre nula? Discuta brevemente los resultados observados.	0,5pt

A.2	Realice la medida de m del material paramagnético en la ausencia de campo magnético. Coloque los resultados de las tiradas individuales en una tabla, junto con el valor medio y la incertidumbre estimada.	1,0pt

A.3	Evalúe cómo la incertidumbre de la medición varía con el aumento del tamaño $N \times N$ del sistema estudiado.	0,5pt

Parte B - Determinación de la susceptibilidad magnética (5,0 puntos)

En sistemas lineales, se define la susceptibilidad magnética de un material χ_m^0 según la relación

$$\vec{M} = \chi_m^0 \vec{H}. \tag{1}$$

Para materiales reales no siempre se observa esa relación lineal. En esos casos podemos definir una susceptibilidad magnética diferencial $\chi_m(H)$ de un material como

$$\chi_m(H) = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta H}, \tag{2}$$

que puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente al gráfico de M (o m) en función de H.

B.1	Realice gráficos de la magnetización por celda m en función del campo magnético H externo aplicado considerando una temperatura $t = 2$. Tome por lo menos 10 valores de campo magnético distinto. Realice las medidas para una red 15×15 y $skip = 20$.	2,5pt

B.2	¿Bajo qué condiciones el material paramagnético puede ser considerado lineal?	0,5pt

B.3	Determine la susceptibilidad magnética χ_m^0 con campo nulo ($H = 0$), y temperatura $t = 2$.	2,0pt

Estudio de materiales ferromagnéticos (13 puntos)

Para modelar un material ferromagnético debemos considerar una interacción entre los espines próximos. En nuestro modelo simplificado, consideraremos interacciones únicamente de vecinos inmediatos, esto es, asumimos que cada espín interactúa únicamente con sus cuatro espines vecinos de la red cuadrada, y los cálculos respectivos se realizan por el simulador.

Parte C - Efecto de la temperatura sobre la magnetización del sistema (5,0 puntos)

C.1	Configure la condición inicial con todos los espines hacia arriba y ajuste el parámetro de temperatura para $t = 0,1$. Haga evolucionar el sistema en el tiempo y verifique que el sistema mantiene su magnetización incluso a campo magnético nulo. Describa el procedimiento realizado y los datos recolectados para la conclusión. Realice las medidas para una red de 16×16 y $skip = 10$.	0,5pt

C.2	Haga evolucionar el sistema en el tiempo, ahora aumentando lentamente su temperatura, con campo $h = 0,5$ fijo y todos los espines inicialmente hacia arriba. El material, ¿conservará siempre la magnetización permanente observada a $t = 1,8$? Comente el resultado obtenido. Realice las medidas para una red 16×16 y $skip = 1000$.	1,0pt

C.3	Considere un sistema paramagnético en la configuración final del apartado anterior. Anote el valor de la temperatura y mida la magnetización M y energía total E. Tome las medidas para una red del mismo tamaño y skip del apartado anterior, bajo el mismo campo externo y temperatura.	1,5pt

C.4	Cambiando el sistema anterior de paramagnético para ferromagnético, la energía automáticamente se recalcula considerando las interacciones entre los espines vecinos. Dé el valor de la contribución a la energía debida a las interacciones, E_{in}, y el de la contribución debida al campo externo, E_{ext}, para la energía total medida en el apartado anterior, dando sus respectivas incertidumbres.	2,0pt

Parte D - Estudio de histéresis magnética (3,0 puntos)

Los materiales magnéticos suelen presentar el fenómeno de histéresis magnética. Éste fenómeno explica el motivo por el cual la magnetización de materiales como el hierro, inducida por medio de fuertes campos magnéticos, persiste aún cuando esos campos cesan.

No es posible en esos casos establecer una relación clara entre el campo magnético H y la magnetización del material M. El valor instantáneo de magnetización $M(t)$ depende, no solo del valor instantáneo de $H(t)$, sino también de los valores $H(t')$, para $t' < t$. Un ejemplo de curva de histéresis obtenida experimentalmente se da en la figura 3.

El punto 1 de la curva de histéresis está relacionado al estado en que la amplia mayoría de espines están orientados hacia arriba, mientras que el estado 2 corresponde a la situación opuesta, en la cual la gran mayoría de los espines están orientados hacia abajo.

El comportamiento de la magnetización $M_{12}(H)$ en el camino de $1 \to 2$, como se puede observar en la figura, no es idéntico al comportamiento de la magnetización $M_{21}(H)$ en el camino de $2 \to 1$. Se pueden obtener otros pares de valores (H, M) si sometemos el materiales ferromagnéticos a diferentes campos magnéticos variables en el tiempo $H(t)$.

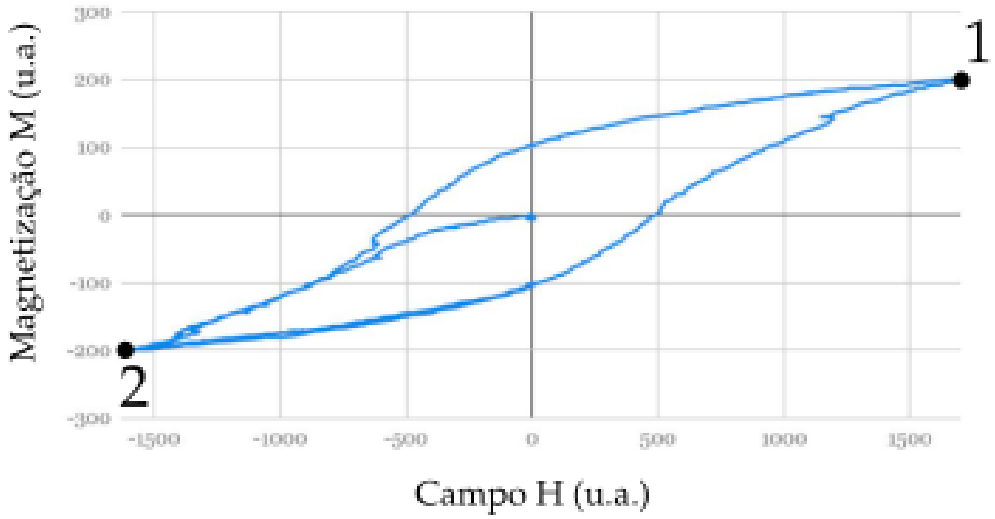


Figura 3: Ejemplo de curva de histéresis $M \times H$ obtenida experimentalmente en un laboratorio. Los ejes están dados en unidades arbitrarias. Los puntos 1 y 2 representan regiones de saturación con la mayoría de los espines hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

D.1	Realice un gráfico de m en función de H, que represente la curva de histéresis $1 \to 2 \to 1$. Considere la temperatura $t = 0,5$ y varíe el campo magnético como crea razonable. Realice las medidas para una red de 16×16 y $skip = 1500$. No se preocupe si su curva presenta un perfil rectangular, no tan similar a la del ejemplo.	3,0pt

Parte E - Transiciones de fase (5,0 puntos)

En esta parte del problema, investigaremos el comportamiento de transición de fase en el sistema. Teóricamente, el modelo de Ising que estamos estudiando presenta una transición de fase de *segundo orden*, que consiste en una variación brusca de los parámetros fundamentales del sistema, incluyendo la magnetización, susceptibilidad y capacidad térmica. Sin embargo, esa transición brusca está presente únicamente en sistemas infinitos. En este caso, debido a la finitud de nuestro sistema, tendremos una transición de fase más continua.

Al igual que en las transiciones de fases más comunes, como del agua al hielo, esas transiciones están descritas por una temperatura crítica t_C, que delimita cuándo ocurre esa transición. Note que para el caso de la transición agua-hielo en condiciones normales de presión, $t_C = 0°\text{C}$. Además, ya se puede esperar una transición de fase únicamente observando el comportamiento del sistema para t pequeña y t grande, ya que se percibe que para t pequeña todos los espines están aproximadamente en la misma dirección, mientras que para t grande la dirección de los espines está distribuida de manera razonablemente uniforme.

Con eso en mente, encontraremos la temperatura crítica para el modelo de Ising. Para eso, mediremos la magnetización en función de la temperatura con campo nulo, $H = 0$.

La transición de fase en ese modelo está caracterizada por el hecho de que, para temperaturas menores que t_C, tenemos *orden*, con una gran mayoría de los espines en la misma dirección, y para temperaturas mayores que t_C tenemos *desorden*, donde los espines empiezan a adquirir cualquiera de las dos direcciones. Eso puede verse observando la figura brindada por la simulación, o el valor del módulo de la magnetización por celda, $|m(t)|$.

Para las simulaciones en este apartado, utilice $N = 20$ y $skip = 5000$.

E.1	Dada la descripción cualitativa del orden y desorden, obtenga $t_{\min}$ y $t_{\max}$, tales que $t_{\min} \leq t_C \leq t_{\max}$, y $t_{\max} - t_{\min} \leq 1$.	1,5pt

Para el intervalo de temperaturas obtenido en el apartado de arriba, vamos a analizar el comportamiento de la

magnetización por celda de manera más precisa.

E.2	Construya un gráfico del módulo de la magnetización por celda $\|m(t)\|$ en función de la temperatura desde $t_{\min}$ hasta $t_{\max}$.	2,5pt

En un sistema infinito, la temperatura crítica t_C puede encontrarse como el menor valor de temperatura t donde $|m(t)| = 0$. En ese caso, como puede verse en el gráfico en el apartado de arriba, el módulo de la magnetización por celda nunca alcanza el valor 0. Por lo tanto, podemos definir la temperatura crítica en el sistema finito como la temperatura t donde el gráfico de $|m(t)|$ presenta un cambio de concavidad.

E.3	Dada la discusión de arriba, estime el valor de la temperatura crítica, t_C.	1,0pt





Instruciones de Prueba

- **Las hojas no pueden tener ningún tipo de identificación y tampoco el nombre del alumno.**
- Las soluciones deben realizarse en hojas de papel separadas y originalmente en blanco.
- La solución de cada problema debe enviarse en un documento PDF separado con tamaño máximo de 10 Mbytes.

Piedras que rebotan (12 puntos) [1]

Lea la página de instrucciones generales antes de comenzar con este problema.

Introdución

En este problema analizaremos la física de un juego común de niños, en el que se arrojan piedras al agua con una determinada velocidad de rotación, haciendo que las piedras "salten" sobre la superficie del agua, recorriendo una gran distancia hasta hundirse en el agua. En la Parte **A** de este problema presentaremos un modelo simplificado del problema y encontraremos condiciones limitantes para que ocurra el fenómeno. En la Parte **B** consideraremos las disipaciones en nuestro modelo y encontraremos otra condición limitante para que la piedra rebote. Finalmente, en la Parte **C**, analizaremos el movimiento de la piedra, pensando en el número de colisiones y la distancia recorrida por la piedra.

Parte A - Modelo aproximado de las colisiones (3,9 puntos)

Consideremos un modelo simplificado del problema, donde la piedra que lanzamos tiene forma cuadrada, de lado l. La piedra tiene un pequeño espesor mucho menor que l, y su masa es M. También consideraremos que la superficie del lago sobre el que arrojamos la piedra es perfectamente plana, alineada con el eje horizontal. Además, dos parámetros importantes para el problema son los ángulos: θ que es el ángulo entre la superficie de la piedra y la horizontal, y β que es el ángulo de incidencia entre la velocidad de la piedra y la horizontal, ambos mostrados a continuación en la figura **(1)**.

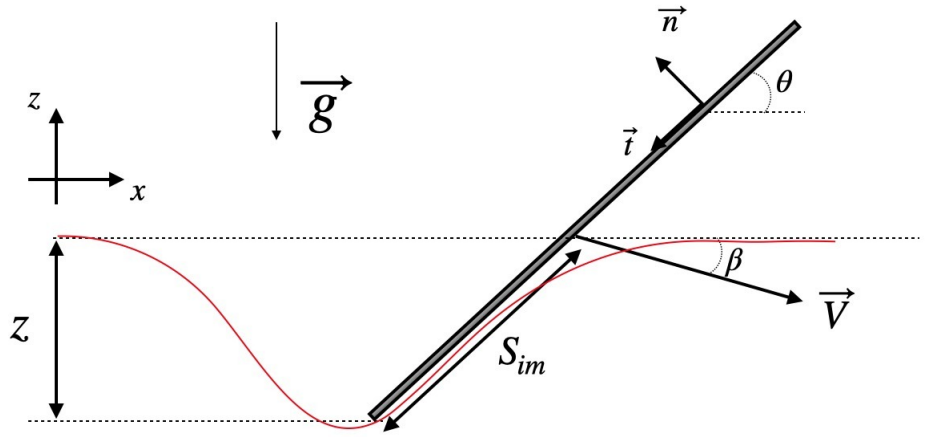


Figura 1: Ilustración que representa la geometría descrita. La línea curva muestra la superficie del agua que se distorsiona por el movimiento de la piedra. También se definen los ángulos y direcciones relevantes del problema. Tenga en cuenta que la cantidad z mide la altura entre el nivel original del agua y el punto más profundo de la piedra.

Para resolver el problema adoptaremos un sistema de coordenadas cartesianas, donde el eje x está alineado con la superficie del agua, y el sentido positivo del eje z apunta hacia arriba, donde $z = 0$ coincide con la superfície de agua. De esta manera, arrojaremos la piedra al agua con el vector de velocidad $\vec{V}$, con una inclinación β como se muestra arriba.

La clave del problema será analizar la fuerza de reacción del agua sobre la piedra, provocada por el movimiento de ésta en el agua. En este problema consideramos un modelo simplificado para esta fuerza, que aún así, logra obtener varias predicciones para el fenómeno. Consideraremos la siguiente expresión para la fuerza que actúa sobre la piedra, en función de los vectores de módulo unitario, $\vec{n}$ y $\vec{t}$, en la dirección normal y tangencial de la piedra respectivamente como se muestra en la figura **(1)**

$$\vec{F} = \frac{1}{2} C_l \rho V^2 S_{\text{im}} \, \vec{n} + \frac{1}{2} C_f \rho V^2 S_{\text{im}} \, \vec{t} \tag{1}$$

[1] Autoría de Thomas Bergamaschi

donde, V es la velocidad total de la piedra $V^2 = V_x^2 + V_z^2$, ρ la densidad del agua, C_l y C_f dos coeficientes de la fuerza de contacto con el agua y S_{im} el área de la superficie sumergida, como se muestra en la figura **(1)**.

Tenga en cuenta que generalmente los coeficientes C_l y C_f dependerían de los ángulos β, θ, pero los consideraremos constantes en este problema. Además, considere que β es un ángulo pequeño, de modo que la componente horizontal V_x de la velocidad es mucho mayor que la componente vertical V_z. Este régimen de fuerzas en función de la velocidad es más adecuado para velocidades grandes V y ángulos de incidencia mayores, pero aún podremos obtener predicciones de este modelo.

Para calcular el área de la superficie sumergida S_{im}, considere que la piedra no está girando, de modo que la piedra siempre tiene dos lados alineados con el eje y (entrante al papel). En nuestra aproximación, suponga que el área de S_{im} es tal que el agua mantiene el contacto con la piedra por completo hasta que el agua se vuelve horizontal nuevamente. Dadas estas definiciones, analicemos la dinámica del sistema.

A.1	Escriba una expresión para el área sumergida S_{im} de la piedra em función de z, l, θ.	0,5pt

Dada la expresión anterior para S_{im}, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema. Para esto, ignore la componente de la fuerza debida a al empuje del agua, que se justifica para piedras suficientemente densas. Sin embargo, no asuma que $V_x >> V_z$.

A.2	Escriba las´ aceleraciones vertical y horizontal de la masa, a_X y a_Z, respectivamente.	0,5pt

Dadas las ecuaciones de movimiento anteriores, ahora suponga que $V_x >> V_z$, de modo que podamos extraer el movimiento $z(t)$, y también suponga que la velocidad horizontal de la piedra permanece aproximadamente constante durante todo el movimiento. Recuerde que $z(0) = 0$, y use que la velocidad original a lo largo del eje z es V_z^0.

A.3	Teniendo en cuenta las aproximaciones descritas anteriormente, encuentre $z(t)$.	1.0pt

Ahora, debemos pensar en una condición limitante para que la piedra ya no pueda salir del agua. Para analizar esto de manera simplificada, asumiremos que si la piedra está completamente sumergida en el agua durante el movimiento, no podrá volver a salir del agua. La justificación de esto se basa en el hecho de que cuando la piedra está completamente sumergida esperamos que la fuerza de flotación que actúa ejerce el agua sobre la piedra disminuya considerablemente, no pudiendo levantar la piedra de nuevo.

A.4	Basado en la discusión anterior, escriba la condición límite para la profundidad máxima z.	0,5pt

A.5	Encuentre la velocidad límite V_{min} para que la piedra rebote sobre el agua.	0,9pt

Con eso, encontramos una condición límite para la velocidad mínima que necesitamos darle a la piedra para que pueda "saltar" una vez en el agua. En la siguiente parte de este problema, analizaremos otra condición limite del problema, relacionada con la disipación de la energía. Sin embargo, antes de eso, este modelo simplificado nos permite encontrar una condición límite para el ángulo θ ya que es natural esperar que si es muy grande no habrá una componente vertical de fuerza lo suficientemente grande como para levantar la piedra.

A.6	Encuentre la región de valores para que la piedra pueda dar un salto en el agua.	0,5pt

Parte B - Disipación de Energía (4,6 puntos)

En la primera parte del problema, analizamos las condiciones limitantes del fenómeno considerando solo el movimiento vertical de la piedra en el agua. Ahora, observe que en el movimiento de la piedra parte de la energía inicial de la piedra se disipa, ya que hay una componente de fuerza en la ecuación (1) que apunta en el eje $-x$, en contra de la dirección del movimiento. Aquí estimaremos cuánta energía se disipa por esta fuerza horizontal F_x durante cada proceso de colisión con el agua, y con esto podremos analizar cuando esta fuerza

hace que la piedra se detenga.
Nuevamente, considere **las mismas aproximaciones que se usaron en la parte A.**
Calcularemos el trabajo disipado, $W < 0$, disipado por F_x. Con esto, obtendremos la velocidad horizontal de la piedra después de la colisión V_x' en función de la velocidad horizontal original V_x.

B.1	Considerando la disipación, escriba la relación entre V_x', V_x y el trabajo disipado W.	0,5pt

Para obtener W, debemos considerar un conjunto de aproximaciones para el movimiento de la piedra. Supondremos que la piedra permanece a una velocidad aproximadamente constante durante el proceso de colisión con el agua, y que este proceso toma t_{col} tiempo que pronto calcularemos. Además, es conveniente escribir la respuesta como una función de la fuerza promedio en el eje x durante el proceso de colisión $\langle F_x(t)\rangle$.

B.2	Encuentre W en función de V_x, el valor medio de la fuerza en x, $\langle F_x(t)\rangle$, durante la colisión, y el tiempo de colisión, t_{col} .	0,6pt

B.3	Usando los resultados de la parte **A**, escriba una expresión para el tiempo de colisión t_{col}.	0,5pt

B.4	Volviendo a la parte **A**, encuentre una relación entre F_x y F_z, similar a la fuerza de fricción común, de la forma $F_x = \mu F_z$, y encuentre μ como una función de constantes en el sistema.	0,5pt

Según la relación anterior, tenemos que $\langle F_x(t)\rangle = \mu\langle F_z(t)\rangle$, donde $\langle F_z(t)\rangle$ es el valor promedio de la fuerza vertical actuando sobre la masa, que se puede calcular utilizando los resultados de la parte **A**.

B.5	Obtenga $\langle F_z(t)\rangle$ y, por tanto, $\langle F_x(t)\rangle$.	1,0pt

B.6	En base en los elementos anteriores, escriba $V_x^{'}$ como una función de V_x y las constantes básicas del sistema. También, escriba una expresión para la velocidad mínima de la piedra para que pueda rebotar en el agua.	1,0pt

Con eso, obtenemos una condición adicional para que la piedra pueda saltar fuera del agua. Por supuesto, si el lanzamiento de la piedra satisface estas dos condiciones, esperamos que sea posible observar el fenómeno del rebote de la piedra en el agua. Para hacer esto, use la tabla a continuación con los valores de las constantes:

C_l	C_f	ρ	l	g	β	θ	M
1	1	1000 kg/m^3	0.05 m	9.81 m/s^2	10°	10°	0.05 kg

B.7	En base a los valores de las constantes dados anteriormente, calcule la velocidad mínima para que la piedra haga un salto de agua. Nuevamente, usando estas constantes, escriba cuál de las dos condiciones para la velocidad es más limitante que la otra.	0,5pt

Con estos resultados para las velocidades minímas, en la siguiente parte analizaremos el movimiento de la piedra entre saltos sucesivos.

Parte C - El movimiento de la piedra (3,5 puntos)

En esta parte analizaremos el número total de rebotes realizados por la piedra, y la distancia recorrida entre dos rebotes sucesivos. Para esto, necesitamos la velocidad de la piedra después de la n -ésima colisión.

C.1	Suponiendo una velocidad inicial de $V_x^{(0)}$, escriba una expresión para $V_x^{(n)}$, la velocidad después de la n -ésima colisión.	1,0pt

Con este resultado, podemos obtener el número total de rebotes que la piedra hace en el agua.

C.2	Escriba una expresión para el número total de colisiones, N_{col}.	1,0pt

C.3	Sabiendo que el récord mundial para el número de saltos es $N_{\text{max}} = 88$, y utilizando las constantes dadas en la parte **B**, estime la velocidad inicial $V_x^{(0)}$ en el eje x para obtener este número de saltos.	0,5pt

Entre sucesivos saltos en el agua, la piedra hace una trayectoria por el aire, característica de un lanzamiento oblícuo regular. Con eso podemos calcular la distancia percorrida entre dos saltos sucesivos.

C.4	Encuentre la distancia recorrida horizontalmente por la piedra entre la n-ésima y $n+1$-ésima colisión $\Delta X(n)$, y bosqueje este gráfico.	1,0pt

Este perfil de $\Delta X(n)$ bosquejado es cualitativamente visto al tirar las piedras al lago, ya que en los últimos saltos la piedra pasa a hacer saltos cortos y en rápida sucesión.

Oscilador doble (9 puntos)[2]

Parte A - Oscilador LC (1 puntos)

Los capacitores e inductores son los elementos básicos de los circuitos osciladores. El circuito considerado genera una oscilación eléctrica que se basa en que la energía eléctrica se almacena a veces en el capacitor, donde se almacena carga eléctrica, y otras veces en el inductor, por lo que se genera un campo magnético en su entorno debido al paso del corriente eléctrica. Considere un capacitor ideal de capacitancia C en serie con un inductor ideal de inductancia L.

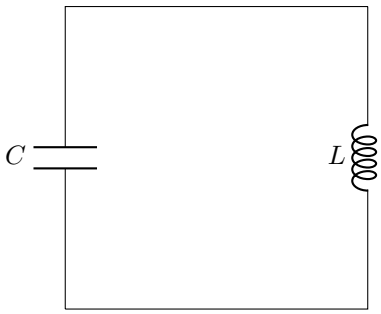


Figura 2: Circuito LC.

Sabiendo que la carga eléctrica almacenada en el capacitor del circuito LC puede ser representada por una función periódica $Q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, en la cual la frecuencia angular ω puede ser escrita únicamente en término de un producto de potencias de L y C:

A.1	Determine la frecuencia angular ω del oscilador LC.	1,0pt

Parte B - Oscilador doble (4 puntos)

En base al circuito anterior, representamos en la figura siguiente, un oscilador doble, compuesto por un capacitor ideal de capacitancia C, dos llaves, dos inductores ideales de inductancias L_1 y L_2 ($L_2 = 4L_1$) y dos diodos ideales. Los diodos ideales son elementos del circuito que permiten el paso de la corriente eléctrica en un sentido, con resistencia eléctrica nula, pero no en sentido opuesto.

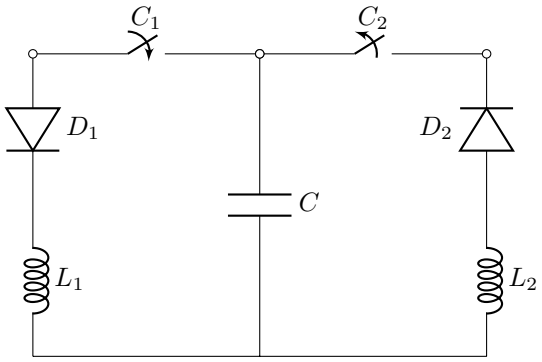


Figura 3: Circuito con oscilador doble.

El oscilador está preparado de tal forma que, en $t = 0$, el capacitor tiene carga inicial $Q_0 > 0$, la llave C_1 está inicialmente cerrada y la llave C_2 se encuentra abierta. De esta manera surge una corriente eléctrica en la malla

[2]Autoria de Vinícius Névoa

izquierda del circuito. Cuando la corriente se anula, la posición de las llaves se inverte, esto es, C_1 se abre y C_2 se cierra. Pasa a circular corriente en la malla derecha del circuito. Cuando la corriente en la malla derecha se anula, hay un nuevo intercambio de llaves: C_1 se cierra y C_2 se abre. El proceso sigue de esta manera de forma indefinida.

Teniendo en cuenta este nuevo circuito:

B.1	Determine el período de oscilación T de este circuito. Exprese su respuesta en términos de L_1 y C.	1,25pt

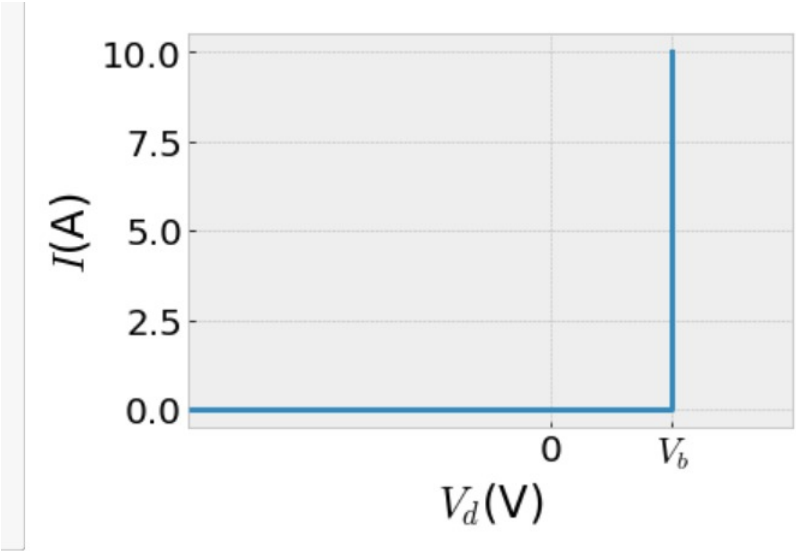
B.2	Bosqueje el gráfico de la carga $Q(t)$ almacenada en el capacitor en función del tiempo, destacando las cantidades relevantes.	1,25pt

B.3	Bosqueje el gráfico de la corriente $I(t)$ que pasa por el inductor en función del tiempo, destacando las cantidades relevantes. Escriba la función correspondiente a este gráfico.	1,25pt

B.4	¿El circuito descrito presenta algún tipo de pérdida? Si es así, indique en que elemento del circuito ocurre la pérdida.	0,5pt

Un diodo puede ser implementados mediante una unión entre semiconductores del tipo P (ánodo) y del tipo N (cátodo). La polarización se dice directa cuando el polo positivo de la fuente entra en contacto con el ánodo y el polo negativo de la fuente entra en contacto con el cátodo, permitiendo que el diodo conduzca la corriente.

Sin embargo, en dispositivos reales, para que esta corriente eléctrica pueda fluir es necesario polarizar la unión con una diferencia de potencial V_b. Un modelo más refinado de un diodo es, entonces, un dispositivo que permite el pasaje de corriente eléctrica solamente cuando la diferencia de potencial entre sus extremos es superior a V_b. Considere que la resistencia interna del diodo aún pueda ser considerada nula. El gráfico de la corriente eléctrica I que atraviesa este diodo en función del voltaje V entre sus extremos es:



Parte C - Voltaje de polarización de un diodo (4 puntos)

En esta parte del problema, consideraremos el efecto del voltaje de polarización directa de los diodos sobre el oscilador doble presentado. Considere que el voltaje de polarización de los diodos está dado por V_by su resistencia interna es nula.

C.1	Bosqueje el comportamiento del circuito en una gráfica de carga $Q(t)$ en función del tiempo. Considere la misma condición inicial anterior (carga inicial Q_0 y corriente inicial nula) y un intervalo de tiempo entre 0 y $2T$. Indique el valor final de la carga del capacitor, $Q(2T)$, en la gráfica.	2,0pt

C.2	Suponiendo que $V_b \ll Q_0/C$, estime el tiempo para que la energía total almacenada en el circuito caiga a la mitad.	2,0pt

Deteccion de muones (9 puntos)[3]

La radiación cósmica está compuesta por partículas energéticas de origen solar y extragaláctica, esencialmente por protones (87%), partículas alfas (12%) y núcleos de iones pesados ($\approx 1\%$). Cuando los rayos cósmicos llegan a la Tierra, inciden violentamente sobre las moléculas de la atmósfera y generan, entre otros efectos, partículas inestables como los muones.

El muon es una partícula cuya masa es cerca de 200 veces mayor que la del electrón, $m = 105,66 MeV/c^2$ y su tiempo de vida media $T_{1/2}$=2,2μs. En este problema, investigaremos un poco sobre los aspectos físicos involucrados en su detección en la atmósfera, el suelo y el subsuelo.

Parte A - Detección de muones en el suelo (2,5 puntos)

Los experimentos de muones atmosféricos pueden brindar información sobre la dinámica de la atmósfera. Los investigadres observan variaciones en el flujo de muones en suelo entre diferentes épocas del año. Por ejemplo, en una región determinada, en verano, la atmósfera se expande y la región de mayor producción de muones se desplaza hacia mayores alturas. En consecuencia, se observa en el suelo una disminución de la cantidad de muones de bajas energías al nivel del mar.

En esta primera parte del problema, nos ocuparemos de explicar la detección de muones en el suelo. Suponga que esos muones se producen en una incidencia vertical hacia bajo, que después de su producción no hay interacción con átomos de la atmósfera y que la energía cinética típica de esas partículas es muy alta, de la orden de $K_0 \approx$1,5 GeV.

Recuerde que $1\,eV = 1.6 \times 10^{-19}\,J$.

A.1	Estime la distancia típica recorrida por los muones durante un tiempo de vida media $T_{1/2}$ medido en el sistema de referencia del muon.	1,0pt

El resultado del apartado anterior sugiere una altura h_0 a partir de la cual se torna improbable que los muones generados sean detectados en suelo. Sin embargo, debido a efectos relativistas buena parte de los muones generados en altas alturas, a kilómetros sobre el nivel del suelo, pueden ser detectados en la superficie de la Tierra.

A.2	Estime la distancia típica que los muones de energía cinética K_0 pueden recorrer en la atmósfera terrestre.	1,5pt

Parte B - Espectro de energía de muones (3,5 puntos)

En observaciones reales no se detectan muones con una única energía cinética, sino una distribución de energías. Considere que un detector mide el flujo de muones ϕ por unidad de área y tiempo, para cuatro diferentes energías cinéticas K, conforme se muestra en el gráfico siguiente. Las medidas son realizadas a 12,5 km de altura.

B.1	En base a las informaciones dadas, calcule el flujo total y la energía cinética media E_1 de los muones producidos a 12,5 km de altura.	0,5pt

Debido al corto tiempo de vida media de los muones, sus flujos y la energía media varían con la altura.

B.2	Calcule la energía cinética media E_2 de los muones generados a 12,5 km de altura y detectados en suelo.	3,0pt

[3] Autoria de Maurício Pazianotto

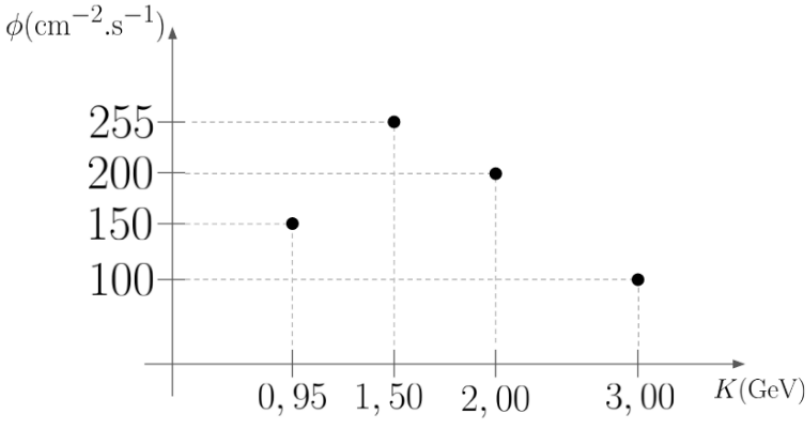


Figura 4: Flujo de muones por unidad de energía medido a 12,5 km de altitud.

Parte C - Aplicaciones y detección en el subsuelo (3 puntos)

Las partículas como los muones, dependiendo de su energía puede tener diferentes aplicaciones. Considere que el tamaño de un enlace atómico es de 10^{-10} m (1 Å), que el tamaño del núcleo de la materia tenga dimensiones del orden de 10^{-15} m (1 fm) y que $\hbar.c = 197{,}3$ MeV.fm.

C.1	¿Los muones generados con 0,95 GeV podrían ser usados en estudios de estructura cristalina de materiales o de la estructura nuclear? Justifique su respuesta.	2,0pt

Los muones generados a una altura de 12,5 km que llegan al suelo pueden penetrar el interior de la Tierra hasta una profundidad considerable. En este proceso, el muon pierde su energía por proceso de ionización de forma aproximadamente constante, a razón de 10 MeV.g^{-1}.cm^2 por unidad de área y unidad de masa del suelo. Se sabe que la densidad volumétrica de masa del suelo es de 1,50 g/cm^3.

C.2	Estime la profundidad que estos muones pueden penetrar en el suelo. Desprecie posibles dispersiones.	1,0pt

Problema experimental: Dispersión de Rutherford

Olimpiada Iberoamericana de Física

2022

1. Introducción

Hacia finales del siglo XIX e inicios del siglo XX, se inicia el estudio de la composición de los átomos. Con el conocimiento de la existencia del electrón, descubierto por Sir Joseph John Thomson, como una partícula muy pequeña y liviana con carga negativa que estaba presente en toda la materia se propusieron modelos de cómo podrían estar conformados los átomos ya que, al ser eléctricamente neutros, debían también tener una carga positiva que igualara a la de los electrones.

Uno de los modelos principales a considerar fue el modelo de Thomson (1900), propuesto por William Thomson con el apoyo de J.J. Thomson, en el cual un átomo consistía en una masa uniforme, cargada positivamente en la cual los electrones estaban incrustados. A este modelo se le llamó el *pudín de pasas* por analogía de como en este postre las pequeñas pasas están dispersas dentro de una gran masa uniforme.

El *experimento de dispersión de Rutherford* fue concebido por Ernest Rutherford para determinar si el modelo de Thompson (u otros existentes) describía correctamente al átomo. Este experimento consiste en lanzar partículas cargadas eléctricamente hacia un objetivo y observar cómo es que estas partículas se dispersan al interaccionar, por medio de la fuerza de Coulomb, con los átomos del material del que está hecho el objetivo.

El experimento de Rutherford finalmente se concretó como una serie de experimentos, que fueron realizados entre 1908 y 1910 por Ernest Marsden y Hans Geiger bajo la supervisión de Rutherford. En la versión final de estos experimentos, se lanzaron partículas alfa provenientes de la desintegración radiactiva de radón-222 en forma de un fino haz obtenido por medio de un colimador. El objetivo al que se lanzaba es haz fue una lámina de oro de 2 μm de grosor. Para observar la dispersión, se colocaba una pantalla fluorescente que brillaba al ser impactada por una partícula alfa. Todos los elementos: emisor de partículas, objetivo y pantalla eran colocados dentro de un tubo sellado al que se le extraía el aire creando un vacío.

En base a los datos obtenidos de los experimentos, el mismo Rutherford propuso otro modelo, el modelo de Rutherford (1911), en el cual los electrones orbitan alrededor de un núcleo compacto y muy masivo de carga positiva, de la misma forma en que los planetas orbitan alrededor del sol, razón por la cual este modelo fue llamado *modelo planetario del átomo*.

2. Montaje experimental

El experimento se basa en simular el lanzamiento de un haz de 10^8 partículas alfa hacia una lámina muy delgada de oro. El haz tiene 1 mm^2 de área y las trayectorias de las partículas dentro de este son perfectamente paralelas, pero la distancia a partir del centro es aleatoria (ver figura 1). Las partículas del haz, con energía de 5.5 MeV inciden perpendicularmente en la lámina de oro de un grosor de 10^{-6} m.

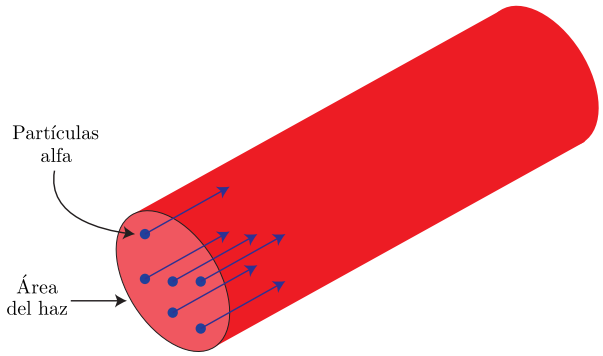


Figura 1: Haz de partículas alfa: Para cada partícula en el haz, la energía cinética es la misma y las trayectorias son paralelas. La distancia a partir del centro del haz de cada trayectoria es aleatoria.

Para cada partícula en la simulación, se considerarán las interacciones que estas tienen con el material del objetivo para determinar la trayectoria que debe seguir al momento de alcanzarlo.

Se coloca un detector que cuenta el paso de partículas alfa con el fin de determinar cuántas de las partículas que inciden en el objetivo se dispersan a un ángulo Θ respecto de la trayectoria original del haz. El detector tiene un área efectiva (circular) de 4 cm^2 y puede moverse sobre un círculo centrado en el punto de impacto del haz con el material. El detector puede girarse a intervalos de 15° entre 0° y 135° (Ver figura 2).

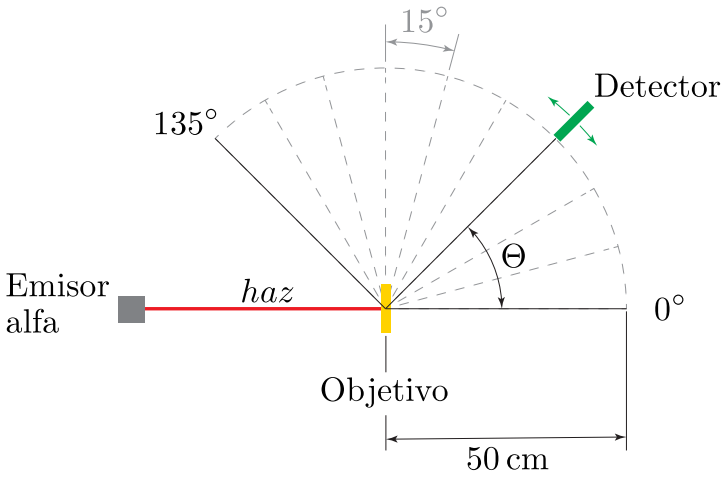


Figura 2: Dispersión de Rutherford: Montaje experimental de la simulación.

Al simulador se accede desde un navegador web no siendo necesaria instalación alguna en la computadora. El enlace de acceso lo puede encontrar en la página de Moodle de la olimpiada o en haciendo click en el siguiente enlace: Simulador de dispersión de Ruterford.[1]

En el simulador se puede escoger el ángulo al cual se coloca el detector por medio de dos botones etiquetados como − y +. El ángulo se muestra gráficamente y su valor aparece entre los botones ya mencionados. Ya que se tiene el ángulo deseado se presiona el botón con el símbolo ▸ para ejecutar (correr) la simulación y obtener un valor de conteos. Si desea correr otra simulación para el mismo valor de ángulo, solo hay que presionar ▸ nuevamente.

También se cuenta con botones de "borrar" y "reiniciar". El botón borrar solo elimina el último conteo obtenido. Esto es útil en el caso de que exista confusión sobre si al presionar el botón ▸ esté dando un nuevo conteo. El botón de reinicio retorna todo el simulador a sus valores originales.

3. Procedimiento experimental

Con el simulador realice lo siguiente:

1. Mida el número de partículas dispersadas para cada ángulo posible del detector en el experimento.
2. Construya una gráfica con las mediciones utilizando escala semi-logarítmica para el conteo de partículas en el detector en función del ángulo. Desprecie la incertidumbre en el ángulo.

4. Modelo de Rutherford

Ernest Rutherford propuso un modelo en que toda la carga positiva está concentrada en núcleos muy pequeños y pesados. Al ser lo electrones muy pequeños, la mayoría del volumen de un átomo está vacío, por lo que las partículas en su mayoría pueden pasar sin interaccionar. Las partículas que pasan muy cerca de los núcleos son los que se dispersan al ser repelidas por la fuerza de Coulomb. En la figura 3 se muestra la trayectoria que tomaría una partícula alfa al ser dispersada por un núcleo. La línea que describe la trayectoria inicial de la partícula alfa se encuentra a una distancia b de una paralela que pasa por el centro del núcleo. La partícula se aproxima una hasta una distancia mínima r del núcleo describiendo una trayectoria *hiperbólica* y continúa alejándose. La trayectoria final es tal que forma un ángulo Θ con la trayectoria original. Rutherford, tomando en cuenta las consideraciones ya mencionadas así como la carga eléctrica que debe tener el núcleo atómico y que la cantidad de partículas dispersadas a un ángulo Θ debe ser proporcional a la cantidad de partículas originales en el haz, dedujo una expresión para la cantidad de partículas I que se esperaría tener a un ángulo Θ:

[1] El enlace completo es: https://oibf-2022.gofisica.org/U2FsdGVkX19tLoU3wB4bwMEQzQZH3HhQVzpN0pcjTZJfNUAX8q3Fb4TUZyHQ-qZx/main_es.html

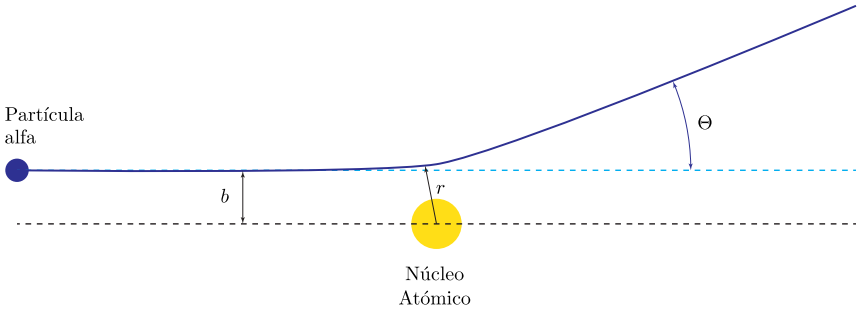


Figura 3: Modelo de Rutherford: Trayectoria hiperbólica descrita por una partícula alfa al experimentar una fuerza de repulsión eléctrica al pasar cerca de un núcleo atómico.

$$I = I_0 N_x \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4E}\right]^2 \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}\Delta\Omega. \qquad (1)$$

donde:

- Z_1: Número Z de las partículas alfa (núcleos de helio). $Z_1 = 2$.
- Z_2: Número Z del oro. $Z_2 = 79$.
- e: Carga fundamental. $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.
- ε_0: Permitividad del vacío. $\varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ F/m.
- E: Energía de las partículas del haz incidente.
- $\Delta\Omega$: Ángulo sólido subtendido por el detector.
- N_x: Densidad de núcleos dispersores por unidad de área.
- I_0: Número de partículas incidentes.

4.1. Ajuste a la función propuesta por Rutherford

La ecuación (1) es de la forma:

$$I = \frac{k}{\sin^n(\Theta/2)}$$

Ajuste los datos tomados del simulador a esta función. Desprecie las incertezas en los ángulos.

1. Determine el valor de k
2. Determine el valor de n

3. ¿Puede el modelo de Rutherford explicar el comportamiento de las partículas dispersadas? Discuta brevemente su respuesta

4.2 Estimación del radio del núcleo atómico

A partir de los datos tomados en el simulador, encuentre una cota superior mínima para el radio del núcleo atómico considerando las siguientes expresiones que se obtienen de la trayectoria hiperbólica:

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2E}\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}}$$

$$r = \frac{b\cos(\Theta/2)}{1-\sin(\Theta/2)}$$

A la cantidad b se le conoce como *parámetro de impacto*. No desprecie la incertidumbre del ángulo.

Solución problema experimental

Olimpiada iberoamericana de física 2022

3. Procedimiento experimental (6 puntos)

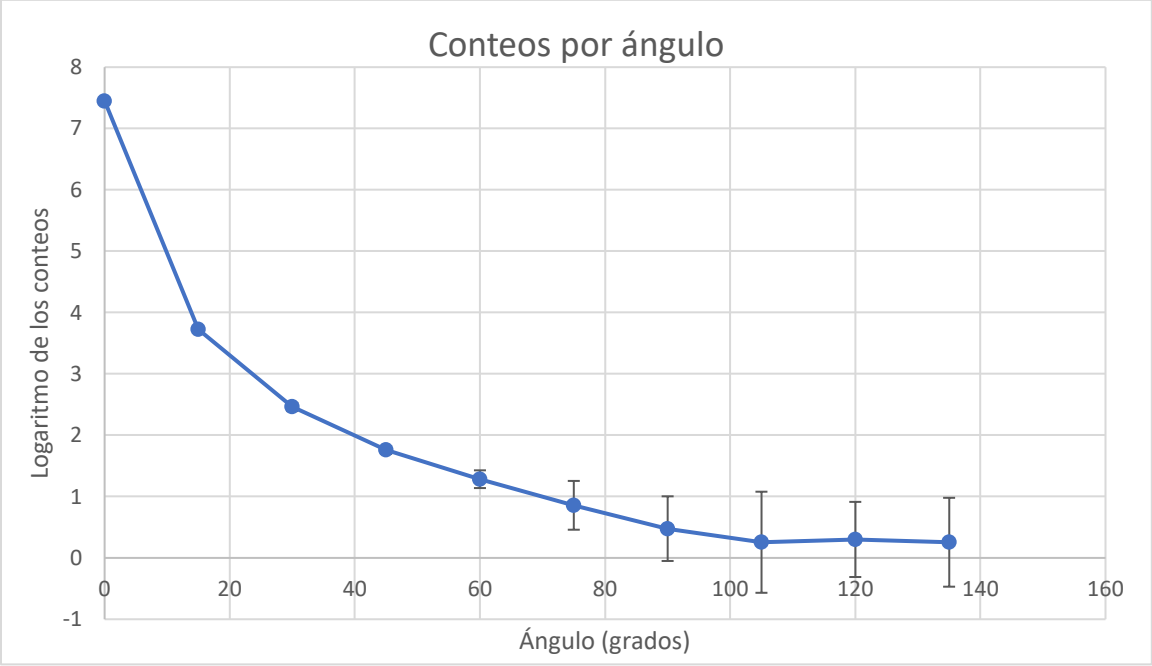
1. *Mida el número de partículas dispersadas para cada ángulo posible del detector en el experimento.* ***(3 puntos)***

   Se debe tomar al menos 5 mediciones para cada ángulo para poder obtener un valor medio, por medio de un promedio y una incerteza. Para la incertezas se puede utilizar ya sea la desviación estándar como tal o la desviación de la media, que es la desviación estándar dividida el número de mediciones.

2. *Construya una gráfica con las mediciones utilizando escala semi-logarítmica para el conteo de partículas en el detector en función del ángulo. Desprecie la incertidumbre en el ángulo.* ***(3 puntos)***

   La gráfica de estos datos, tomando el logaritmo natural del promedio de los conteos, $Z = \ln I$ y propagando el error por medio de la fórmula

$$\Delta Z = \frac{\Delta \mathrm{I}}{I}$$



4.1 Ajuste a la función propuesta por Rutherford (11 puntos)

1. *Determine el valor de k* ***(4 puntos)***

   Se puede optar por varios métodos para el ajuste. A manera de ejemplo se utiliza:

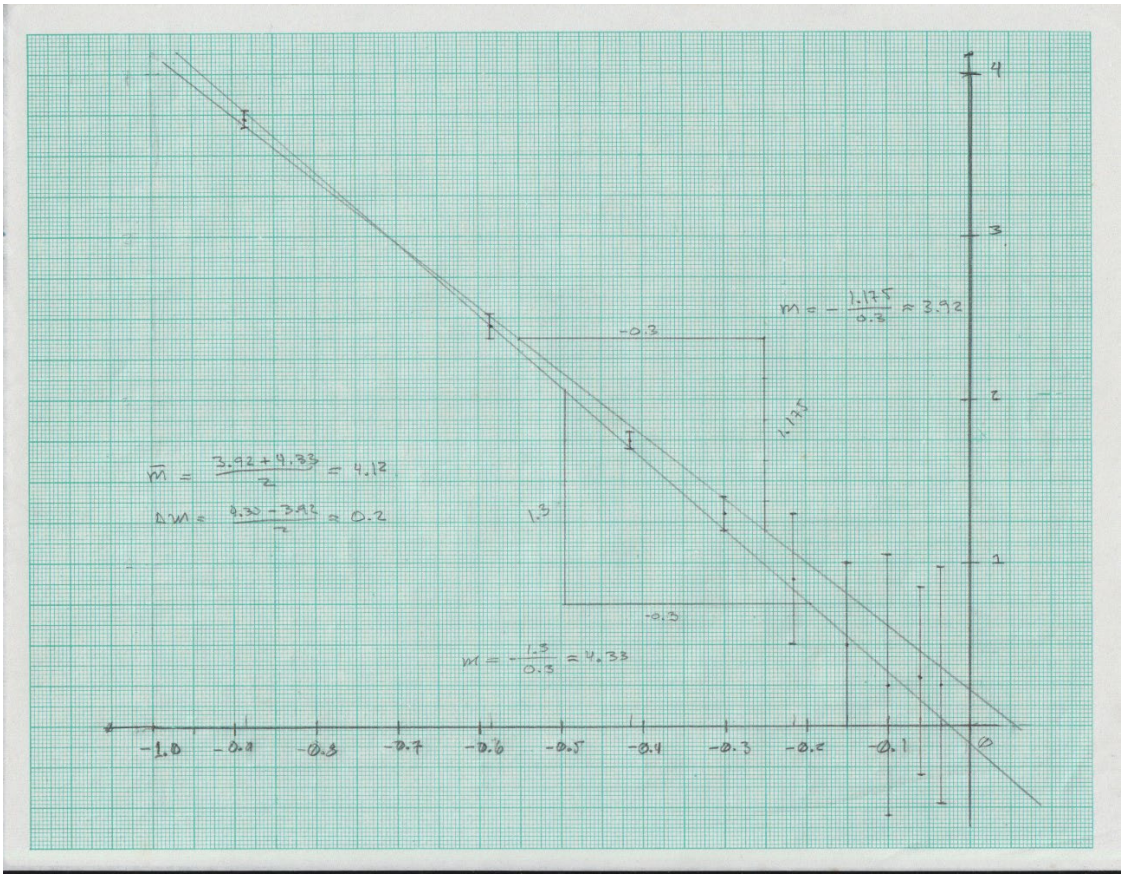
   $$\ln I = \ln k - n \ln[\sin(\Theta/2)]$$

   Graficando en papel milimétrico y utilizando la técnica de las dos rectas que puedan pasar por la mayoría de puntos dentro del rango de incerteza, se obtiene un valor para $k \approx 1.1$ con incertidumbre $\Delta k \approx 0.2$. Las unidades de *k* son conteos o adimensional.

2. *Determine el valor de n* ***(5 puntos)***

   En la misma línea del inciso anterior, se obtiene $n \approx 4.1$ y $\Delta n \approx 0.2$

   Esta es una gráfica de ejemplo. En este caso en el eje de las x se grafica el $\sin(\Theta/2)$ por lo que la pendiente queda negativa.



3. *¿Puede el modelo de Rutherford explicar el comportamiento de las partículas dispersadas? Discuta brevemente su respuesta* ***(2 puntos)***

   El valor del exponente $n = 4.1 \pm 0.2$ obtenido en el inciso anterior concuerda con el propuesto por el modelo de Rutherford con lo cual se puede concluir que este modelo si describe el comportamiento de la dispersión de partículas.

4. 2 Estimación del radio del núcleo atómico (3 puntos)

Para calcular la cota superior mínima para el radio del núcleo atómico a partir de las expresiones:

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2E}\sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta}}$$

$$r = \frac{b\cos(\Theta/2)}{1-\sin(\Theta/2)}$$

estas se evalúan con los datos proporcionados en el documento y para el mayor ángulo en el cual se encontraron conteos, en este caso Θ=135º.

Para la incerteza en el ángulo se toma en cuenta que el detector tiene un área efectiva de 4 cm² (circular) y que está a 50 cm del centro de dispersión. Con esto, se calcula que la apertura angular es de 2.58º. El ángulo, entonces varía de 133.71º a 136.29º.

Calculando los valores de *r* para estos valores se tiene:

$b(133.71°) \approx 8.8882 \times 10^{-15}$ m, $r(133.71°) \approx 4.3405 \times 10^{-14}$ m

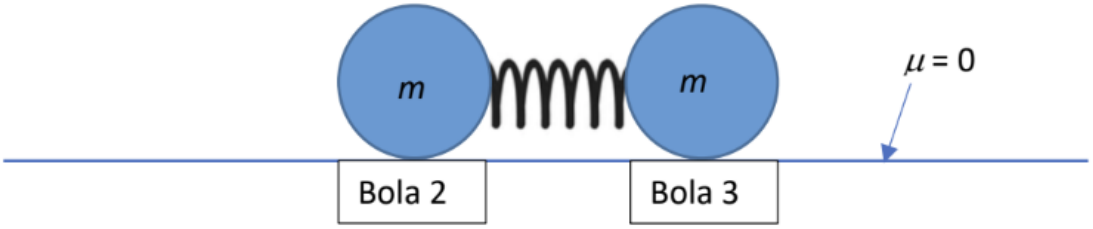
$b(136.29°) \approx 8.3397 \times 10^{-15}$ m, $r(136.29°) \approx 4.3196 \times 10^{-14}$ m

El valor medio y la incertidumbre para *r* es:

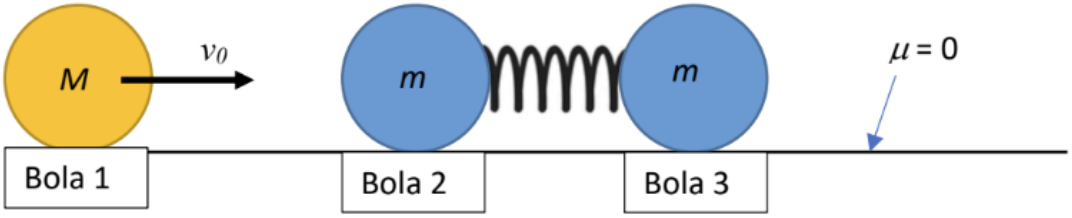
$$\bar{r} \approx 4.33 \times 10^{-14}\ \text{m}, \quad \Delta r \approx 0.01 \times 10^{-14}\ \text{m}$$

Problema Mecánica

El siguiente sistema está formado por dos bolas esféricas idénticas de masa m. Estas bolas se encuentran unidas por un resorte que posee una constante de fuerza k, el sistema se encuentra completamente en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura.



Una tercera bola, llamada Bola 1, de masa M, se traslada sin rotar hacia el sistema de la bola 2 y bola 3 con una rapidez v_0. Colisiona elásticamente de modo directamente frontal con la bola 2. La relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$.



Considere que el tiempo de colisión, llamado τ, será muy pequeño en relación con el período de oscilación T, es decir, debe considerar que $\tau << T$, donde T es el período de oscilación de la bola 2 respecto al centro de masa de las bolas 2 y 3.

a) Encuentre las velocidades finales de la bola 1 y bola 2 inmediatamente después de la colisión. (Puntuación 10%)

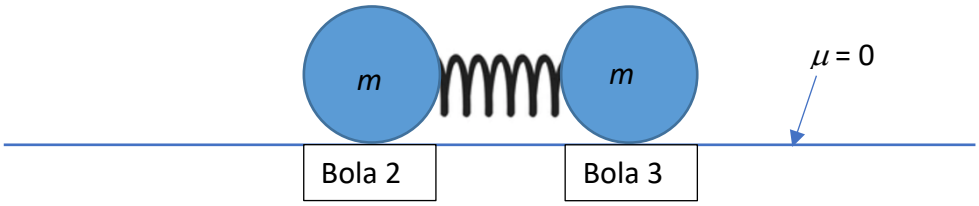
b) Encuentre la posición en función del tiempo $x_{cm}(t)$ del centro de masa de las bolas 2 y 3. (Puntuación 10%)

c) Calcule la amplitud de oscilación del movimiento de la bola 2. (Puntuación 25%).

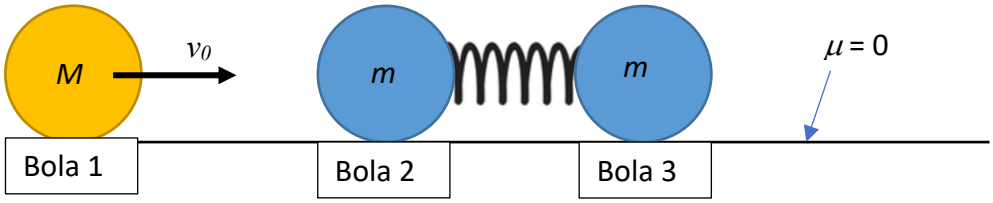
d) Encuentre de forma aproximada (graficamente) la relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$, con la cual la colisión entre la bola 1 y la bola 2 se producirá una sola vez más. (Puntuación 55%).

Problema Mecánica

El siguiente sistema está formado por dos bolas esféricas idénticas de masa m. Estas bolas se encuentran unidas por un resorte que posee una constante de fuerza k, el sistema se encuentra completamente en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura.



Una tercera bola, llamada Bola 3, de masa M, se traslada sin rotar hacia el sistema de la bola 2 y bola 3 con una rapidez v_0. Colisiona elásticamente de modo directamente frontal con la bola 2. La relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$.



Considere que el tiempo de colisión, llamado τ, será muy pequeño en relación con el período de oscilación T, es decir, debe considerar que $\tau << T$, donde T es el período de oscilación de la bola 2 respecto al centro de masa de las bolas 2 y 3.

a) Encuentre las velocidades finales de la bola 1 y bola 2 inmediatamente después de la colisión. (Puntuación 10%)

b) Encuentre la posición en función del tiempo $x_{cm}(t)$ del centro de masa de las bolas 2 y 3. (Puntuación 10%)

c) Calcule la amplitud de oscilación del movimiento de la bola 2. (Puntuación 25%).

d) Encuentre de forma aproximada, utilizando el papel milimétrico que se le proporciona, la relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$, con la cual la colisión entre la bola 1 y la bola 2 se producirá una vez más. (Puntuación 55%).

Solución

a) Como el choque es completamente elástico, debe cumplirse las siguientes dos condiciones:

$Mv_0 = Mv_1 + mv_2$ Ec .1 $\qquad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ Ec .2

Trabajando las ecuaciones 1 y 2, se obtiene para las velocidades

$v_1 = v_0 \frac{M-m}{M+m} = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ Ec .3 Puntuación (5%)

$v_2 = v_0 \frac{2M}{M+m} = v_0 \frac{2}{1+\gamma}$ Ec .4 Puntuación (5%)

b) Como se tiene la condición $\tau << T$ entonces es posible considerar que la velocidad de la bola 3 es despreciable, $v_3 \approx 0$, de manera que para el centro de masas:

$x_{cm} = \frac{m\,x_2 + m\,x_3}{2m} \longrightarrow v_{cm} = \frac{v_2}{2} = \frac{x_{cm}}{t}$

$x_{cm} = \frac{v_2\,t}{2} = v_0 \frac{2}{1+\gamma} \frac{t}{2}$

$x_{cm} = v_0\,t \frac{1}{1+\gamma}$ Ec .5 Puntuación (10%)

c) En el sistema de coordenadas del centro de masas, las bolas 2 y 3 se mueven con una ecuación dada por :

$x = A\,Sen\,(\omega\,t)$ Ec .6 Puntuación (3%)

Si la constante de fuerza del resorte es *k,* respecto al centro de masas será $2\,k$, de modo que para la frecuencia angular ω y un sistema masa resorte, se establece que :

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ Ec .7 Puntuación (7%)

La amplitud se puede encontrar por conservación de la energía justo en el momento que la bola 1 golpea a la bola 2. En este punto el resorte no se ha deformado:

$$K_2 = U_{e\ resorte}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 = \frac{1}{2}\,k'\,A^2 \qquad \text{donde } k' = 2\,k$$

Al sustituír v_2 de la ecuación 4, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2\,v_0}{1+\gamma}\right)^2 = k\,A^2$$

$$\frac{2\,m\,v_o^2}{(1+\gamma)^2} = k\,A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2\,m\,v_o^2}{(1+\gamma)^2 k}} = \frac{\sqrt{2}\,v_o}{(1+\gamma)\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\sqrt{2}\,v_o}{(1+\gamma)\,w}$$

Ec. 8
(puntuación 15%)

d) Las bolas 1 y 2 colisionarán de nuevo si se cumple que sus posiciones son iguales, es decir si:

$$x_1 = x_2$$

Econtrando x_1 :

$v_1 = \frac{x_1}{t} \longrightarrow x_1 = v_1\, t = v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t$ Ec. 9. (puntuación 7%)

Econtrando x_2 :

$$x_2 = x_{cm} + x = v_0\, t\, \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + A\, Sen(wt)$$

$x_2 = v_0\, t\, \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + \frac{\sqrt{2}\, v_0}{(1+\gamma)w}\, Sen(wt)$ Ec. 10 . (puntuación 8%)

Ahora retomando
$x_1 = x_2$

$$v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t = v_0\, t\, \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + \frac{\sqrt{2}\, v_0}{(1+\gamma)w}\, Sen(wt)$$

$$v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t = \frac{v_0 t}{(1+\gamma)}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{wt}\, Sen(wt)\right]$$

$-\frac{w\, t\, \gamma}{\sqrt{2}} = Sen\ (wt)$ Ec. 10 . (puntuación 15%)

La relación de masas γ se puede calcular analizando la ecuación 10, si se encuentra la intersección de la recta. $y = -\frac{w\, t\, \gamma}{\sqrt{2}}$, con la sinusoidal $y = Sen\ (wt)$, para esto utilizaremos el papel milimétrico. Este planteamiento tiene una ponderación de 10%

Para esta solución se trabajó con el software `desmos` encontrando un valor para la relación de masas de : $\gamma \approx 0.31$



puntuación 15%)

Aire descendiendo en la atmósfera

Uno de los patrones globales de la circulación del aire en la atmósfera es el que se conoce como célula de Hadley. En esta célula el aire húmedo asciende en el ecuador alcanzando la parte alta de la atmósfera. Una cantidad de aire se va hacia el norte y otra hacia el sur. El aire pierde humedad y ya seco desciende en latitudes alrededor de los 30º. Al llegar al suelo una parte regresa de nuevo al ecuador cerrando el ciclo de circulación. Este patrón explica en parte la existencia de regiones desérticas en las latitudes mencionadas.

En una región árida como el desierto del Sahara la atmósfera se puede considerar compuesta de aire seco, es decir, sin humedad. En tales condiciones, la temperatura de la atmósfera desciende con la altura a una razón L_a. Considere un paquete o masa de aire contenida en una esfera de radio R, a una temperatura T_0 y que se encuentra a una altura z_0 sobre el suelo, estando en equilibrio térmico con el ambiente. En general el aire no está en reposo, por lo que regularmente tiene un movimiento ascendente o descendente sobre una cierta región. Supongamos que el paquete desciende sin mezclarse y sin intercambiar calor con el ambiente que lo rodea, su temperatura aumenta a una razón L_p.

1. Asumiendo que la masa esférica de aire tiene una temperatura uniforme, encuentre la diferencia de temperatura entre la masa de aire y el ambiente cuando desciende hasta una altura z. Exprese su respuesta en términos de L_a y L_p.
2. Debido a la diferencia de temperatura, la masa de aire irradia calor hasta que alcanza nuevamente el equilibrio térmico con el ambiente. Calcule la cantidad de calor que se debe irradiar para alcanzar el equilibrio térmico, cuando el paquete llega a una altura z. Exprese su respuesta en términos de la densidad del aire ρ (que se considera constante durante el proceso) y el calor específico del aire a presión constante c_p.
3. Calcule cuánto tiempo transcurre para que la masa de aire se enfríe hasta alcanzar el equilibrio térmico. Ayuda: utilice la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma A T^4$. Adicionalmente, para no complicar la matemática del problema, estaremos asumiendo

que el enfriamiento empieza al llegar a la altura z y ocurre a temperatura constante hasta alcanzar el equilibrio térmico. Para esta pregunta utilice los siguientes datos: $L_a = 7.0$ K/km, $L_p = 10$ K/km, $z_0 = 9.0$ km, z = 0.5 km, $T_0 = -35^{\circ}$ C, R = 400 m, ρ = 1.2 kg/m^3, $c_p = 1005$ J/(kg K), σ = 5.67 × 10−8 W/(m^2 K^4).

4. Cuando los gases de efecto invernadero aumentan su concentración en la atmósfera se propicia lo que llamamos calentamiento global. Esto tiene el efecto de aumentar la altura desde la cual la masa de aire empieza su descenso. Si ahora la altura inicial es $z_0 + h$, de forma que $h = 200$ m, repita el cálculo de la pregunta 3 para esta nueva situación.

Aire descendiendo en la atmósfera

Uno de los patrones globales de la circulación del aire en la atmósfera es el que se conoce como *célula de Hadley*. En esta célula el aire húmedo asciende en el ecuador alcanzando la parte alta de la atmósfera. Una cantidad de aire se va hacia el norte y otra hacia el sur. El aire pierde humedad y ya seco desciende en latitudes alrededor de los 30°. Al llegar al suelo una parte regresa de nuevo al ecuador cerrando el ciclo de circulación. Este patrón explica en parte la existencia de regiones desérticas en las latitudes mencionadas.

En una región árida como el desierto del Sahara la atmósfera se puede considerar compuesta de aire seco, es decir, sin humedad alguna. En tales condiciones, la temperatura de la atmósfera desciende con la altura a una razón L_a. Considere un paquete o masa de aire contenida en una esfera de radio R, a una temperatura T_0 y que se encuentra a una altura z_0 sobre el suelo, estando en equilibrio térmico con el ambiente. Si el paquete desciende sin mezclarse y sin intercambiar calor con el ambiente que lo rodea, este aumenta su temperatura a una razón L_p.

(a) Asumiendo que la masa esférica de aire tiene una temperatura uniforme, encuentre la diferencia de temperatura entre la masa de aire y el ambiente cuando esta ha descendido a una altura z. Exprese su respuesta en términos de L_e y L_p.

(b) Debido a la diferencia de temperatura, la masa de aire irradia calor hasta que alcanza nuevamente el equilibrio térmico con el ambiente. Calcule la cantidad de calor que se debe irradiar para alcanzar el equilibrio térmico cuando el paquete llega a una altura z. Exprese su respuesta en términos de la densidad del aire ρ y el calor específico del aire a presión constante c_p.

(c) Calcule cuánto tiempo tarda la masa de aire enfriarse hasta alcanzar el equilibrio térmico. Ayuda: utilice la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma A T^4$, asumiendo que el enfriamiento empieza al llegar a la altura z y ocurre a temperatura constante hasta alcanzar el equilibrio térmico. Para esta pregunta utilice los siguientes datos: $L_a = 7.0$ K/km, $L_p = 10$ K/km, $z_0 = 9.0$ km, $z = 0.5$ km, $T_0 = -35°$C, $R = 400$ m, $\rho = 1.2$ kg/m^3, $c_p = 1005$ J/(kg K), $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/(m^2 K^4).

(d) Cuando los gases de efecto invernadero aumentan su concentración en la atmósfera se propicia lo que llamamos calentamiento global. Esto tiene el efecto de aumentar la altura desde la cual la masa de aire empieza su descenso. Si ahora la altura inicial es $z_0 + h$ de forma que $h = 200$ m. Repita el cálculo de la pregunta (c) para esta nueva situación.

Solución

(a) **Valor: 20 %**

El cambio de temperatura en la atmósfera es **(5 %)**

$$\Delta T_a = -L_a \Delta z, \qquad \Longrightarrow \qquad T_a = T_{a0} - L_a(z - z_0).$$

El cambio de temperatura del paquete de aire es **(5 %)**

$$\Delta T_p = -L_p \Delta z, \qquad \Longrightarrow \qquad T_p = T_{p0} - L_p(z - z_0).$$

Si el paquete y el ambiente están en equilibrio térmico a la altura inicial z_0, eso implica que $T_{a0} = T_{p0} = T_0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_a &= T_0 - L_a(z - z_0), \\ T_p &= T_0 - L_p(z - z_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Restando las ecuaciones obtenemos **(10 %)**

$$\boxed{T_p - T_a = (L_a - L_p)(z - z_0).} \tag{2}$$

(b) **Valor: 30 %**

La cantidad de calor está dada por la capacidad calorífica del aire que se escribe como **(10 %)**

$$\Delta Q = m c_p \Delta T.$$

La diferencia de temperatura está dada por (2). Escribiendo la masa en términos del volumen y la densidad, al sustituir obtenemos **(20 %)**

$$\boxed{\Delta Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0).} \tag{3}$$

(c) **Valor: 40 %**

La cantidad de calor a irradiar depende de la potencia neta P_N y del tiempo. Es decir, **(10 %)**

$$\Delta Q = P_N \, \Delta t.$$

La cantidad ΔQ está dada por (3). La potencia neta de radiación P_N es lo que emite el paquete de aire menos lo que absorbe del ambiente que lo rodea. Utilizando la ley de Stefan-Botzmann $P = \sigma A T_p^4$, la potencia neta es **(20 %)**

$$P_N = \sigma A (T_p^4 - T_a^4).$$

Despejando el tiempo Δt tenemos **(10 %)**

$$\Delta t = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0)}{\sigma A (T_p^4 - T_a^4)},$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{R\rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0)}{3\sigma (T_p^4 - T_a^4)} = 23,701 \text{ s} \approx 6.58 \text{ h},} \tag{4}$$

en donde hemos utilizado el área superficial de la esfera $A = 4\pi R^2$ y las temperaturas dadas por (1).

(d) **10 %**

Repitiendo el cálculo de la fórmula (5) ahora con $z_0 = 9.2$ km, obtenemos

$$\boxed{\Delta t = 21,991 \text{ s} \approx 6.11 \text{ h}} \tag{5}$$

Problema Iceberg Tabular

De toda el agua que hay en la Tierra, únicamente el 2.5% es agua dulce. Casi un 70% del total del agua dulce de la Tierra se encuentra formando glaciares y casquetes de hielo. Los glaciares son grandes masas de hielo que se forman por la acumulación de nieve a lo largo de muchos años (incluso siglos), y se desplazan debido a su peso. Cuando un glaciar alcanza la costa, éste continúa siendo empujado hacia el mar mientras a la vez es arrastrado por las corrientes a lo largo del suelo oceánico. Entonces forma una plataforma de hielo. Cuando llega a un punto en que el océano es lo suficientemente profundo, la plataforma de hielo comienza a flotar y este cambio de dirección genera esfuerzos que finalmente rompen su unión con el glaciar, formando lo que se conoce como un iceberg tabular.

Los icebergs tabulares pueden tener gran tamaño, su superficie superior es relativamente plana y sus bordes laterales son muy empinados (Figura 1). Al igual que cualquier otro tipo de iceberg, la mayor parte del hielo de un iceberg tabular no se encuentra por encima del agua sino debajo de su superficie.



Figura 1: Iceberg tabular (Andrew Shiva / Wikipedia / CC BY-SA 4.0)

En las últimas décadas, el tamaño de las plataformas de hielo ha disminuido considerablemente, y se han observado grandes colapsos, desprendimientos e incluso la desaparición completa de algunas de ellas. Esto ha sido particularmente grave en la Península Antártica, donde el colapso de las plataformas de hielo se relaciona con un incremento dramático de temperatura de ~ 0.5℃ por década, durante más de siete décadas debido al calentamiento global. Como consecuencia la superficie de deshielo se incrementa produciendo más fracturas en el hielo, y se produce mayor fusión en la parte inferior debido a que el agua del océano que circula debajo del hielo flotante está más caliente.

Considere un iceberg tabular con forma de un paralelepípedo recto de dimensiones $H \times W \times L$. Asuma que la densidad del hielo es $\rho_h = 0.900 \times 10^3$ kg/m^3 y que la densidad del agua de mar es $\rho_a = 1.027 \times 10^3$ kg/m^3.

1. Si el iceberg tiene la dimensión H en posición vertical, determine qué fracción de H se encuentra debajo de la superficie del agua.

Cuando un iceberg tabular se separa, toma un tiempo que las distintas fuerzas que actúan sobre él se equilibren y es posible que, en ese intervalo, se produzcan torques que harían que el iceberg fuera susceptible de voltearse y caer sobre su lado. Para que el iceberg se voltee, el paso del estado inicial al estado final sea energéticamente favorable. (Ayuda: Para que el iceberg se voltee, sus dimensiones deben ser tales que el cambio de energía entre el estado final e inicial sea tal que no se requiera entregar energía al sistema iceberg-agua desde una fuente externa).

2. Si $L > W$ y $W = \alpha H$ para el iceberg tabular y $0 < \alpha < 1$, considere los casos:

   a) el iceberg tiene inicialmente la dimensión Wen posición vertical y se voltea para tener la dimensión H en posición vertical,
   b) el iceberg tiene inicialmente la dimensión H en posición vertical y se voltea para tener la dimensión Wen posición vertical,

   y encuentre cuál de los dos favorece que el iceberg se voltee. Observación: se espera que la solución del problema se haga por argumentos de energía potencial.

3. Para el caso en que el iceberg se voltea (es decir, cuando esto es energéticamente favorable), encuentre una expresión para la magnitud del cambio total de energía del sistema iceberg-agua y, por inspección de esta ecuación o por medio de su gráfica, encuentre el valor de α para el cual el cambio de energía es máximo.

4. Si el iceberg tiene dimensiones L, $H = 1200$ m y α es la obtenida en el inciso 3, calcule la cantidad de energía que se libera al voltear el iceberg.

5. Si al voltearse el iceberg del inciso 4, éste se sumerge por debajo de su posición de equilibrio una fracción de 0.01 de su dimensión vertical, encuentre el período de oscilación del movimiento del iceberg si se desprecia la resistencia del agua.

Solución problema Iceberg Tabular

Temas evaulados:

- Leyes de Newton
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Principio de conservación
- Oscilaciones armónicas
- Teorema de Arquímedes

Problema resuelto

De toda el agua que hay en la Tierra, únicamente el 2.5% es agua dulce. Casi un 70% del total del agua dulce de la Tierra se encuentra formando glaciares y casquetes de hielo. Los glaciares son grandes masas de hielo que se forman por la acumulación de nieve a lo largo de muchos años (incluso siglos), y se desplazan debido a su peso. Cuando un glaciar alcanza la costa, éste continúa siendo empujado hacia el mar mientras a la vez es arrastrado por las corrientes a lo largo del suelo oceánico. Entonces forma una plataforma de hielo. Cuando llega a un punto en que el océano es lo suficientemente profundo, la plataforma de hielo comienza a flotar y este cambio de dirección genera esfuerzos que finalmente rompen su unión con el glaciar, formando lo que se conoce como un iceberg tabular.

Los icebergs tabulares pueden tener gran tamaño, su superficie superior es relativamente plana y sus bordes laterales son muy empinados (Figura 1). Al igual que cualquier otro tipo de iceberg, la mayor parte del hielo de un iceberg tabular no se encuentra por encima del agua sino debajo de su superficie.



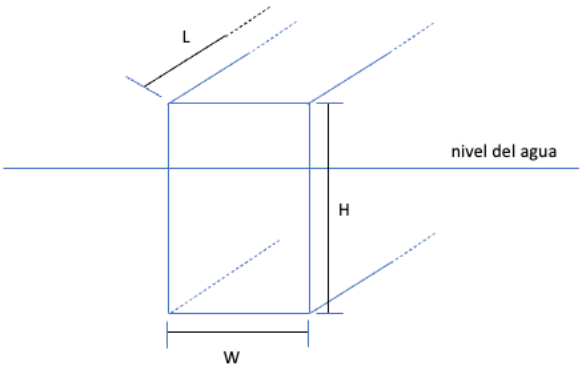
Figura 1: Iceberg tabular (Andrew Shiva / Wikipedia / CC BY-SA 4.0)

En las últimas décadas, el tamaño de las plataformas de hielo ha disminuido considerablemente, y se han observado grandes colapsos, desprendimientos e incluso la desaparición completa de algunas de ellas. Esto ha sido particularmente grave en la Península Antártica, donde el colapso de las plataformas de hielo se relaciona con un incremento dramático de temperatura de $\sim 0.5^{\circ}\mathrm{C}$ por década, durante más de siete décadas debido al calentamiento global. Como consecuencia la superficie de deshielo se incrementa produciendo más fracturas en el hielo, y se

produce mayor fusión en la parte inferior debido a que el agua del océano que circula debajo del hielo flotante está más caliente.

Considere un iceberg tabular con forma de un paralelepípedo recto de altura H, largo L y ancho W. Asuma que la densidad del hielo es $\rho_h = 0.900 \times 10^3$ kg/m^3 y que la densidad del agua de mar es $\rho_a = 1.027 \times 10^3$ kg/m^3.

1. Si el iceberg tiene la dimensión H en posición vertical, determine qué fracción de H se encuentra debajo de la superficie del agua.



$h =$ altura del iceberg que está bajo agua
$F_e = \rho_a V_d g = \rho_a WLh =$ Fuerza de empuje
$F_g = \rho_h WLH =$ Peso del hielo

$$F_e = F_g$$
$$\rho_a WLh = \rho_h WLH$$

$$h = \frac{\rho_h}{\rho_a} H = \frac{0.900 \times 10^3 kg/m^3}{1.027 \times 10^3 kg/m^3} H = 0.876H$$

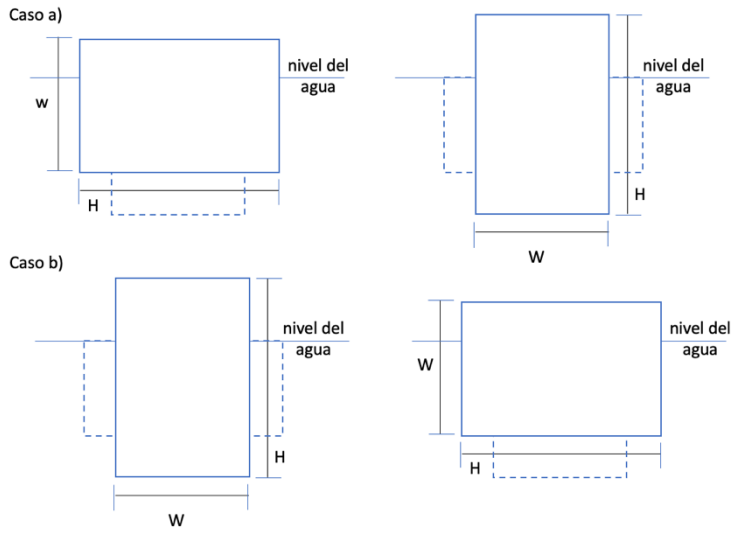
El 87.6% del iceberg se encuentra bajo agua.

Cuando un iceberg tabular se separa, toma un tiempo que las distintas fuerzas que actúan sobre él se equilibren y es posible que, en ese intervalo, se produzcan torques que harían que el iceberg fuera susceptible de voltearse y caer sobre su lado. Para que el iceberg se voltee, el paso del estado inicial al estado final sea energéticamente favorable. (Textos alternativos: Para que el iceberg se voltee, sus dimensiones deben ser tales que el cambio de energía entre el estado final e inicial sea tal que no se requiera entregar energía al sistema iceberg-agua desde una fuente externa. Para que el iceberg se voltee, el intercambio de energía entre el iceberg y el volumen desplazado de agua debe ser suficiente para pasar del estado inicial al estado final). (Sugerencia: compare únicamente el estado inicial y final del iceberg).

2. Si $L > W$ y $W = \alpha H$ para el iceberg tabular y $0 < \alpha < 1$, considere los casos:

   a) el iceberg tiene inicialmente la dimensión W en posición vertical y se voltea para tener la dimensión H en posición vertical,
   b) el iceberg tiene inicialmente la dimensión H en posición vertical y se voltea para tener la dimensión W en posición vertical,

   y encuentre cuál de los dos favorece que el iceberg se voltee.



Las figuras muestran el estado del iceberg antes y después de voltearse para los dos casos a considerar. Las dimensiones en la figura son solo ilustrativas y NO están a escala. En cualquier caso, el centro de gravedad del iceberg se desplaza al pasar de la posición inicial a la posición final: desciende en el caso *a* y asciende en el caso *b*. De la misma manera, el centro de gravedad del volumen de agua desplazado cambia de posición: un volumen de agua desplazado sube en el caso *a* y cae en el caso *b*. La línea punteada muestra los intercambios de posición del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final.

Calcularemos estos centros de gravedad con respecto a la superficie del agua:

Caso a):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W - (1 - 0.876)W = -0.376W$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H + (1 - 0.876)H = -0.376H$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376H + 0.376W)\\ &= \rho_h \alpha H^2 Lg(-0.376H + 0.376\alpha H)\\ &= -0.376\rho_h gLH^3\alpha(1-\alpha) < 0\\ &= -(0.376)(0.900 \times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha - \alpha^2)\\ &= -3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha - \alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha perdido energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)W - (-0.5(0.876)H) = -0.438(W - H) = -0.438(\alpha H - H) = 0.438H(1 - \alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_a &= \rho_a HWLg[0.438H(1-\alpha)] \\ &= 0.438\rho_h LgH^3\alpha(1-\alpha) > 0 \\ &= (0.438)(1.027\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha-\alpha^2) \\ &= 4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El agua desplazada ha ganado energía potencial gravitacional.

En este caso, la energía ganada por el agua desplazada es mayor que la energía perdida por el iceberg, lo cual indica que, para que el iceberg que se encuentra inicialmente con la dimensión W en posición vertical, se necesita entregar energía al sistema ya que la energía potencial perdida por el iceberg no es suficiente para elevar el volumen de agua desplazado. El volteo del iceberg en este caso NO es energéticamente favorable.

Caso b):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H + (1-0.876)H = -0.376H$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W + (1-0.876)W = -0.376W$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376W + 0.376H) \\ &= \rho_h \alpha H^2 Lg(-0.376\alpha H + 0.376H) \\ &= 0.376\rho_h gLH^3\alpha(1-\alpha) > 0 \\ &= (0.376)(0.900\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha-\alpha^2) \\ &= 3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha ganado energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)H - (-0.5(0.876)W) = 0.438(W-H) = 0.438(\alpha H - H) = -0.438H(1-\alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_a &= \rho_a HWLg[-0.438H(1-\alpha)] \\ &= -0.438\rho_h LgH^3\alpha(1-\alpha) < 0 \\ &= (-0.438)(1.027\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha \\ &\qquad -\alpha^2) \\ &= -4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El agua desplazada ha perdido energía potencial gravitacional.

La "caída" del volumen desplazado de agua entre el estado inicial y el estado final proporciona suficiente energía para lograr el incremento de energía potencial del iceberg y deja incluso un sobrante de energía que se transfiere al océano (una buena parte de esta energía crea un tsunami). Entonces, en este caso, el volteo del iceberg es energéticamente favorable.

3. Para el caso en que el iceberg se voltea (es decir, cuando esto es energéticamente favorable), encuentre una expresión para la magnitud del cambio total de energía del sistema iceberg-agua y, por inspección de esta ecuación o por medio de su gráfica, encuentre el valor de α para el cual el cambio de energía es máximo.

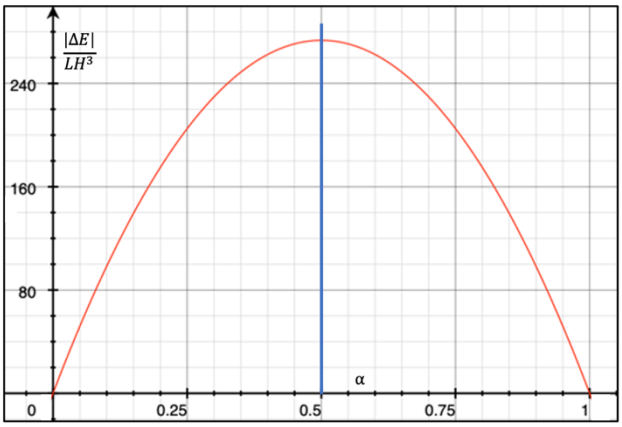
El cambio total de energía en el sistema será

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta E_h + \Delta E_a \\ &= 3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2) - 4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2) \\ &= -1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

La expresión para la magnitud del cambio total de energía será:

$$|\Delta E| = 1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)$$

La ecuación corresponde a una parábola cuyo vértice (valor máximo) se encuentra cuando $\alpha = 0.5$. (Este resultado pueden también obtenerlo por derivación.



4. Si el iceberg tiene dimensiones $L = 800$ m, $H = 1200$ m y α es la obtenida en el inciso 3, calcule la cantidad de energía que se libera al voltear el iceberg.

$$|\Delta E| = 1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha - \alpha^2) = (1093.089)(800m)(1200m)^3(0.5 - 0.5^2)$$
$$= 1.049 \times 10^9 J$$

5. Si al voltearse el iceberg del inciso 4, éste se sumerge por debajo de su posición de equilibrio una fracción de 0.01 de su dimensión vertical final, encuentre el período de oscilación del movimiento del iceberg si se desprecia la resistencia del agua.

El dato de la fracción sumergida es un distractor. No se requiere para la solución. La dimensión vertical final es W.

Sea y la distancia que el iceberg se desplaza por encima de la posición de equilibrio (positiva si se eleva y negativa si se sumerge) y w la fracción de la dimensión vertical sumergida cuando está en su posición de equilibrio ($0.876W$). Por el principio de Arquímedes, sobre el iceberg actúan su peso y el empuje del agua del mar. Si el iceberg está en su posición de equilibrio, estas fuerzas son iguales, $y = 0$ y la fuerza neta es cero:

$$F(y) = \rho_h LHWa_y = \rho_h LHW\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_h LHWg + \rho_a LHwg = 0$$

En cambio, si el iceberg se sumerge por debajo de su posición de equilibrio, la fuerza de empuje será mayor que el peso, por lo que se tendrá una fuerza neta hacia arriba. Si el iceberg se eleva por encima de su posición de equilibrio, el peso será mayor que la fuerza de empuje, produciendo una fuerza hacia abajo.

La fuerza neta será:

$$F(y) = ma_y = \rho_h LWHa_y = \rho_h LWH\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_h LWHg + \rho_a LH(w - y)g$$
$$= -\rho_h LWHg + \rho_a LHwg - \rho_a LHyg$$

Los primeros dos términos corresponden a las fuerzas en la posición de equilibrio (que se compensan) por lo que la fuerza neta será:

$$F(y) = \rho_h LWHa_y = \rho_h LWH\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_a LHgy$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico para el cual la constante k será:

$$k = \rho_a LHg$$

De modo que el período de oscilación estaría dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_h}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_h LHW}{\rho_a LHg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_h W}{\rho_a g}} = 2\pi\sqrt{\frac{w}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.876W}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0.876)(0.5H)}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(0.876)(600)}{9.81}} = 7.320s$$

Rúbrica:

Inciso	Punteo	
1	15	
2	35	10 por obtener correctamente los cambios de energía del iceberg. 10 por obtener correctamente los cambios de energía del agua desplazada 15 por explicar correctamente por qué el caso b es el energéticamente favorable
3	25	10 por obtener la ecuación correcta 7 por el análisis de la ecuación o elaboración de la gráfica 8 por obtener correctamente el valor de α
4	10	
5	20	5 por plantear la ecuación 5 por identificar correctamente la constante k 5 por plantear la ecuación del período 5 por obtener el valor del período

Válvula termoiónica

En este problema considere que el orden de las preguntas no es el orden en que el problema debe resolverse. Utilice su criterio para identificar el orden más apropiado de solución.

1. Planteamiento

Un diodo de tubo es una válvula termoiónica simple que permite el paso de corriente en una sola dirección.

El diodo consiste en un ánodo polarizado positivamente y un cátodo polarizado negativamente dentro de una cápsula al vacío. La diferencia de potencial entre ánodo y cátodo es V.

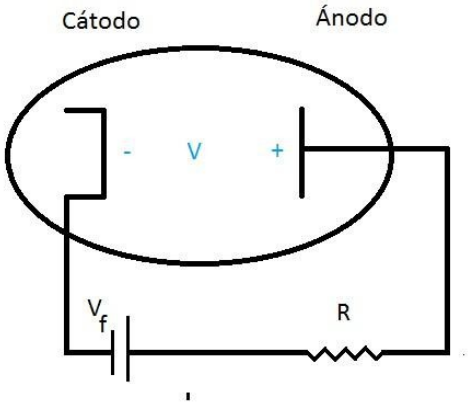


Figura 1: Válvula termoiónica simple.

Normalmente no circula corriente porque no hay portadores libres en el espacio entre el cátodo y ánodo; los portadores libres (electrones) están confinados a las partes metálicas de éstos.

Para introducir electrones que puedan ser recogidos por el campo eléctrico entre el cátodo y el ánodo es necesario que éstos tengan energía suficiente para superar la función de trabajo del material del cátodo. Se puede dotar a una fracción apreciable de electrones de la energía necesaria *calentando* al cátodo a una temperatura suficientemente alta. Un filamento que se calienta debido a la corriente que se hace circular por él sirve para este propósito.

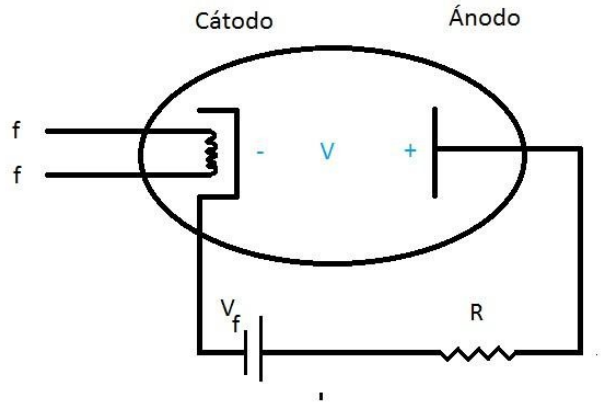


Figura 2: Válvula termoiónica polarizada.

Calcular cuál es la densidad de corriente que puede obtenerse, dado un material y temperatura, requiere calcular la energía de los electrones en un material empleando conceptos de mecánica cuántica y luego determinar el número de electrones por unidad de volumen que tienen suficiente energía (y van en la dirección correcta) para escapar.

El cálculo es elaborado, pero los resultados se condensan en lo que se denomina la *Ley de Richardson* o *Ley de Richardson-Dushman* originalmente propuesta por Owens Willans Richardson en 1911 y refinada por Richardson mismo, Dushman, y otros en el período de 1911 a 1930, al conocerse mejor la distribución de energías de electrones en metales.

La *Ley de Richardson* indica cuál es la densidad de corriente que puede obtenerse con una temperatura dada.

$$J = \lambda_r \frac{2mk^2 q_e}{(2\pi)^2 \hbar^3} T^2 e^{-\frac{\Phi_w}{kT}} \tag{1}$$

$$= \lambda_r A_0 T^{2} e^{-\Phi_{kTw}} \tag{2}$$

$$A_0 = \frac{2mk^2 q_e}{(2\pi)^2 \hbar^3} \tag{3}$$

Donde λ_r es un factor de corrección que depende del material y su estructura, m es la masa del electrón, q_e es la magnitud de su carga, T es la temperatura, $\hbar$ es la

constante reducida de Planck, Φ_w es la función de trabajo del cátodo, y k es la constante de Boltzmann, todo en el sistema internacional.

La Figura 3 muestra la dependencia de la densidad de corriente con la temperatura para dos materiales distintos.

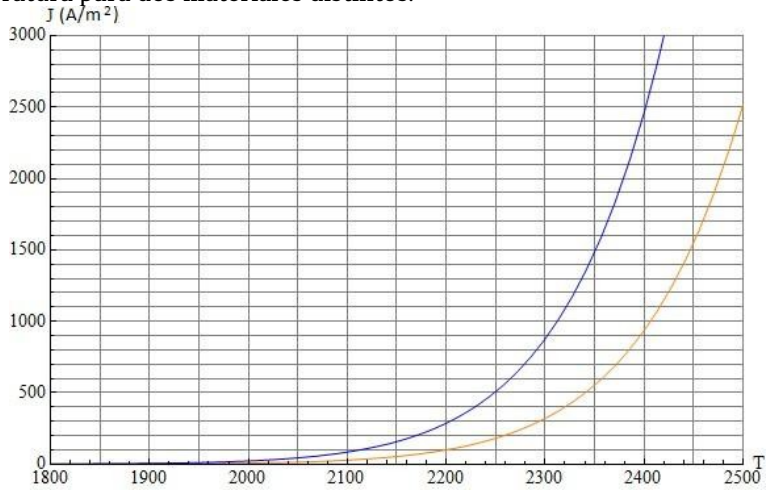


Figura 3: Ley de Richardson - Dos materiales distintos

Pregunta 1 *En la Figura 3 aparece una curva naranja y otra azul, ¿cuál corresponde al tungsteno (W) y cuál al cobre (Cu)?*

Por otro lado, los electrones distribuidos entre el cátodo y el ánodo forman lo que se denomina una *carga espacial* que limita la cantidad de carga que pueda transportarse entre el ánodo y el cátodo; la máxima densidad de corriente, suponiendo una disponibilidad infinita de electrones térmicos, depende de la diferencia de potencial V entre cátodo y ánodo, lo cual está descrito por la *Ley de Child-Langmuir*, propuesta por Clement Dexter Child en 1911, poco después de la *Ley de Richardson*

$$J = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2q_e}{m}}\frac{V^{3/2}}{d^2} \quad (4)$$

Donde, aparte de las constantes ya mencionadas, ε_0 es la permitividad del vacío,

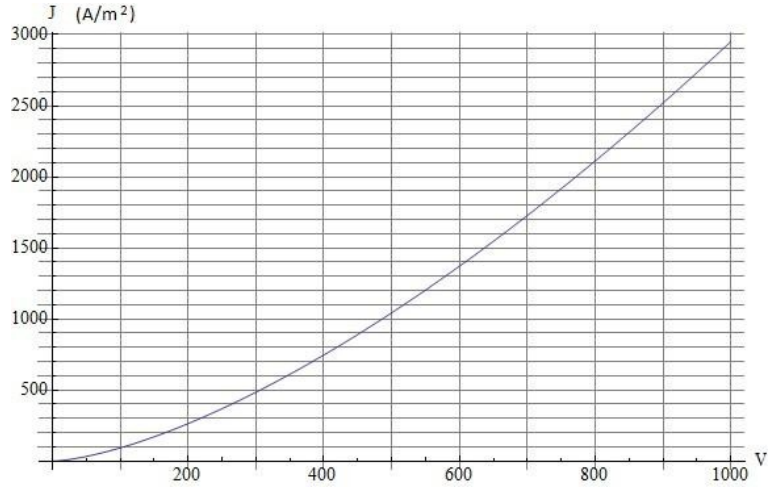


Figura 4: Ley de Child-Langmuir.

V es la diferencia de potencial entre ánodo y cátodo, y d es la distancia entre ánodo y cátodo, todo en el sistema internacional.

La relación entre densidad de corriente y diferencia de potencial prescrita por la *Child-Langmuir* se muestra en la Figura 4. En este caso no hay una dependencia con el material del que están hechos los electrodos, pero sí con la geometría; en particular, la expresión es válida para cuando el cátodo y el ánodo son placas paralelas separadas por una distancia relativamente pequeña.

2. Especificaciones

2.1. Rectificador

Antiguamente, uno de los usos de un diodo de tubo era como *rectificador* de corriente alterna, para convertirla en corriente directa y proporcionar energía a los demás componentes de un sistema electrónico (radios, televisores, etc.).

En la Figura 5 la resistencia R representa la impedancia equivalente de los circuitos que deben ser alimentados con corriente directa y la fuente de poder tiene una frecuencia de 60 Hz.

Con el circuito mostrado la corriente y el voltaje en R no cambian de polaridad (en ese sentido son “corriente directa”), pero es claro que no son constantes.

$$V_f(t) = V_m cos(120\pi t) \tag{5}$$

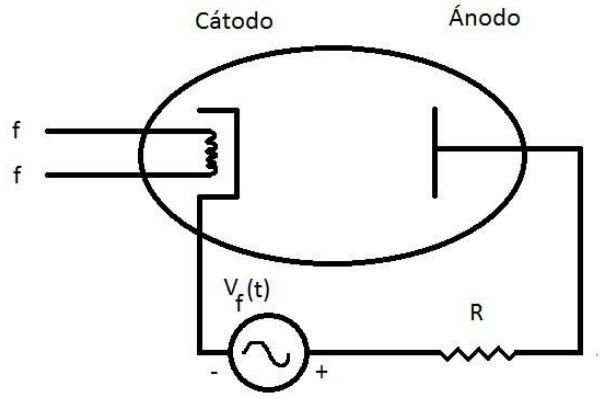


Figura 5: Rectificador de corriente alterna

Presuma que se hace circular una corriente a través del filamento para alcanzar la temperatura a la que se desea calentar el cátodo.

Suponga que este diodo debe permitir el paso de una corriente $I(t)$ cuyo valor máximo I_m es de 5 A a través de la resistencia R = 100 Ω de la figura, que el cátodo es, o de cobre (Cu), o de tungsteno (W), y que por razones prácticas la densidad máxima de corriente en el cátodo es de 0.2 A/cm^2.

Pregunta 2 *¿Qué material, cobre o tungsteno, selecciona para el cátodo?*

Pregunta 3*¿A qué temperatura debe calentarse el cátodo? (Utilice un método gráfico)*

Pregunta 4 *¿Cuál es el área del cátodo?*

Pregunta 5 *¿Qué potencial V debe haber entre ánodo y cátodo para que la corriente máxima en el circuito sea la indicada en el problema?*

Pregunta 6 *¿Cuál es el valor máximo de $V_f(t)$?*

Pregunta 7 *Para las especificaciones del problema, ¿cuál diría usted que es la potencia disipada en R?*

1. 2500 *W.*
2. 1250 *W.*
3. 625 *W.*
4. 325 *W.*
5. *Ninguna de las anteriores.*

Pregunta 8 *¿Qué implicaciones tendría (en relación a sus resultados) que la frecuencia de la fuente de alimentación fuera mucho menor a 60 Hz? ¿Y si fuera mucho mayor?*

2.2. Corriente en el circuito

La Figura 8 muestra tres posibilidades para la corriente en el circuito.

La opción *B* corresponde con $I_B(t)$ (en amperios) dada por:

$$I_B(t) = \begin{cases} 5\ cos(2\pi f_o t) & V_f(t) \geq 0 \\ 0 & V_f(t) < 0 \end{cases} \tag{6}$$

con f_o = 60 *Hz*.

Pregunta 9 *¿Cuál de las tres curvas, (A), (B), o (C), representa mejor a la corriente en el circuito?*

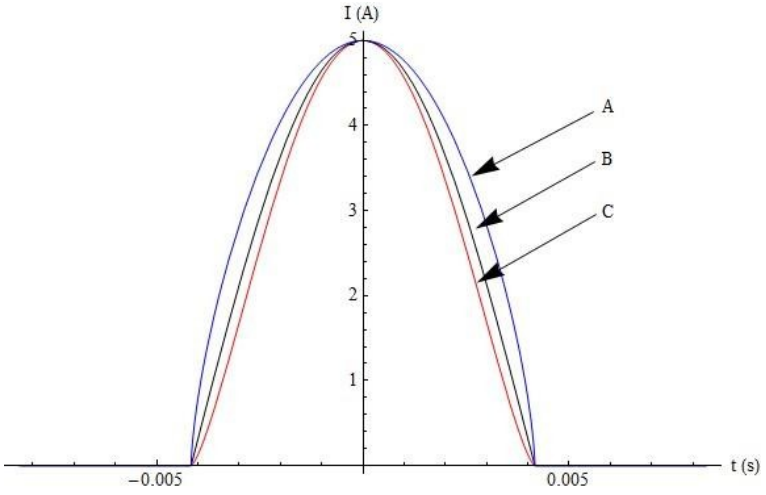


Figura 8: Corriente en el circuito

3. Preguntas

Todas las preguntas que surgen durante el planteamiento y especificaciones del problema se concentran y enumeran aquí:

1. En la Figura 3 aparece una curva naranja y otra azul, ¿cuál corresponde al tungsteno (W) y cuál al cobre (Cu)?
2. ¿Qué material selecciona para el cátodo?
3. ¿A qué temperatura debe estar el cátodo? (Utilice un método gráfico)
4. ¿Cuál es el área del cátodo?
5. ¿Cuál es el potencial V que debe aplicarse entre ánodo y cátodo para que la corriente máxima en el circuito sea la indicada en el problema?
6. ¿Cuál es el valor máximo de $V_f(t)$?
7. Para las especificaciones del problema, ¿cuál diría usted que es la potencia disipada en R?
   a) $2500W$
   b) $1250W$
   c) $625W$
   d) $325W$
   e) Ninguna de las anteriores.
8. ¿Qué implicaciones tendría (en relación a sus resultados) que la frecuencia de la fuente de alimentación fuera mucho menor a 60 Hz? ¿Y si fuera mucho mayor?
9. ¿Cuál de las tres curvas, (A), (B), o (C), representa mejor a la corriente en el circuito?

4. Datos y constantes

4.1. Constantes

Magnitud de la carga del electrón:

$q_e = 1.6021 \times 10^{-19}\, C$

Masa del electrón:

$m = 9.1093 \times 10^{-31}\ kg$

Constante de Boltzmann:

$k = 1.3806 \times 10^{-23}\ J/K$

Constante de Planck: $h =$

$6.6260 \times 10^{-34} J \cdot s$

Constante reducida de Planck:

$\hbar = 1.0545 \times 10^{-34} J \cdot s$

Permitividad del vacío:
$\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}\ \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}$

4.2. Datos del tungsteno (W)

Densidad: $\rho_W = 19.28\ g/cm^3$

Masa atómica del tungsteno: $m_W = 183.84$

Función de trabajo: $\Phi_Q = 4.5\ eV$

Factor de corrección: $\lambda_W = 1$

Punto de fusión: $T_W = 3{,}695.00\ ^\circ K$

4.3. Datos del cobre (Cu)

Densidad: $\rho_{Cu} = 8.96\ g/cm^3$

Masa atómica del cobre: $m_{Cu} = 63.546$

Función de trabajo: $\Phi_{Cu} = 4.7\ eV$

Factor de corrección: $\lambda_{Cu} = 1$

Punto de fusión: $T_{Cu} = 1{,}357.77\ ^\circ K$

4.4. Datos de la válvula

Distancia entre ánodo y cátodo: $d = 0.5\ cm$.

Válvula termoiónica

J. C., Córdova Zeceña
Universidad de San Carlos de Guatemala
Asociación Guatemalteca de Física

Julio - Septiembre de 2022

1. Planteamiento

Un diodo de tubo es una válvula termoiónica simple que permite el paso de corriente en una sola dirección.

El diodo consiste en un ánodo polarizado positivamente y un cátodo polarizado negativamente dentro de una cápsula al vacío. La diferencia de potencial entre ánodo y cátodo es V.

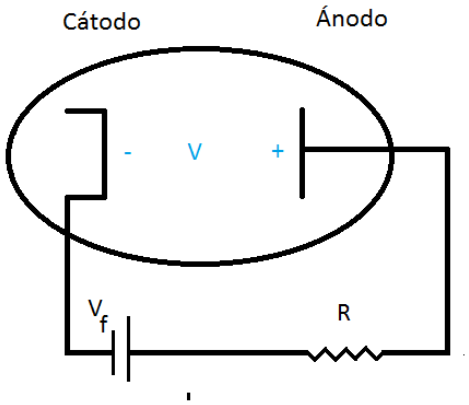


Figura 1: Válvula termoiónica simple.

Normalmente no circula corriente porque no hay portadores libres en el espacio entre el cátodo y ánodo; los portadores libres (electrones) están confinados a las partes metálicas de éstos.

Para introducir electrones que puedan ser recogidos por el campo eléctrico entre el cátodo y el ánodo es necesario que éstos tengan energía suficiente para superar la función de trabajo del material del cátodo. Se puede dotar a una fracción apreciable de electrones de la energía necesaria *calentando* al cátodo a una temperatura suficientemente alta. Un filamento que se calienta debido a la corriente que se hace circular por él sirve para este propósito.

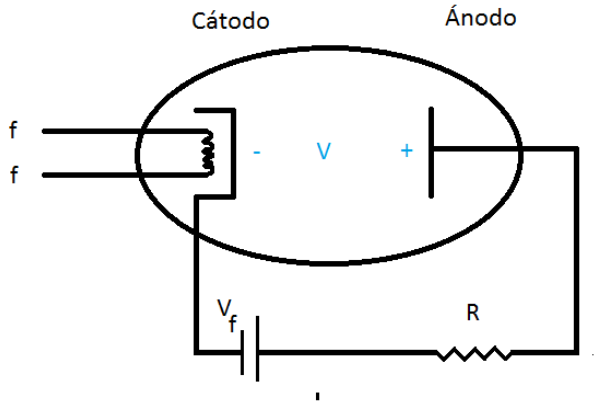


Figura 2: Válvula termoiónica polarizada.

Calcular cuál es la densidad de corriente que puede obtenerse, dado un material y temperatura, requiere calcular la energía de los electrones en un material empleando conceptos de mecánica cuántica y luego determinar el número de electrones por unidad de volumen que tienen suficiente energía (y van en la dirección correcta) para escapar.

El cálculo es elaborado, pero los resultados se condensan en lo que se denomina la *Ley de Richardson* o *Ley de Richardson-Dushman* originalmente propuesta por Owens Willans Richardson en 1911 y refinada por Richardson mismo, Dushman, y otros en el período de 1911 a 1930, al conocerse mejor la distribución de energías de electrones en metales.

La *Ley de Richardson* indica cuál es la densidad de corriente que puede obtenerse con una temperatura dada.

$$J = \lambda_r \frac{2mk^2 q_e}{(2\pi)^2 \hbar^3} T^2 e^{-\frac{\Phi_w}{kT}} \tag{1}$$

$$= \lambda_r A_0 T^2 e^{-\frac{\Phi_w}{kT}} \tag{2}$$

$$A_0 = \frac{2mk^2 q_e}{(2\pi)^2 \hbar^3} \tag{3}$$

Donde λ_r es un factor de corrección que depende del material y su estructura, m es la masa del electrón, q_e es la magnitud de su carga,T es la temperatura $\hbar$ es la constante reducida de Planck, Φ_w es la función de trabajo del cátodo, y k es la constante de Boltzmann, todo en el sistema internacional.

La Figura 3 muestra la dependencia de la densidad de corriente con la temperatura para dos materiales distintos.

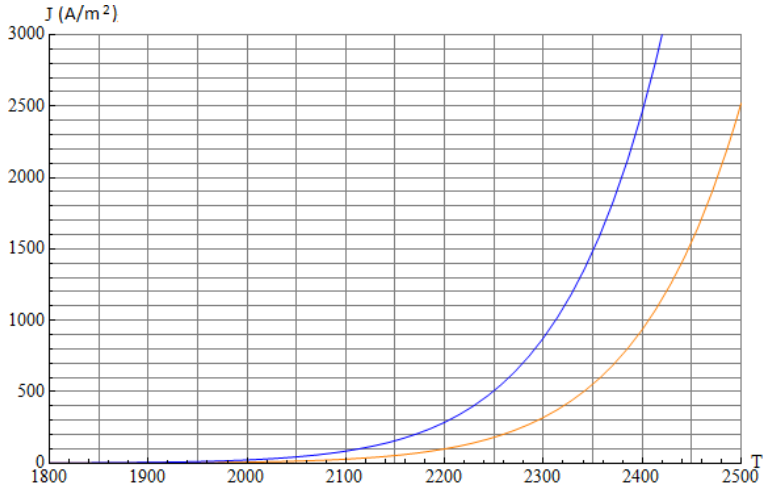


Figura 3: Ley de Richardson - Dos materiales distintos

Pregunta 1 *En la Figura 3 aparece una curva naranja y otra azul, ¿cuál corresponde al tungsteno (W) y cuál al cobre (Cu)?*

Por otro lado, los electrones distribuidos entre el cátodo y el ánodo forman lo que se denomina una *carga espacial* que limita la cantidad de carga que pueda transportarse entre el ánodo y el cátodo; la máxima densidad de corriente, suponiendo una disponibilidad infinita de electrones térmicos, depende de la diferencia de potencial V entre cátodo y ánodo, lo cual está descrito por la *Ley de Child-Langmuir*, propuesta por Clement Dexter Child en 1911, poco después de la *Ley de Richardson*

$$J = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2q_e}{m}}\frac{V^{3/2}}{d^2} \tag{4}$$

Donde, aparte de las constantes ya mencionadas, ϵ_0 es la permitividad del vacío,

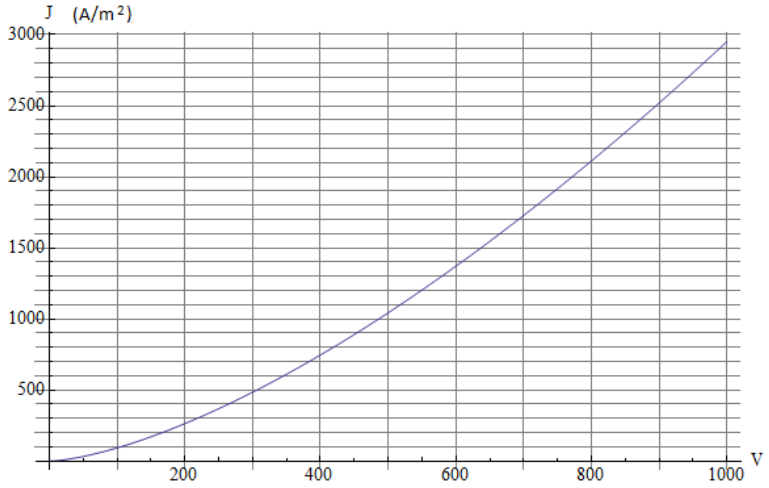


Figura 4: Ley de Child-Langmuir.

V es la diferencia de potencial entre ánodo y cátodo, y d es la distancia entre ánodo y cátodo, todo en el sistema internacional.

La relación entre densidad de corriente y diferencia de potencial prescrita por la *Child-Langmuir* se muestra en la Figura 4. En este caso no hay una dependencia con el material del que están hechos los electrodos, pero sí con la geometría; en particular, la expresión es válida para cuando el cátodo y el ánodo son placas paralelas separadas por una distancia relativamente pequeña.

2. Especificaciones

2.1. Rectificador

Antiguamente, uno de los usos de un diodo de tubo era como *rectificador* de corriente alterna, para convertirla en corriente directa y proporcionar energía a los demás componentes de un sistema electrónico (radios, televisores, etc.).

En la Figura 5 la resistencia R representa la impedancia equivalente de los circuitos que deben ser alimentados con corriente directa y la fuente de poder tiene una frecuencia de 60 Hz.

Con el circuito mostrado la corriente y el voltaje en R no cambian de polaridad (en ese sentido son "corriente directa"), pero es claro que no son constantes.

$$V_f(t) = V_m cos(120\pi t) \tag{5}$$

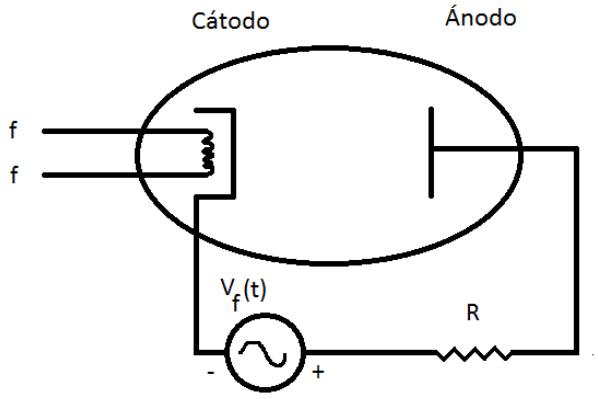


Figura 5: Rectificador de corriente alterna

Presuma que se hace circular una corriente a través del filamento para alcanzar la temperatura a la que se desea calentar el cátodo.

Suponga que este diodo debe permitir el paso de una corriente $I(t)$ cuyo valor máximo I_m es de 5 A a través de la resistencia $R = 100\ \Omega$ de la figura, que el cátodo es, o de cobre (Cu), o de tungsteno (W), y que por razones prácticas la densidad máxima de corriente en el cátodo es de 0.2 A/cm^2.

Pregunta 2 *¿Qué material, cobre o tungsteno, selecciona para el cátodo?*

Pregunta 3 *¿A qué temperatura debe calentarse el cátodo?*

Pregunta 4 *¿Cuál es el área del cátodo?*

Pregunta 5 *¿Qué potencial V debe haber entre ánodo y cátodo para que la corriente máxima en el circuito sea la indicada en el problema?*

Pregunta 6 *¿Cuál es el valor máximo de $V_f(t)$?*

Pregunta 7 *Para las especificaciones del problema, ¿cuál diría usted que es la potencia disipada en R?*

1. 2500 W.

2. 1250 W.

3. 625 W.

4. 325 W.

5. *Ninguna de las anteriores.*

Pregunta 8 *¿Qué implicaciones tendría (en relación a sus resultados) que la frecuencia de la fuente de alimentación fuera mucho menor a 60 Hz? ¿Y si fuera mucho mayor?*

2.2. Teoría y experimento

En 1913 Langmuir publicó un artículo titulado *The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum* donde, haciendo experimentos con una válvula termoiónica con cátodo y ánodo de tungsteno, obtenía curvas características de J versus T que seguían en buena medida las predichas por la *Ley de Richardson*, pero eventualmente diferían bastante de ella. Lo que ahora se conoce como *Ley de Child-Langmuir* justamente surgió del análisis de estas discrepancias y su explicación.

La Figura 6 muestra una gráfica del artículo mencionado. El circuito empleado es esencialmente el de la Figura 2, los voltajes entre ánodo y cátodo empleados se muestran en la figura.

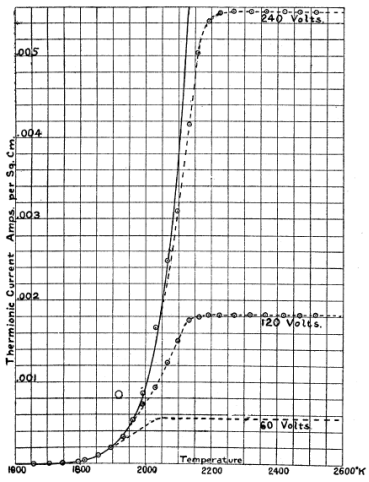


Figura 6: Curvas J-V para un diodo con cátodo de tungsteno.

La Figura 7 muestra una gráfica similar, obtenida empleando las Ecuaciones (1) y (4).

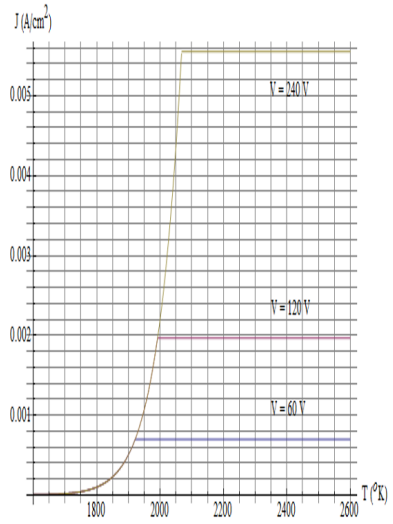


Figura 7: Característica J-V teórica

Pregunta 9 *En las Figuras 6 y 7 ¿cómo explica las regiones donde J es prácticamente constante?*

Pregunta 10 *¿Cuáles son y a qué se deben las diferencias entre los resultados experimentales (Figura 6) y las curvas teóricas (Figura 7)?*

Pregunta 11 *La densidad de corriente en el diodo parece depender, entre otras cosas, de características del cátodo, de la temperatura (T) y del voltaje (V) entre ánodo y cátodo. Obtenga una función para J que tome en cuenta estas variables y parámetros.*

2.3. Corriente en el circuito

La Figura 8 muestra tres posibilidades para la corriente en el circuito.

La opción B corresponde con $I_B(t)$ (en amperios) dada por:

$$I_B(t) = \begin{cases} 5\ cos(2\pi f_o t) & V_f(t) \geq 0 \\ 0 & V_f(t) < 0 \end{cases} \tag{6}$$

con $f_o = 60\ Hz$.

Pregunta 12 *¿Cuál de las tres curvas, (A), (B), o (C), representa mejor a la corriente en el circuito?*

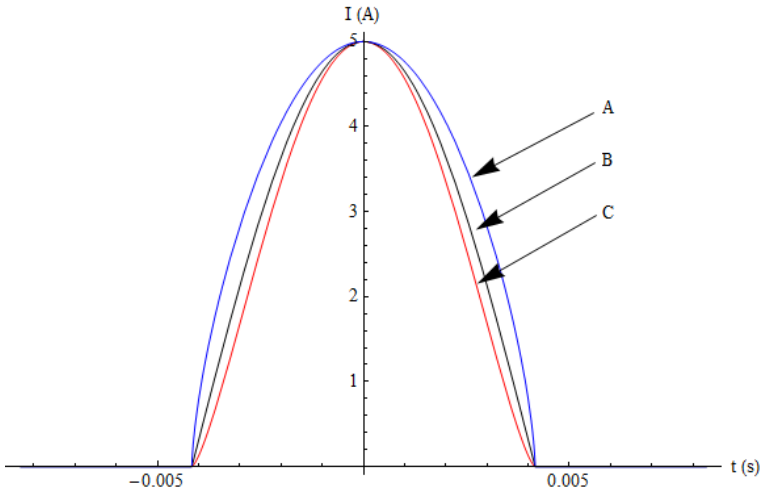


Figura 8: Corriente en el circuito

3. Preguntas

Todas las preguntas que surgen durante el planteamiento y especificaciones del problema se concentran y enumeran aquí:

1. En la Figura 3 aparece una curva naranja y otra azul, ¿cuál corresponde al tungsteno (W) y cuál al cobre (Cu)?
2. ¿Qué material selecciona para el cátodo?
3. ¿A qué temperatura debe estar el cátodo?
4. ¿Cuál es el área del cátodo?
5. ¿Cuál es el potencial V que debe aplicarse entre ánodo y cátodo para que la corriente máxima en el circuito sea la indicada en el problema?
6. ¿Cuál es el valor máximo de $V_f(t)$?
7. Para las especificaciones del problema, ¿cuál diría usted que es la potencia disipada en R?
   a) $2500W$
   b) $1250W$
   c) $625W$

d) $325W$

e) Ninguna de las anteriores.

8. ¿Qué implicaciones tendría (en relación a sus resultados) que la frecuencia de la fuente de alimentación fuera mucho menor a 60 Hz? ¿Y si fuera mucho mayor?

9. En las Figuras 6 y 7 ¿cómo explica las regiones donde J es prácticamente constante?

10. ¿Cuáles son y a qué se deben las diferencias entre los resultados experimentales (Figura 6) y las curvas teóricas (Figura 7?

11. La densidad de corriente en el diodo parece depender, entre otras cosas, de características del cátodo, de la temperatura (T) y del voltaje (V) entre ánodo y cátodo. Obtenga una función para J que tome en cuenta estas variables y parámetros.

12. ¿Cuál de las tres curvas, (A), (B), o (C), representa mejor a la corriente en el circuito?

4. Datos y constantes

4.1. Constantes

Magnitud de la carga del electrón:

$q_e = 1.6021 \times 10^{-19}\ C$

Masa del electrón:

$m = 9.1093 \times 10^{-31}\ kg$

Constante de Boltzmann:

$k = 1.3806 \times 10^{-23}\ J/K$

Constante de Planck:

$h = 6.6260 \times 10^{-34}\ J \cdot s$

Constante reducida de Planck:

$\hbar = 1.0545 \times 10^{-34}\ J \cdot s$

Permitividad del vacío:

$\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}\ \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}$

4.2. Datos del tungsteno (W)

Densidad: $\rho_W = 19.28\ g/cm^3$

Masa atómica del tungsteno: $m_W = 183.84$

Función de trabajo: $\Phi_Q = 4.5\ eV$

Factor de corrección: $\lambda_W = 1$

Punto de fusión: $T_W = 3,695.00\ ^\circ K$

4.3. Datos del cobre (Cu)

Densidad: $\rho_{Cu} = 8.96\ g/cm^3$

Masa atómica del cobre: $m_{Cu} = 63.546$

Función de trabajo: $\Phi_{Cu} = 4.7\ eV$

Factor de corrección: $\lambda_{Cu} = 1$

Punto de fusión: $T_{Cu} = 1,357.77\ ^\circ K$

4.4. Datos de la válvula

Distancia entre ánodo y cátodo: $d = 0.5\ cm$.

5. Conceptos

El problema explora los siguientes conceptos en física:

1. Función de trabajo.
2. Emisión termoiónica.
3. Carga espacial y corriente.
4. Circuitos eléctricos básicos.
5. Aplicabilidad de modelos.

6. Solución

La solución a las preguntas se aborda en el orden que permite ir generando las respuestas apropiadas, no necesariamente en el orden en que fueron planteadas las preguntas.

6.1. Curvas (1)

A una temperatura T dada, la densidad de corriente dada por la *Ley de Richardson*(Ecuación (1)) es menor cuanto mayor sea la función de trabajo. Como la función de trabajo del cobre (4.7eV) es mayor que la del tungsteno(4.5 eV), en la Figura 3 la curva "de abajo", i.e., la anaranjada, es la que corresponde con el cobre y la superior, azul, con el tungsteno. Ver Figura 9.

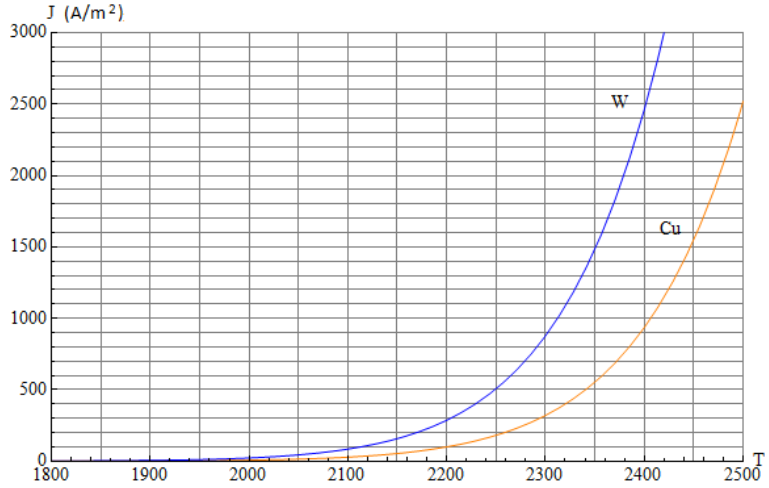


Figura 9: Ley de Richardson para cobre (Cu) y tungsteno (W).

6.2. Área del cátodo (4)

El área del cátodo A_K se obtiene de la densidad máxima de corriente que se permite en el cátodo y la corriente máxima que se especifica en el problema.

$$
\begin{aligned}
A_K &= \frac{5\,A}{0.2\,\frac{A}{cm^2}} && (7)\\
&= 25\,cm^2 && (8)\\
&= 25\,cm^2\ \left(\frac{m}{100cm}\right)^2 && (9)\\
&= 0.0025\ m^2 && (10)\\
&= 25\ cm^2 && (11)
\end{aligned}
$$

6.3. Temperatura de cátodos de tungsteno y cobre (3)

6.3.1. Por gráfica

Una forma algo burda de obtener la temperatura de cátodos de cobre y tungsteno es por medio de las Figura 3.

Se sabe, de condiciones del problema, que $J = 2000\ A/m^2$, luego la intersección de esta recta con las curvas del cobre y del tungsteno nos permite obtener la temperatura.

Viendo las Figuras 10 y 10, obtenemos que la temperatura para un cátodo de cobre debe ser poco mayor a $T = 2475\ ^\circ K$ y para uno de tungsteno debe ser un poco menor a $T = 2380\ ^\circ K$

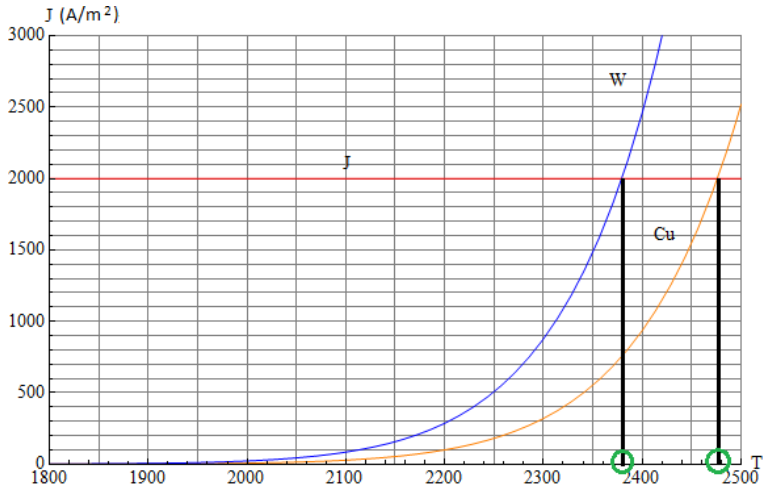


Figura 10: Temperatura por método gráfico

6.3.2. Por aproximaciones

Tungsteno Usando la Ley de Richardson se comienza con alguna temperatura y se decide subir o bajar según se necesite. (Un bueno punto de partida sería el resultado gráfico.)

El J deseado es $J = 2000\ A/m^2$.

Por ejemplo, la secuencia podría ser:

$$
\begin{aligned}
&T = 1000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 2.52322 \times 10^{-11}\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy pequeño; incrementar la temperatura.} \\
&T = 2000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 22.0279\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy pequeño; incrementar la temperatura.} \\
&T = 3000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 298407\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy grande; decrementar la temperatura.} \\
&T = 2500\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 6376.54\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy grande; decrementar la temperatura.} \\
&\quad \vdots \\
&T = 2379.2085K
\end{aligned}
$$

Cobre Al igual que antes, usamos la Ley de Richardson y vamos probando. El J deseado es $J = 2000\ A/m^2$.

$$
\begin{aligned}
&T = 1000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 2.47769 * 10^{-12}\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy pequeño; incrementar la temperatura.} \\
&T = 2000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 6.90271\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy pequeño; incrementar la temperatura.} \\
&T = 3000\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 137670\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy grande; decrementar la temperatura.} \\
&T = 2500\ K \\
&J = \lambda_r A_0 T^2 e^{\frac{\Phi_w}{kT}} \\
&\quad = 2520.12\ A/m^2 \\
&\quad \textit{Muy grande; decrementar la temperatura.} \\
&\quad \vdots \\
&T = 2475.96K
\end{aligned}
$$

6.3.3. Por iteraciones

Otra manera sería despejando T de la Ley de Richardson:

$$T = \frac{\Phi_{eV} qe}{k \ln\left(\frac{\lambda A_0 T^2}{J}\right)} \tag{12}$$

Definimos

$$g(T) = \frac{\Phi_{eV} qe}{k \ln\left(\frac{\lambda A_0 T^2}{J}\right)} \tag{13}$$

Y entonces tenemos

$$T = g(T) \tag{14}$$

Es decir, T es un punto fijo de la función $g(T)$ y podemos obtener T iterando.

Tungsteno Usamos la función de trabajo del tungsteno, Φ_W, y el factor de corrección λ_W.

$$\begin{aligned} T &\leftarrow 1000\ K \\ g(T) &= 2583.25K \\ T &\leftarrow 2583.25\ K \\ g(T) &= 2361.5K \\ T &\leftarrow 2361.5\ K \\ g(T) &= 2380.83K \\ T &\leftarrow 2380.83\ K \\ g(T) &= 2379.06K \\ T &\leftarrow 2379.06\ K \\ g(T) &= 2379.22K \\ T &\leftarrow 2379.22\ K \\ g(T) &= 2379.21K \\ T &\leftarrow 2379.21\ K \\ g(T) &= 2379.21K \\ T &\leftarrow 2379.21\ K \end{aligned} \tag{15}$$

Cobre Usando la iteración, pero aplicando los valores de Φ_{eV} y λ del cobre:

$$g(T) = \frac{\Phi_{eV} qe}{k \ln\left(\frac{\lambda A_0 T^2}{J}\right)} \tag{16}$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
T &\leftarrow 1000\ K \\
g(T) &= 2698.06K \\
T &\leftarrow 2698.06\ K \\
g(T) &= 2456.8K \\
T &\leftarrow 2456.8\ K \\
g(T) &= 2477.71K \\
T &\leftarrow 2477.71\ K \\
g(T) &= 2475.8K \\
T &\leftarrow 2475.8\ K \\
g(T) &= 2475.97K \\
T &\leftarrow 2475.96\ K \\
g(T) &= 2475.97K \\
T &\leftarrow 2475.96\ K \\
g(T) &= 2475.97K \\
T &\leftarrow 2475.96\ K
\end{aligned}
\tag{17}
$$

6.4. Selección de material (2)

Elemento	**Temperatura de cátodo** $°K$	**Temperatura de fusión** $°K$
Tungsteno	2379.21	3695.00
Cobre	2475.96	1357.77

Cuadro 1: Temperaturas de filamento y de fusión.

El material que debe seleccionarse es el **tungsteno**; el cobre se fundiría antes de alcanzar la temperatura de cátodo deseada.

6.5. Diferencia de potencial entre ánodo y cátodo (5)

Ahora, usando la Ley de Child-Langmoir y la distancia dada entre ánodo y cátodo, obtenemos la diferencia de potencial en la válvula.

$$
\beta = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2q_e}{m}} \tag{18}
$$

$$V = \left(\frac{J}{\beta} d^2\right)^{2/3} \tag{19}$$

$$= 771.37\ V \tag{20}$$

6.6. Valor máximo de voltaje de la fuente (6)

El voltaje máximo de la fuente se obtiene por *Ley de Kirchoff*, $V_f(t)$ es:

$$\begin{aligned} max\left(V_f(t)\right) &= V + IR \\ &= 1271.37\ V \end{aligned} \tag{21}$$

6.7. Curva de corriente (12)

Mientras el voltaje de la fuente, $V_f(t)$ sea negativo el ánodo también será negativo respecto al cátodo y no circula ninguna corriente. Este hecho no sirve para discriminar qué curva, A, B, o C, es la correcta porque todas tienen esta característica.

La curva de referencia, B, se obtendría si la relación entre voltaje del diodo y corriente (V/I) fuera una constante (durante el semiciclo en el que $V_f(t) > 0$), de manera que el diodo se vería sólo como una resistencia en serie con R.

Sin embargo, por *Ley de Richardson*, tenemos:

$$J = \frac{\beta}{d^2} V^{3/2} \tag{22}$$

$$I = J\ d^2 = \beta V^{3/2} \tag{23}$$

y la "resistencia"del diodo, R_d tiene la forma:

$$R_d = \frac{V}{I} = \frac{1}{\beta\sqrt{V}} \tag{24}$$

La resistencia del diodo es mínima cuando $V_f(t)$ es máxima y a medida que $V_f(t)$ disminuye la resistencia R_d se incrementa, dejando pasar menos corriente que en el caso de que R_d fuera constante e igual al valor mínimo que alcanza.

Luego, la curva C de la Figura 8 es la que mejor representa a la corriente en el circuito.

6.8. Potencia disipada en la resistencia (7)

Ya que $I = 5\ A$ es la máxima corriente del circuito y éste está excitado por un voltaje cosenoidal, se podría pensar que la potencia disipada en R es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} I^2 R \\ &= \frac{5^2}{2} \times 100 \\ &= 1250\ W \end{aligned} \tag{25}$$

Sin embargo esto sería incorrecto en parte porque el diodo representa un *rectificador de media onda* y entonces sólo entrega potencia en la mitad del período de la fuente.

Tentativamente uno podría entonces corregir y proponer:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} I^2 R \right) \\ &= 625\ W \end{aligned} \tag{26}$$

Esta solución tampoco es correcta, principalmente porque el diodo se comporta como una *resistencia variable* que disminuye su resistencia a medida que el voltaje aplicado aumenta, por lo que la corriente instantánea que circula por el circuito es menor que la circularía si el diodo representara una resistencia constante. Luego se disipa menos potencia que $625\ W$.

La opción correcta entonces es $(7c)$ *Ninguna*. La explicación:

"La no linealidad del diodo hace que éste permita la circulación de corrientes menores a las que se esperarían si la relación entre voltaje aplicado a éste y la corriente que circula por el mismo fuera lineal, luego, se disipa menos potencia que $625\ W$*."*

Nótese que si se resuelve primero la Pregunta (12), se puede llegar más rápido a la respuesta de esta pregunta.

6.9. Implicaciones de la frecuencia (8)

Si la frecuencia fuera menor que 60 Hz, la misma se acerca más a las condiciones de corriente continua para las cuales fue desarrollada la *Ley de Child-Langmuir*, i.e., los resultados serían más exactos (dentro de las aproximaciones y presunciones bajo las cuales se derivaron las leyes de Richardson y Child-Langmuir).

Si la frecuencia es muy alta, las placas del diodo se ven más como un capacitor, por lo que su impedancia disminuye y eventualmente es despreciable respecto a la resistencia R del circuito. A frecuencias muy altas el circuito está compuesto, prácticamente, por solo una resistencia.

6.10. Regiones de J constante (9)

En la gráfica experimental de Langmuir (Figura 6) así como en la gráfica teórica (Figura 7), las regiones de J constante resultan de que el potencial entre ánodo y cátodo no es suficiente para evacuar los electrones termoemitidos disponibles. De hecho esta observación, y el posterior cálculo de la máxima densidad de corriente posible de evacuar dado un potencial entre ánodo y cátodo, fue lo que condujo a la *Ley de Child-Langmuir*.

La respuesta esperada va en el orden de:

Para una diferencia de potencial entre ánodo y cátodo, hay una densidad de corriente máxima dada por la Ley de Child-Langmuir, de manera que aunque hayan más que suficientes electrones térmicos, la corriente está limitada por el potencial aplicado al diodo.

6.11. J en función de T y V (11)

La densidad de corriente J depende de la temperatura T del cátodo, y el voltaje entre ánodo y cátodo V.

La temperatura T junto con la función de trabajo Φ_w y factor de corrección λ determina la máxima disponbilidad de electrones por unidad de área por unidad de tiempo debido a emisión térmoiónica, lo cual está expresado por la *Ley de Richardson*.

El voltaje entre ánodo y cátodo V, por otro lado, determina (*Ley de Child-Langmuir*)la máxima densidad de corriente que puede transportarse, dada una separación d entre cátodo y ánodo, suponiendo disponibilidad infinita de portadores (electrónes térmicos).

La densidad de corriente J está determinada por el factor limitante, o la insuficiencia de electrones térmicos, o la insuficiencia de un campo eléctrico (en proporción al potencial entre cátodo y ánodo) para evacuarlos.

Así:

$$J(T, V, \Phi_w, \lambda, d) = min\left(\lambda_r \frac{2mk^2 q_e}{(2\pi)^2 \hbar^3} T^2 e^{-\frac{\Phi_w}{kT}}, \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2q_e}{m}}\frac{V^{3/2}}{d^2}\right) \qquad (27)$$

6.12. Diferencias entre curvas experimentales y teóricas (10)

La diferencia entre curvas experimentales y teóricas resulta de varios hechos que se enumeran aquí en orden de importancia:

1. Presunciones en la *Ley de Child-Langmuir*. La ley se deriva suponiendo una disponibilidad infinita de electrones térmicos, no toma en cuenta que éste puede no ser el caso (a medida que T es muy grande, esto es menos importante).
2. Presunciones en la *Ley de Richardson*. La ley presume que $\Phi_w >> kT$, cuando esto no es el caso se presentan discrepancias.
3. Incertezas en datos experimentales o su registro. Los datos, en las gráficas experimentales de Langmuir, no presentan barras de incertezas que permitan una comparación más objetiva entre datos experimentales y teóricos.

7. Evaluación

7.1. Elementos de evaluación

Los elementos de evaluación son aspectos generales que se desea evaluar:

- Comprensión del problema. El trabajo presentado muestra que se comprende qué se pregunta.
- Estructura de la solución. El desarrollo es lógico, ordenado, y completo.
- Selección de datos. Se emplean los datos necesarios y se obvian aquellos que no lo son.
- Aplicación de conceptos. Los conceptos físicos aplicados son los apropiados para obtener las respuestas a las preguntas planteadas.
- Operatoria y aplicación de métodos. Los métodos empleados (solución de ecuaciones, aproximaciones sucesivas, métodos gráficos, etc.) son consistentes con la pregunta o preguntas que se desea resolver.
- Discriminación. El trabajo realizado fundamenta la toma decisiones.
- Extrapolación. Se demuestra que la comprensión del fenómeno permite inferir las implicaciones de variar condiciones del problema, sin necesariamente hacer una análisis exhaustivo o detallado.
- Exactitud de la respuesta. La respuesta presentada es correcta y dentro de la exactitud esperada.

Las preguntas se diseñan a manera de poder evaluar uno o más aspectos y su ponderación relativa debe estar en función de los aspectos de evaluación que se prueban con la pregunta y la dificultad intrínseca de la misma.

7.2. Ponderación de preguntas

Para fijar la ponderación de cada pregunta se asignan pesos entre 1 y 5 según los aspectos que se evalúan o exhiben con la misma, tomando en cuenta también la dificultad de la pregunta.

Preguntas por número			
No.	Pregunta	No.	Pregunta
1	Identificación de curvas	7	Potencia disipada
2	Selección de material	8	Implicaciones de la frecuencia
3	Temperatura del cátodo.	9	Regiones de J constante
4	Área del cátodo	10	Diferencias teórica y experimental
5	Potencial en el diodo	11	Función "completa"de J
6	Potencial de la fuente	12	Corriente en el circuito

Asignación de puntos por pregunta													
No.	Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Comprensión del problema	1	2	4	1	2	3	3	3	3	3	3	3
2	Estructura de la solución.	0	1	4	0	0	2	1	0	0	2	2	0
3	Selección de datos	0	1	4	1	1	2	0	0	0	0	3	0
4	Aplicación de conceptos	2	3	4	1	1	3	3	3	2	3	2	3
5	Operatoria y aplicación de métodos	0	0	4	1	2	2	1	0	0	0	1	0
6	Discriminacion	0	3	0	0	0	0	3	2	0	0	0	3
7	Extrapolación	0	0	0	0	0	0	3	3	0	2	0	0
8	Exactitud	1	1	4	2	3	3	0	1	0	1	1	1
9	Dificultad	1	1	4	1	2	2	2	2	1	2	2	2
	Totales	5	12	28	7	11	17	16	14	6	13	14	12
	Puntos	3	8	18	5	7	11	10	9	4	8	9	8

7.3. Guías para la calificación

Se presenta una guía que auxilie al calificador sobre qué buscar en las respuestas y cómo asignar puntos.

Ninguna calificación puede ser negativa, luego el mínimo es 0.

Por otro lado, en algunas preguntas se sugiere la asignación de puntos adicionales como bonificación por exhibir conocimiento o intuición especial.

Algunas evaluaciones proponen ir construyendo la nota sumando puntos según elementos mostrados en la respuesta, mientras que en otras se sugieren rangos de puntos de acuerdo con elementos evidenciados en las respuestas.

En cualquier caso el criterio del calificador es importante y esta guía sólo pretende coadyuvar a que la asignación de nota sea lo más objetiva posible.

7.3.1. Identificación de curvas (1) - 3 puntos

1. Muestra gráfica marcada correctamente: Sumar 1 puntos.
2. Explica correctamente: Sumar 2 puntos.
3. No hay congruencia entre explicación y marcas en gráfica: Restar 3 puntos.

La calificación es el mínimo entre entre los puntos sumados y 0 (no se puede obtener calificación negativa).

7.3.2. Selección de material del cátodo (2) - 8 puntos

Si comienza con temperaturas correctas de cátodos, definir $\alpha = 1$ De lo contrario, asignar un valor a este factor entre 0 y 0.5, dependiendo de lo mal que puedan estar las condiciones iniciales.

Si el trabajo muestra la comparación de temperaturas con la temperatura de fusión de los materiales, la nota preliminar será 8.

Si equivoca las comparaciones (compara temperatura de tungsteno con temperatura de fusión del cobre o viceversa), la nota preliminar será 0.

La nota del problema es el producto entre α y la nota preliminar.

Si falla en seleccionar correctamente el material basado en las comparaciones, la nota será 0.

7.3.3. Temperatura del cátodo (3) - 18 puntos

El problema se divide en 9 puntos para el cálculo de la temperatura en tungsteno y 9 puntos para el cálculo de la temperatura en el cobre.

La asignación de estos 9 puntos (por material) es:

1. Si empleó sólo el método gráfico y obtuvo un resultado consistente: 7 puntos.
2. Si empleó el método de aproximaciones y obtuvo un resultado correcto con dos decimales: 9 puntos.

3. Si empleó el método de secuencias y obtuvo un resultado correcto con dos decimales: 9 puntos puntos + 5 puntos de bonificación.
4. Resultado numérico correcto con un decimal: 8 puntos.
5. Resultado numérico correcto en números enteros: 4 puntos.
6. Si el resultado es de menor exactitud o incorrecto: 0 puntos.

Si el resultado es incorrecto: 0 puntos

7.3.4. Área del cátodo (4) - 5 puntos

Este problema sólo requiere tener clara la relación entre densidad de corriente y corriente.

1. Respuesta correcta, numérica y dimensionalmente: 5 puntos.
2. Respuesta numérica, sin dimensionales: 2 puntos.
3. Respuesta numérica correcta, dimensionales equivocadas: 1 punto.
4. Respuesta numéricamente incorrecta: 0 puntos.

7.3.5. Diferencia de potencial entre ánodo y cátodo (5) - 7 puntos

Esta pregunta involucra despejar el voltaje en la *Ley de Child-Langmuir* y ser cuidadoso en las dimensionales y operatoria.

1. Respuesta numérica y dimensionalmente correcta: 7 puntos.
2. Respuesta con alguna deficiencia: Entre 0 y 5 puntos.

7.3.6. Valor máximo de voltaje de la fuente (6) - 11 puntos

Se espera que se use la *Ley de Kirchoff* de voltajes para plantear la ecuación y que despeje el valor máximo de voltaje de la fuente.

1. Respuesta numérica y dimensionalmente correcta: 11 puntos.
2. Respuesta con alguna deficiencia: Entre 0 y 7 puntos.

7.3.7. Potencia disipada en la resistencia (7) - 10 puntos

La pregunta requiere una explicación apropiada, la cual puede estar respaldada matemáticamente o conceptualmente (aunque haciendo referencia a ecuaciones o leyes pertinentes).

1. Respuesta fuertemente soportada matemáticamente: 10 puntos + 3 puntos de bonificación.
2. Respuesta satisfactoriamente soportada matemáticamente: 10 puntos
3. Respuesta con alguna deficiencia: Entre 0 y 7 puntos.

7.3.8. Implicaciones de la frecuencia (8) - 9 puntos

1. Respuesta muestra que se reconoce el efecto de altas y bajas frecuencias: 9 puntos.
2. Respuesta muestra conocimiento parcial del papel de la frecuencia en el problema: 0 a 6 puntos.

7.3.9. Regiones de J constante (9) - 4 puntos

1. Respuesta indica que se identifica el voltaje del diodo como factor limitante (no se establece un campo eléctrico que pueda evacuar todos los electrones térmicos disponibles) de la densidad de corriente: 4 puntos.
2. Otras respuestas: 0 puntos.

7.3.10. Diferencias entre curvas experimentales y teóricas (10) - 8 puntos

1. Respuesta identifica el incumplimiento con presunciones en la Ley de Child-Langmuir (que no se dispone de una cantidad ilimitada de electrones térmicos) como principal causa de las diferencias: Sumar 5 o 6 puntos.
2. Respuesta identifica el incumplimiento con presunciones en Ley de Richardson (que Φ_w no sea mucho mayor que$k\ T$) como causa complementaria de las diferencias: Sumar 2 puntos.
3. Respuesta propone que el registro experimental pudiera ser incorrecto: Sumar 1 punto.

La calificación máxima de 8 puntos no debe ser excedida.

7.3.11. J en función de T y V (11) - 9 puntos

1. El desarrollo propone correctamente que la densidad de corriente está limitada por la temperatura, o por la diferencia de potencial en el ánodo: 9 puntos.
2. Desarrollos parciales: Entre 0 y 6 puntos.

7.3.12. Curva de corriente (12) - 8 puntos

1. La respuesta evidencia que la selección de curva representativa de la corriente en el circuito está fundamentada en la comprensión del fenómeno: 8 puntos.
2. La explicación es en general correcta, pero incompleta o ambigua en algunos aspectos: Entre 4 y 7 puntos.
3. La explicación es más una suposición intuitiva que una justificación lógica: Entre 0 y 4 puntos.

Referencias

[1] Tsymbal, E. Y., *Physics 927 - Section 7: Free electron model*, Download:https://unlcms.unl.edu/cas/physics/tsymbal/teaching/

[2] Langmuir, Irving. "The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum."Physical Review 2.6 (1913): 450.

Problema experimental: Circuitos de filtro paso bajo-paso alto

Introducción

Desde el campo de la electrónica y el procesamiento de señales, es que surgen los circuitos de paso alto y paso bajo para permitir modificar y controlar la respuesta de una señal en función de su frecuencia.

Un circuito de paso bajo, se define por el paso de señales de bajas frecuencias mientras se atenúa o bloquea las frecuencias altas, un mecanismo valioso para suavizar o eliminar componentes no deseados de alta frecuencia en una señal, como ruido o interferencias.

Por su parte, un circuito de paso alto, permite el paso de señales con frecuencias altas mientras atenúa o bloquea las frecuencias bajas. Esto significa que los circuitos de paso alto son particularmente útiles cuando se desea resaltar o enfatizar las partes más agudas de una señal, como los armónicos o los detalles de alta frecuencia.

Su estructura se basa de componentes, como resistencias, capacitores e inductores, que interactúan para crear las características de paso alto o paso bajo.

Para ello, estos circuitos pueden ser representados de forma gráfica, a través de un diagrama Bode, que consiste de una representación gráfica que muestra la respuesta en frecuencia de un sistema. A través de estos diagramas se puede observar cómo el circuito atenúa o deja pasar las señales según su frecuencia.

Con los diagramas Bode se pueden entender comportamientos del sistema ante diferentes frecuencias y con ello crear diseños capaces de filtrar y procesar señales adecuadamente, tal y como lo muestra la Figura 1.

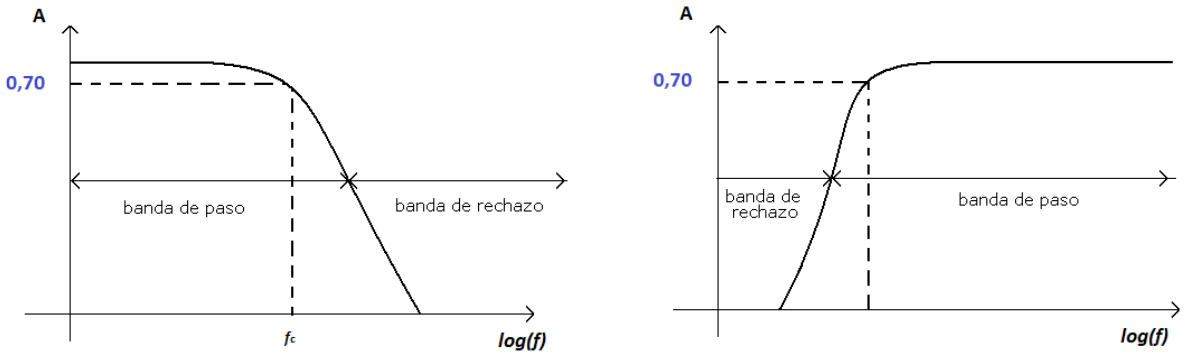


Figura 1. Diagrama Bode para circuito de paso bajo y paso alto.

Considere que la frecuencia de corte se cumple cuando $V_{salida} = 0{,}7V_{entrada}$

(cc) BY-NC-SA

En los circuitos paso bajo y paso alto, podemos entender cómo se comporta el sistema ante diferentes frecuencias y, de esta manera, diseñar circuitos eficientes para filtrar y procesar señales adecuadamente.

Algunas aplicaciones para los circuitos de paso bajo son

- ✓ Procesamiento de audio en altavoces.
- ✓ Filtros antialiasing
- ✓ Comunicaciones (filtro de eliminación de interferencias)

Como parte de las aplicaciones para circuitos de paso alto están:

- ✓ Ecualización de audios
- ✓ Filtros de cruce
- ✓ Instrumentos de medición por análisis de señales

Todos estos diseños son parte de diferentes aplicaciones que son de mucha utilidad en campos como la electrónica, medicina, telecomunicaciones y la instrumentación.

Por esta razón, a pesar que son diseños ocultos a la vista, poseen una gran importancia para el funcionamiento de estos campos de estudio y diferentes tecnologías que a nivel físico tienen un grado innegable de importancia por el flujo de energía y transmisión de señales que dan paso a nuevos caminos en el mundo de comunicaciones y la electrónica a pesar de ser conjuntos discretos, pero con un papel esencial para el progreso del mundo moderno como se muestra en la figura 2.



Figura 2. Diseño de circuitos electrónicos de pasa bajas de señales en mecanismo reales.

(cc) BY-NC-SA

Nota teórica

filtro de paso bajo

En el siguiente esquema de la figura 3 se presenta un circuito RC denominado

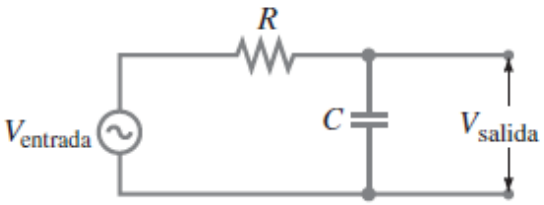


Figura 3. Diagrama de circuito RC de filtro de paso bajo.

A este circuito se le atribuye la característica de filtro bajo porque permite un paso de señales de baja frecuencia con menos atenuación que las señales de CA de alta frecuencia.

La ganancia (relación de voltajes) para este filtro está representada por

$$A = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}} = \frac{1}{(4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$ Ecuación 1

filtro de paso alto

En el siguiente esquema de la figura 4 se presenta un circuito RC denominado

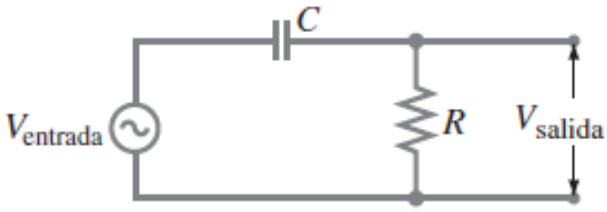


Figura 4. Diagrama de circuito RC de filtro de paso alto.

A este circuito se le atribuye la característica de filtro bajo porque permite un paso de señales de baja frecuencia con menos atenuación que las señales de CA de alta frecuencia.

La ganancia (relación de voltajes) para este filtro está representada por

$$A = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}} = \frac{2\pi f RC}{(4\pi^2 f^2 R^2 C^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$ Ecuación 2

(cc) BY-NC-SA

Materiales a utilizar

- ✓ Generador de Funciones
- ✓ Osciloscopio
- ✓ Resistencia de 1 kΩ
- ✓ Capacitor (Condensador) de 1 µF
- ✓ Multímetro
- ✓ Cables de conexión

Desarrollo procedimental (20 puntos)

Parte A: Circuito de paso bajo

- *Montaje experimental*

1. Desde la plataforma de Aprende U, podrá acceder al Laboratorio VISIR HIVE que se encuentra disponible. Visualizará un entorno de trabajo como el mostrado en la Figura 5, donde podrá construir sus circuitos.

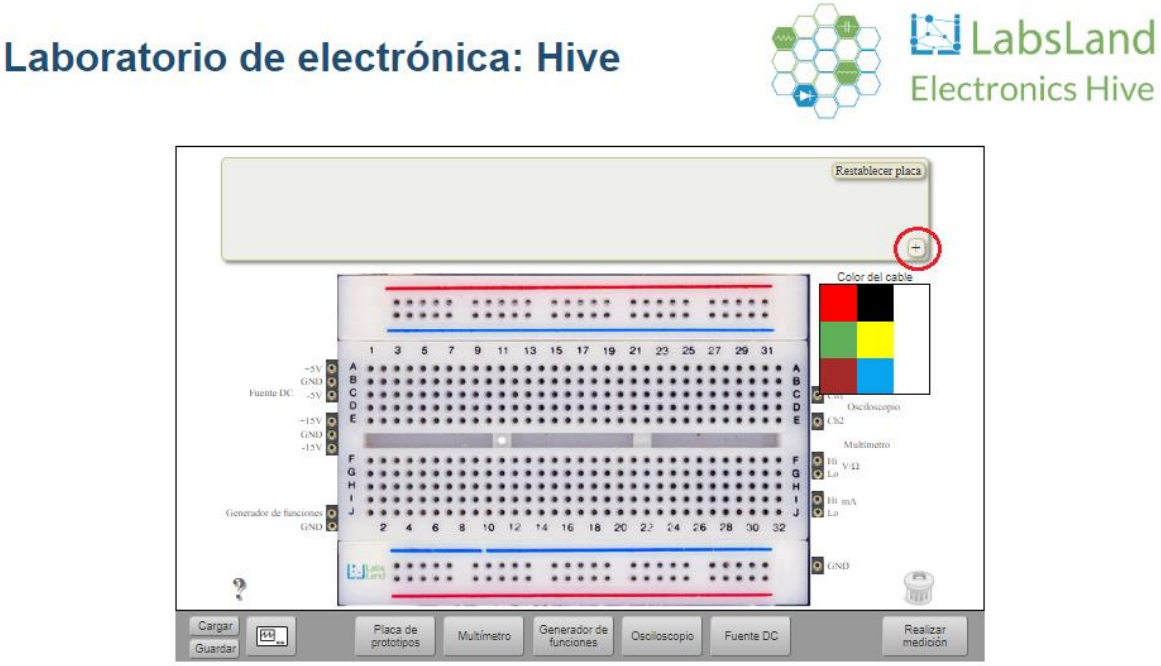


Figura 5. Laboratorio Remoto HIVE para trabajar con circuitos.

2. Al ingresar a la plataforma del laboratorio remoto del VISIR, elija la opción de "Experimentación avanzada" y de un clic en Acceder.

3. Añada a la placa de circuitos un capacitor de $\mathbf{1\mu F}$ y un un resistor de $\mathbf{1k\Omega}$.

(cc) BY-NC-SA

4. Una vez que se encuentre en la placa de prototipos, proceda armar el circuito de la figura 3 haciendo uso del resistor y el capacitor que seleccionó anteriormente.
5. Luego, conecte el generador de señales, para ello:
   - Desde la entrada llamada “Generador de funciones” conecte un cable que se dirija al primer extremo del resistor (lado izquierdo visto hacia la pantalla).
   - Desde el otro extremo del resistor (lado derecho visto hacia la pantalla) conecte un cable que se dirija al primer extremo del capacitor (lado izquierdo visto hacia la pantalla).
   - Desde el otro extremo del capacitor (lado derecho visto hacia la pantalla) conecte un cable que se dirija a la terminal de tierra “GND”.
6. Ahora proceda a conectar los canales del osciloscopio para medir la señal de voltaje del generador y la señal de voltaje del capacitor, para ello:
   - Conecte el canal 1 del osciloscopio “Ch1” al primer extremo del resistor (lado izquierdo visto hacia la pantalla, mismo que está conectado al Generador de funciones).
   - Conecte el canal 2 del osciloscopio “Ch2” al primer extremo del capacitor (lado izquierdo visto hacia la pantalla, mismo que está conectado al resistor).

- *Medición experimental **(3 puntos)***

7. Por aparte, tome de la placa, dos cables que se extiendan de las terminales del resistor y conéctelos al multímetro, luego diríjase al multímetro y seleccione el modo ohmímetro (Ω), de un clic en realizar medición y registre el valor real del resistor en la tabla 2 con su respectiva incertidumbre.
8. Realice el mismo procedimiento anterior, pero esta vez tome el capacitor, luego configura el multímetro a modo de capacitancia (F) y anote el valor real del capacitor en la tabla 1 con su respectiva incertidumbre.

Nota: *Considere que para realizar estos pasos 7 y 8 es necesario hacerlo de forma separada como fue hecho en la actividad de reconocimiento.*

9. Ahora proceda a conectar y configurar el generador de señales. Para ello considere lo siguiente:
   - Seleccione una señal sinusoidal ~
   - Luego, seleccione un voltaje de entrada pico pico de $V_{entrada} = 1\,Vpp$ y no vuelva a modificar esta señal.
10. Luego proceda a configurar el osciloscopio. Para ello procederá a realizar mediciones de voltaje y frecuencia, pero considere que, en un osciloscopio, el

(cc) BY-NC-SA

voltaje se ubica en el eje Y, y el tiempo en el eje X. Para configurar este equipo se necesita:

- Seleccione el canal 2 para tomar las medidas requeridas.
- Luego, seleccione el modo amplitud (ampl) y actívela hasta que inmediatamente aparezca un marcador que medirá la amplitud del canal 2.
- Repita el mismo procedimiento para seleccionar la frecuencia (freq). Una vez realizado este paso, el osciloscopio marcará medidores de voltaje de salida y señales de frecuencias.

11. Una vez configurado todo el circuito, vuelva al generador de señales y proceda a seleccionar el modo Freq y seleccione una frecuencia de 60 Hz.

12. Luego, vuelva a ingresar al osciloscopio y presione el botón “Realizar medición”. Observará una serie de funciones sinusoidales.

13. Registre los valores de frecuencia y voltaje de salida que refieren a la señal del canal 2 y anote estos valores en la tabla 1.

14. No olvide que, para todas estas mediciones, será vital considerar sus respectivas incertidumbres, considerando todos los equipos como aparatos digitales.

15. Repita el procedimiento anterior para otros valores de frecuencias que oscilen en un rango de [100 a 3000] Hz y anote sus resultados en la tabla 1.

16. Una vez recopilado los datos, proceda a determinar los valores de la ganancia de A.

Tabla 1. Valores de voltaje de salida y frecuencias para circuito de paso bajo.

$$\boldsymbol{V_{entrada} = \quad \pm \quad V \;\; / \;\; R = \quad \pm \quad \Omega \;\; / \;\; C = \quad \pm \quad F}$$

Frecuencia f (Hz) $\pm$__$\boldsymbol{Hz}$	Voltaje de salida V_{sal} (V) $\pm$_____$\mathbf{V}$	Ganancia A

- *Análisis y ajuste* ***(7 puntos)***

17. Linealice la ecuación 1.

18. A partir de los datos de la Tabla 1, usando la expresión obtenida en el punto anterior realice una gráfica que le permita obtener el producto RC con su incertidumbre en la Tabla 2.

19. Luego compárela con el valor teórico del producto RC y anote sus resultados en la tabla 2.

20. Determine la frecuencia de corte.

(cc) BY-NC-SA

Tabla 2. Resultados de productos RC

Producto RC teórico (τ) ± s	Producto RC experimental (τ) ± s	% de dif

21. Luego, discuta los resultados obtenidos en la tabla 2.

Parte B: Circuito de paso alto

- *Montaje experimental*

1. Vuelva nuevamente a acceder al Laboratorio VISIR HIVE o reinicie un experimento nuevo de forma que aparezca el entorno de trabajo como el mostrado en la Figura 5.

2. Vuelva a utilizar nuevamente el capacitor de $\mathbf{1\mu}\boldsymbol{F}$ y el resistor de $\mathbf{1}\boldsymbol{k\Omega}$**.**

3. Una vez que se encuentre en la placa de prototipos, proceda armar el circuito de la figura 4 haciendo uso del resistor y el capacitor.

4. Luego, conecte el generador de señales, para ello:

- Desde la entrada llamada “Generador de funciones” conecte un cable que se dirija al primer extremo del capacitor (lado izquierdo visto hacia la pantalla).
- Desde el otro extremo del capacitor (lado derecho visto hacia la pantalla) conecte en serie el primer extremo del resistor (lado izquierdo visto hacia la pantalla).
- Desde el otro extremo del resistor (lado derecho visto hacia la pantalla) conecte un cable que se dirija a la terminal de tierra “GND”.

5. Ahora proceda a conectar los canales del osciloscopio para medir la señal de voltaje del generador y la señal de voltaje del capacitor, para ello:

- Conecte el canal 1 del osciloscopio “Ch1” al primer extremo del capacitor (lado izquierdo visto hacia la pantalla, mismo que está conectado al Generador de funciones).
- Conecte el canal 2 del osciloscopio “Ch2” al primer extremo del resistor (lado izquierdo visto hacia la pantalla, mismo que está conectado en serie al capacitor).

(cc) BY-NC-SA

- *Medición experimental* ***(3 puntos)***

6. Como está utilizando el mismo capacitor y resistor, registre los valores reales de ambos elementos que midió en el paso 7 y 8 de la parte A en la tabla 3 y anote nuevamente sus respectivas incertidumbres.

Nota: *Considere que para realizar este paso 6 fue necesario hacerlo de forma separada como fue hecho en la actividad de reconocimiento.*

7. Ahora proceda a conectar y configurar el generador de señales. Para ello, ejecute el mismo procedimiento de la parte A (ver paso 9)

8. Luego proceda a configurar el osciloscopio. Para ello procederá a realizar mediciones de voltaje y frecuencia (ver paso 10 de la parte A).

9. Una vez configurado todo el circuito, vuelva al generador de señales y seleccione una frecuencia de 30 Hz.

10. Luego, vuelva a ingresar al osciloscopio y presione el botón “Realizar medición”.

11. Registre los valores de frecuencia y voltaje de salida que refieren a la señal del canal 2, anote estos valores en la tabla 3.

12. Para todas estas mediciones, será vital considerar sus respectivas incertidumbres, considerando todos los equipos como aparatos digitales.

13. Repita el procedimiento anterior para otros valores de frecuencias que oscilen en un rango de [30 a 3000] Hz y anote sus resultados en la tabla 3.

14. Una vez recopilado los datos, proceda a determinar los valores de la ganancia de A.

Tabla 3. Valores de voltaje de salida y frecuencias para circuito de paso alto.

$$\boldsymbol{V_{entrada} = \ \pm \ V \ / \ R = \ \pm \ \Omega \ / \ C = \ \pm \ F}$$

Frecuencia f (Hz) $\pm$__ $\boldsymbol{Hz}$	Voltaje de salida V_{sal} (V) $\pm$_____ **V**	Ganancia A

- *Análisis y ajuste* ***(7 puntos)***

15. Linealice la ecuación 2.

16. A partir de los datos de la Tabla 3, usando la expresión obtenida en el punto anterior realice una gráfica que le permita obtener el producto RC con su incertidumbre en la Tabla 4.

(cc) BY-NC-SA

17. Luego compárela con el valor teórico del producto RC y anote sus resultados en la tabla 4.

18. Determine la frecuencia de corte.

Tabla 4. Resultados de frecuencia de corte

Producto RC teórico (τ) ± s	Producto RC experimental (τ) ± s	% de dif

19. Por último, discuta los resultados obtenidos en la tabla 4.

(cc) BY-NC-SA

Problema experimental: Guía de respuestas

Sugerencias e indicaciones para presentar sus hojas de respuestas

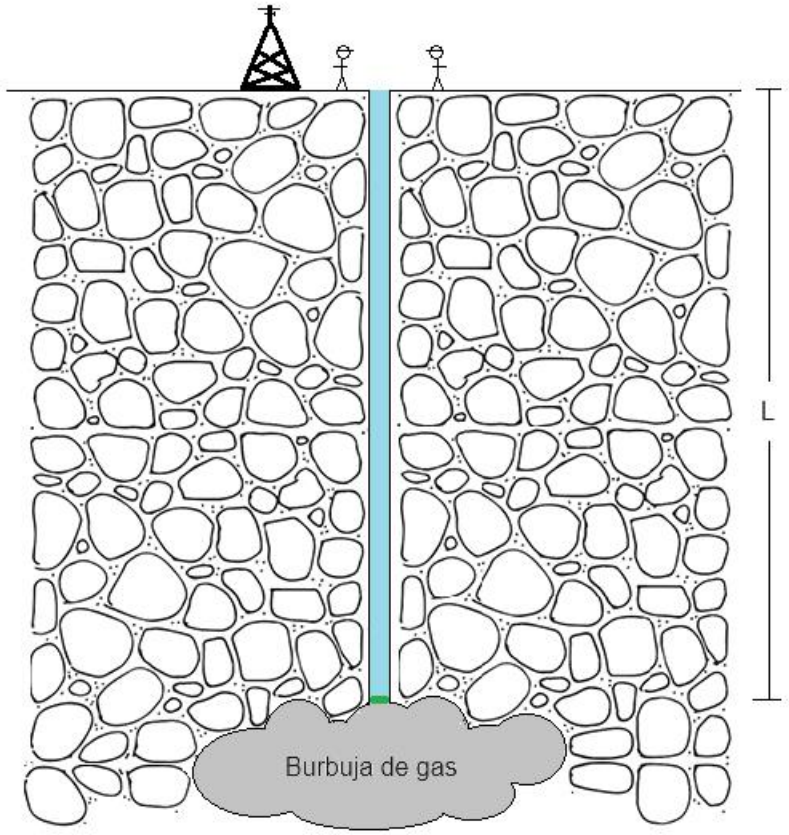
A. Recuerde que en sus hojas de respuestas no debe aparecer su nombre.
B. Escriba todas sus respuestas de forma ordenada.
C. Se sugiere que siga el orden y la numeración del problema experimental para colocar sus respuestas.
D. Recuerde que debe usar hojas en blanco para colocar sus respuestas. Estas hojas no deben contener logos ni estar marcadas.
E. La hoja de papel milimétrico (o papel milimetrado) tampoco debe estar marcada.
F. Recuerde escanear todas las hojas que utilizó para colocar sus respuestas.
G. Se recomienda no agregar al documento de sus respuestas ninguna hoja que haya utilizado como hoja borrador de cálculos.
H. **NO** debe subir a la plataforma de entrega ninguna de las hojas de este problema experimental. En caso de que lo haga se anulará esa hoja.

(cc) BY-NC-SA

Prueba Teórica

PROBLEMA 1. EXPLORACIÓN SUBTERRÁNEA

Unos trabajadores perforan el suelo verticalmente para llegar a una burbuja cerrada de $4\ m^3$ de gas ideal diatómico presurizado, a $95\ °C$. Se usa una broca de radio $b = 10\ cm$, de manera que en el suelo queda una apertura cilíndrica vertical con el mismo espesor de la broca, las paredes de esta apertura están térmicamente aisladas. Conforme la broca va avanzando la apertura se va llenando completamente con agua salada. Cuando se haya perforado una longitud total $L = 200\ m$ se dará el contacto con la burbuja de gas, por lo que los trabajadores extraen la broca y colocan una barrera móvil muy delgada y ligera en el extremo inferior de la perforación, cuya única función es impedir que se mezcle el gas con el agua salada. Una vez colocada, la barrera puede moverse libremente sin ningún tipo de fricción con las paredes de la apertura.



(cc) BY-NC-SA

La densidad del gas de la burbuja antes de realizar la perforación es $\rho_g = 2{,}50\ kg/m^3$, por otra parte, algunas propiedades físicas del agua salada utilizada son:

Propiedad	Magnitud
Resistividad eléctrica a 20 °C. (r_{20})	$0{,}25\ \Omega \cdot m$
Coeficiente de temperatura de la resistividad. (α)	$-0{,}005\ K^{-1}$
Densidad. (ρ)	$1050\ kg/m^3$

Los trabajadores permiten que la barrera suba una distancia $l = 25\ m$ por la apertura, de manera controlada, por lo que la parte correspondiente de agua que rellena la apertura se desborda y se pierde. Durante este proceso no se da un intercambio de energía térmica entre el gas y el agua, a través de la barrera móvil.

PREGUNTA A: Determine la presión que tenía la burbuja de gas antes de hacer la perforación. (3 puntos)

El gas comienza a recibir energía de parte de una vena volcánica cercana, debido a la perturbación en la zona. Exactamente después de que la barrera sube la distancia l mencionada anteriormente, la temperatura del gas a partir de ese momento permanece constante. Se empieza a dar un intercambio de energía entre el gas y el agua, por lo que se establece un gradiente lineal de temperatura a través de la columna de agua, si la temperatura ambiente en la superficie superior de la columna es $T_3 = 17{,}1\ °C$, mientras que la temperatura en la parte inferior de la columna es igual a la temperatura del gas y se considera que la barrera permite un paso libre de la energía térmica.

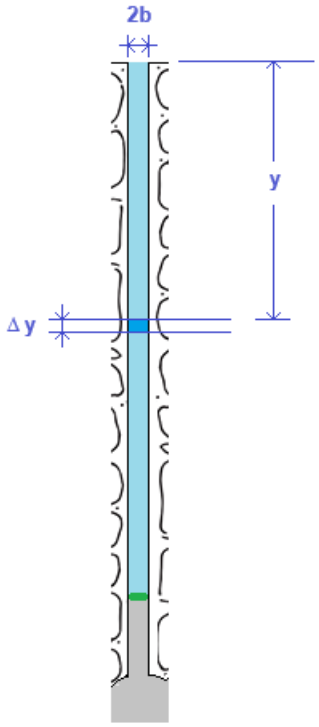
PREGUNTA B: Escriba una expresión que represente la temperatura del fluido en función de la profundidad y con respecto al nivel del suelo. (1,5 puntos)

PREGUNTA C: Considere una porción pequeña de la columna de agua, de altura Δy, ubicada a una profundidad y, encuentre una expresión para la resistencia eléctrica ΔR que tendrá esta pequeña porción de agua en función de la profundidad y y la altura Δy de la porción. Considere que la resistividad eléctrica varía con la temperatura según:

(cc) BY-NC-SA

$$r(T) = r_{ref}\,[1 + \alpha(T - T_{ref})]\,,$$

donde r_{ref} es la resistividad eléctrica a una temperatura de referencia T_{ref}. (2 puntos)



PREGUNTA D: Grafique la razón a la cual cambia la resistencia eléctrica del fluido con respecto a la profundidad $(\Delta R/\Delta y)$ en función de la profundidad y. (2 puntos)

PREGUNTA E: Determine la resistencia eléctrica que tendrá la columna de agua salada. (1,5 puntos)

(cc) BY-NC-SA

PROBLEMA 2. TRANSITO PLANETARIO

El método del tránsito permite a los astrónomos la detección de planetas extrasolares, que se encuentran muy lejos como para ser detectados por un telescopio convencional.

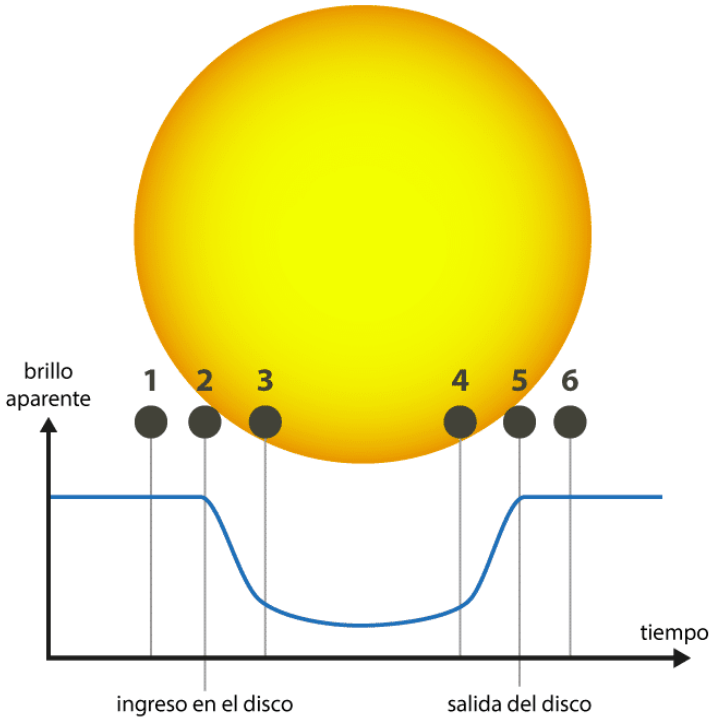


Figura 1. Tránsito planetario y curva luminosa. Esta figura no está a escala. Figura tomada de: https://www.astrosirio.org

Al pasar frente a su estrella, en un tránsito, el planeta opaca ligeramente la luz emitida por el astro, disminuyendo una pequeña fracción de su brillo cada vez que el planeta pasa frente a su estrella, esta fracción depende de la relación de las áreas del planeta y su estrella.

Por medio del telescopio espacial Kepler, se ha encontrado que la estrella HAT-P-7 (similar a nuestro Sol) tiene un radio de $1.386 \times 10^8\, m$ y una masa de $3.0 \times 10^{30} kg$. La curva de luz del tránsito del exoplaneta HAT-P-7-b se muestra en la figura 2. Para simplicidad del problema se considera sólo la interacción de la estrella con un único planeta.

(cc) BY-NC-SA

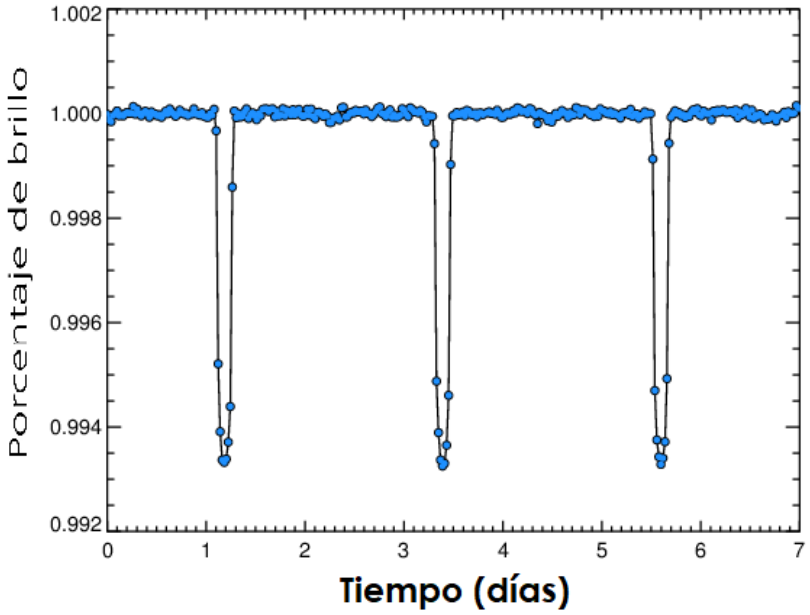


Figura 2. Curva de luz de la estrella HAT-P-7

PREGUNTA A: Utilizando los datos proporcionados por la figura 2. Determine el periodo de traslación del planeta alrededor de su estrella. (1 punto)

PREGUNTA B: Encuentre la distancia de la estrella al planeta. Compare su resultado con la distancia de la Tierra al Sol. (2 puntos)

PREGUNTA C: Calcule la velocidad tangencial del planeta, suponga que la órbita del planeta es circular (2 puntos)

PREGUNTA D: El planeta mientras orbita alrededor de su estrella, produce un pequeño bamboleo de la estrella alrededor del centro de masa del sistema estrella-planeta. La velocidad de este movimiento se puede medir por efecto Doppler, en este caso se conoce que la velocidad de la estrella es de 213 m/s, el Sistema Solar está en el mismo plano que la órbita del exoplaneta. Calcule la masa del planeta. (1 punto)

(cc) BY-NC-SA

PREGUNTA E: ¿Cuál es el radio del exoplaneta? Compare con el radio de la Tierra y del planeta Júpiter. (1 punto)

PREGUNTA F: Encuentre la densidad del planeta. (1 punto)

PREGUNTA G: Si se conoce que la estrella HAT-P-7 emite su mayor cantidad de energía en la longitud de onda 449.7 nm. ¿Cuál es la temperatura superficial de la estrella? (1 punto)

PREGUNTA H: Determine la Temperatura de equilibrio del planeta. Asumiendo que se comporta como cuerpo negro. (1 punto)

$$G = 6.674 \times 10^{-11} N\, m^2/kg^2$$

$$Distancia\ Tierra - Sol = 1.5 \times 10^{11} m$$

$$R_{Tierra} = 6.371 \times 10^{6}\ m$$

$$R_{Júpiter} = 6.991 \times 10^{7}\ m$$

$$\text{Constante de Wien} = 2.90 \times 10^{-3}\ m\ K$$

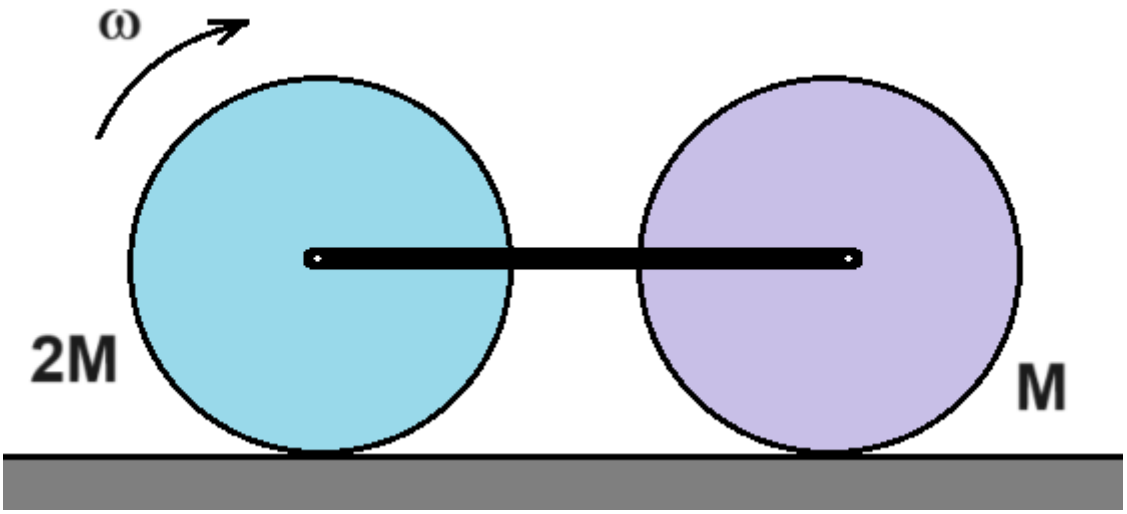
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W/m^2\ K^4$$

(cc) BY-NC-SA

PROBLEMA 3.1. UN CARRITO QUE PATINA

Un carrito está conformado por dos discos sólidos de igual radio R, pero diferente masa, uno de ellos tiene el doble de masa que el otro, los ejes de giro de ambos discos están conectados mediante una barra rígida ligera, como se muestra en la figura. Los coeficientes de fricción estáticos y cinéticos entre ambos discos y el suelo tienen todo el mismo valor μ.

Inicialmente se toma el disco más pesado (el de la izquierda) y se acelera hasta una rapidez angular ω en dirección horaria según el dibujo, una vez alcanzada esa rapidez, el carrito se coloca en el suelo en reposo, con ese disco girando e inmediatamente se libera, desprecie la fricción en los ejes de los discos. La inercia rotacional de un disco sólido es $\frac{1}{2}MR^2$.



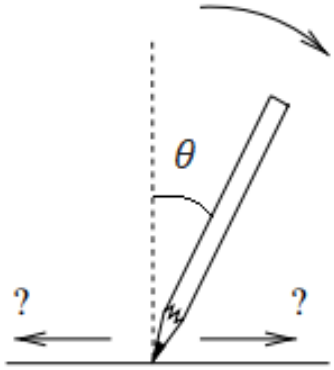
PREGUNTA A: Si el disco más liviano nunca patina y el disco pesado patina al inicio, cuando entra en contacto con el suelo, determine la aceleración de traslación del carrito mientras el disco pesado patina. (2,5 puntos)

PREGUNTA B: Calcule el trabajo total realizado sobre el carrito desde que se libera hasta que alcanza una rapidez constante. (2,5 puntos)

(cc) BY-NC-SA

PROBLEMA 3.2. CAÍDA DE UN LÁPIZ

Un lápiz se coloca verticalmente sobre una mesa con la punta hacia abajo. Vamos a estudiar la relación entre la caída del lápiz y la dirección de movimiento de la punta del lápiz. Modele el lápiz como una varilla de largo L, y distribución de masa uniforme M y momento de inercia $\frac{1}{3}ML^2$. Al lápiz se le da un pequeño empujón que provoca su posterior caída.



PREGUNTA A: Encuentre una expresión para la fuerza normal sobre el lápiz en función del ángulo θ, mientras el lápiz no resbale. (2,5 puntos)

PREGUNTA B: Determine el coeficiente de fricción estático que permite que el lápiz no resbale para un ángulo θ_0. (2,5 puntos)

(cc) BY-NC-SA