

В данной задаче требуется оценка погрешностей!

Задание

1. Соберите установку, в которой трубка будет подвешена на двух отрезках лески (см. рисунок 1). Такой подвес называется бифилярным. Длину отрезков лески l выберите равной 40 см, для этого верхние концы лески проденьте в маленькие силиконовые трубки, надетые на дужки канцелярских зажимов. Зажимы прикрепите к длинной трубе, а ее, в свою очередь, закрепите за середину в лапке штатива. Измерьте зависимость периода крутильных колебаний трубки вокруг своей центральной оси от расстояния a между центром трубки и точками подвеса.

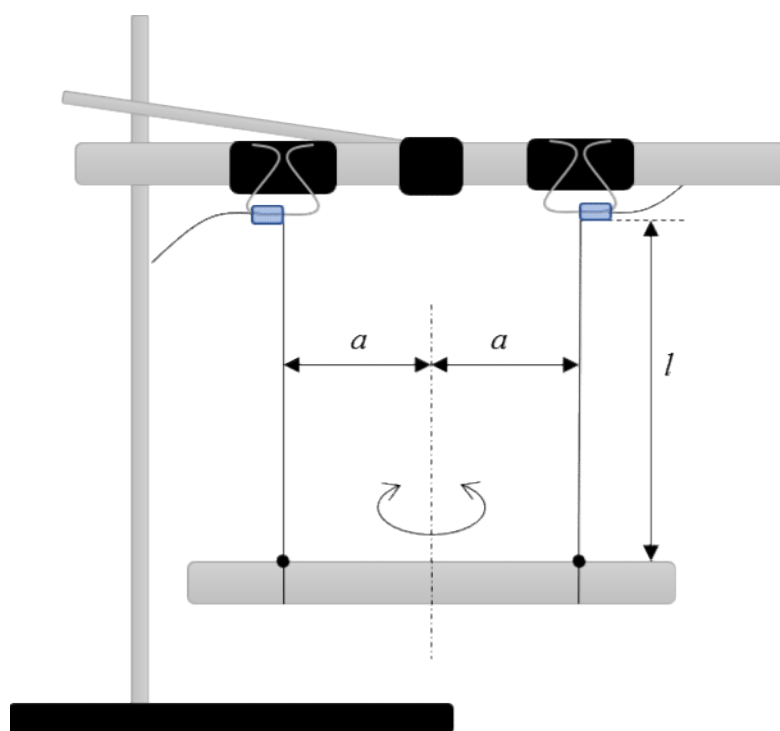


Рис. 1. Установка

2. С помощью канонического уравнения колебаний (2) запишите выражения для периода таких крутильных колебаний. Постройте график периода от преобразованной переменной a , чтобы график получился линейным. Найдите с помощью графика отношение момента инерции трубки относительно оси вращения к ее массе.
3. Подвесьте трубку на одном отрезке лески. На трубке отрезок лески закрепите посередине. Запустите крутильные колебания. Измерьте зависимость периода колебаний трубки от длины подвеса.
4. Запишите выражение для периода колебаний трубки в таком подвесе с помощью канонического уравнения колебаний. Постройте график зависимости периода от пре-



образованной переменной l так, чтобы график получился линейным. Определите удельный модуль кручения лески (5).

5. Оцените толщину лески методом рядов.
6. Подвесьте трубку на двух одинаковых параллельных отрезках лески касающихся друг друга (двойной леске). Выберите длину подвеса равной 40 см. Измерьте период колебаний. Запишите теоретическое выражения для периода колебаний трубки в этом случае. Объясните полученный результат, используя ранее полученные графики.

Оборудование. Исследуемая трубка массой $m = 32.8$ г, штатив, муфта, лапка, длинная трубка, выполняющая роль основы для крепления, два канцелярских зажима с отрезками силиконовой трубки на дужках, катушка лески, секундомер, линейка 50 см, ножницы.

Теоретическая справка

Кинетическая энергия вращающегося относительно неподвижной оси тела может быть записана как:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (1)$$

где ω - угловая частота вращения тела, I - момент инерции тела относительно оси вращения. Период колебаний тела T может быть найден из канонического уравнения колебаний, которое чаще всего можно записать основываясь на законе сохранения энергии.

$$\dot{\phi}^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}\phi^2 = \text{const}, \quad (2)$$

где ϕ - переменная, описывающая положение тела (для крутильных колебаний чаще всего угол поворота).

При закручивании лески вдоль своей оси в ней возникает возвращающий момент M . Модулем кручения Γ называют отношение возвращающего момента к углу кручения α , то есть углу поворота одного торца лески относительно другого:

$$M = \Gamma\alpha. \quad (3)$$

Энергия упругой деформации в случае кручения может быть записана:

$$W = \frac{\Gamma\alpha^2}{2}. \quad (4)$$

Модуль кручения, аналогично коэффициенту жесткости, обратно пропорционален длине нити. Коэффициент пропорциональности между модулем кручения и обратной длиной



лески назовем удельным модулем кручения γ :

$$\Gamma = \frac{\gamma}{l} \quad (5)$$

Для приближенных вычислений можно воспользоваться формулой:

$$(1 + x)^\beta \approx 1 + \beta x, \text{ если } x \ll 1. \quad (6)$$



Решение

Закон сохранения энергии гласит, что сумма кинетической и потенциальной энергии константа.

$$W_k + W_p = \text{const.} \quad (7)$$

В колебательном движении кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. Для крутильных колебаний на бифилярном подвесе квадратом скорости движения вдоль вертикальной оси можно пренебречь по сравнению с квадратом характерной скорости движения трубки в горизонтальной плоскости. Поэтому кинетическую энергию для колебаний на бифилярном подвесе можно записать с помощью выражения 1. Угловой скоростью при этом будет являться первая производная угла поворота трубки ϕ .

$$W_k = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} \quad (8)$$

Превалирующим же слагаемым в потенциальной энергии является энергия силы тяжести. Так во время поворота трубка поднимается на высоту:

$$h = l - \sqrt{l^2 - a^2\phi^2} = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2\phi^2}{l^2}} \right). \quad (9)$$

Так как $a\phi \ll l$, то можно воспользоваться формулой приближенного вычисления 6:

$$h = l \left(1 - 1 + \frac{a^2\phi^2}{2l^2} \right) = \frac{a^2\phi^2}{2l}. \quad (10)$$

Тогда для потенциальной энергии трубки можно записать:

$$W_p = mgh = mg \frac{a^2\phi^2}{2l}. \quad (11)$$

Подставляя найденные выражения в закон сохранения энергии получим:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg \frac{a^2\phi^2}{2l} = \text{const.} \quad (12)$$

После небольших преобразований приведем полученное выражение к каноническому виду уравнения колебаний:

$$\dot{\phi}^2 + \frac{mga^2}{Il} \phi^2 = \text{const.} \quad (13)$$

Откуда может быть найден период колебаний:

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mga^2}}. \quad (14)$$

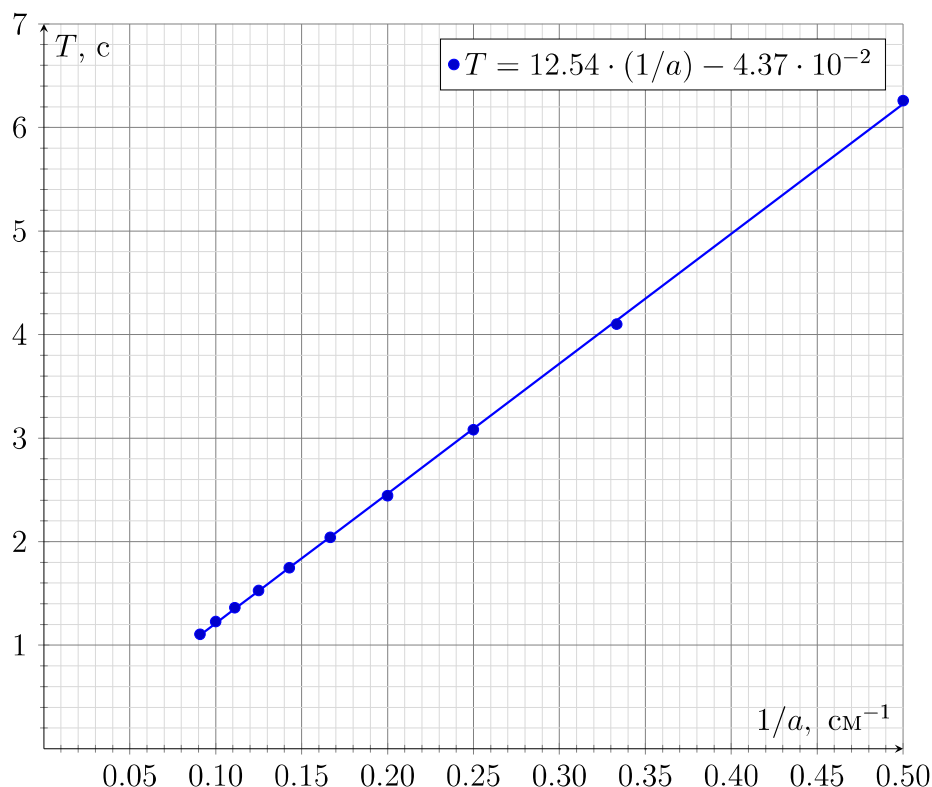
Измерим зависимость периода колебаний на бифилярном подвесе от расстояния a . И построим график зависимости периода T_b от $1/a$. В этих координатах график получится линейным с угловым коэффициентом:

$$K_b = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{mg}} = 0.125 \pm 0.001 \text{ с} \cdot \text{м}. \quad (15)$$

Откуда искомое отношение момента инерции трубки к ее массе:

$$\frac{I}{m} = \frac{K_b^2 g}{4\pi^2 l} = (9.72 \pm 0.12) \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \quad (16)$$

a , см	$1/a$, см ⁻¹	$10T$, с	T , с
11.0	0.091	11.1	1.11
10.0	0.100	12.3	1.23
9.0	0.111	13.6	1.36
8.0	0.125	15.3	1.53
7.0	0.143	17.5	1.75
6.0	0.167	20.4	2.04
5.0	0.200	24.4	2.44
4.0	0.250	30.8	3.08
3.0	0.333	41.0	4.10
2.0	0.500	62.6	6.26

График зависимости T от $1/a$ 

Для крутильных колебаний на одной леске потенциальной энергией в законе сохранения будет являться энергия деформации кручения:

$$W_k = \frac{\Gamma \phi^2}{2}. \quad (17)$$

Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$\frac{I \dot{\phi}^2}{2} + \frac{\Gamma \phi^2}{2} = \text{const} \quad (18)$$

После небольших преобразований:

$$\dot{\phi}^2 + \phi^2 \frac{\Gamma}{I} = \text{const}. \quad (19)$$

Откуда период таких колебаний:

$$T_k = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\Gamma}}. \quad (20)$$

Или с учетом (5) для зависимости периода колебаний от длины лески имеем:

$$T_k = 2\pi \sqrt{\frac{Il}{\gamma}}. \quad (21)$$

Измерим зависимость периода крутильных колебаний лески от ее длины. Построим график зависимости периода колебаний T_k от $\sqrt{l}$. Рассчитаем его угловой коэффициент:

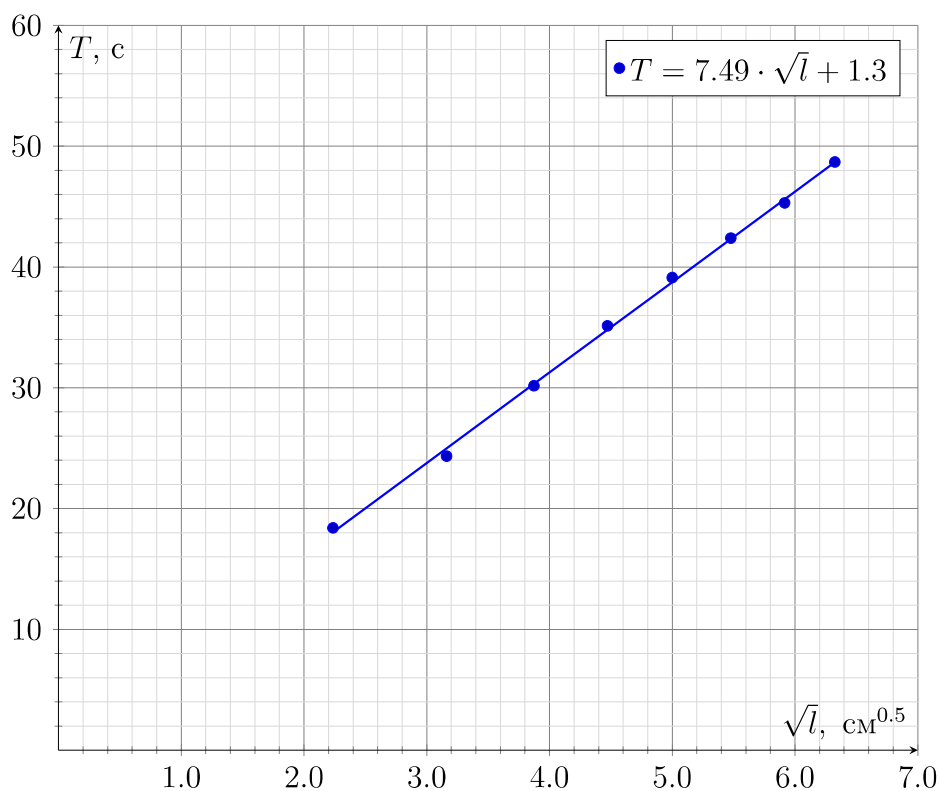
$$K_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\gamma}} = 75 \pm 1 \text{ с/м}^{0.5}. \quad (22)$$

Откуда удельный модуль кручения:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 I}{K_2^2} = m \frac{I}{m} \frac{4\pi^2}{K_2^2} = (2.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{рад}}. \quad (23)$$

l , см	$\sqrt{l}$, см ^{0.5}	T , с
5.0	2.24	18
10.0	3.16	24
15.0	3.87	30
20.0	4.47	35
25.0	5.00	39
30.0	5.48	42
35.0	5.92	45
40.0	6.32	49

График зависимости T от $\sqrt{l}$





Для крутильных колебаний на двойной леске стоит учесть в потенциальной энергии поправку на поднятие трубки за счет скручивания отрезков лески друг относительно друга. В этом случае параметр a примет значение половины диаметра лески. Диаметр лески оценим методом рядов. Намотаем леску на трубку, сделав $N = 10$ витков. При этом их суммарная толщина составит $x = 4$ мм. Откуда толщина лески:

$$d = x/N = 0.40 \pm 0.01 \text{ мм.} \quad (24)$$

Также стоит учесть, что при таких колебаниях деформацию кручения испытывают две нити. Таким образом выражение для потенциальной энергии примет вид:

$$W_p = 2 \frac{\gamma l \phi^2}{2} + mg \frac{(d/2)^2 \phi^2}{2l}. \quad (25)$$

Откуда закон сохранения энергии можно записать как:

$$\frac{I \dot{\phi}^2}{2} + 2 \frac{\gamma l \phi^2}{2} + mg \frac{(d/2)^2 \phi^2}{2l} = \text{const.} \quad (26)$$

После небольших преобразований:

$$\dot{\phi}^2 + \phi^2 \left(2 \frac{\gamma l}{I} + mg \frac{(d/2)^2}{lI} \right) = \text{const.} \quad (27)$$

Тогда для периода таких колебаний можно записать:

$$T = 2\pi \left(2 \frac{\gamma l}{I} + mg \frac{(d/2)^2}{lI} \right)^{-0.5}. \quad (28)$$

Или же с учетом предыдущих измерений можно записать:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2}{T_k^2} + \frac{1}{T_b^2}, \quad (29)$$

где под $T_b = 627$ с подразумевается период колебаний на первом графике соответствующий $a = d/2 = 0.2$ мм, а под $T_k = 49$ с подразумевается период колебаний на втором графике, соответствующий длине лески $l = 40$ см. Такой расчет дает для периода колебаний $T = 34.6$ с, что приблизительно равно $T_k/\sqrt{2}$ так как периоды T_k и T_b отличаются на порядок, а их квадраты на два порядка. Реальное измерение времени 4х колебаний для такой системы дает $4T = 137 \pm 1$ с. И для одного колебания $T = 34.2 \pm 0.3$ с.