МФТИ СБОРНАЯ РОССИИ ПО ФИЗИКЕ ФОНД ЦЕЛЕВОГО КАПИТАЛА МФТИ

Китайские олимпиады по физике

Заключительный этап

v21.α.chrono, собрано 13.02.2022

актуальный архив на cn.pho.rs



В этом файле собраны переводы заключительных этапов Китайских национальных олимпиад по физике с 1984 по 2021 год. Перевод выполнен золотым медалистом европейской и международной олимпиад по физике 2020 года Максимом Покровским. Сборка выполнена в системе *pho.rs* хранения задач по физике. Проект поддержан Фондом целевого капитала МФТИ и лабораторией по работе с одаренными детьми МФТИ.

Пожелания и предложения пишите на physolymp@gmail.com.

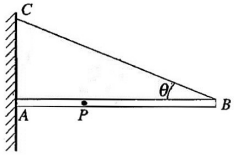
Если вам нравится, то, что мы делаем, сделайте пожертвование в целевой капитал №3 для поддержки олимпиадного движения ФЦК МФТИ.

Содержание

1984 год 2
1985 год 4
1986 год 7
1987 год 9
1988 год 11
1989 год 14
1990 год 18
1991 год 20
1992 год 23
1993 год 25
1994 год 28
1995 год 30
1996 год 32
1997 год 34
1998 год 37
1999 год 40
2000 год 43
2001 год 46
2002 год 49
2003 год 52
2004 год 55
2005 год 58
2006 год 61
2007 год 64
2008 год 68
2009 год 73
2010 год 77
2011 год 82
2012 год 87
2013 год 91
2014 год 95
2015 год 101
2016 год 106
2017 год 112
2018 год 118
2019 год 123
2020 год 132
2021 год 139

1984

CN84-T1. Рассмотрим однородный стержень AB с длиной l и весом W_0. Один из концов стержня A касается вертикальной шероховатой стены, и коэффициент трения покоя между концом стержня и стеной равен μ. Другой конец стрежня B подвешен на достаточно прочной нерастяжимой верёвке, закреплённой в точке C на стене. Стержень находится в горизонтальном положении, и угол между ним и верёвкой равен θ.



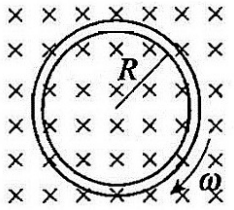
К задаче CN84-T1

1. Найдите условия на μ и θ, при которых стержень находится в равновесии.

При равновесии стержня на нём существует точка P, обладающая следующими свойствами. Если подвесить к произвольной точке между P и A груз достаточно большого веса W, то система начнёт движение, однако подвешивание произвольно тяжёлого груза между точками P и B равновесие не нарушает.

2. Найдите расстояние $d_{min} = PA$.

CN84-T2. На рисунке показано тонкое кольцо с радиусом R, равномерно распределённой массой m и положительным зарядом Q. Кольцо помещено на гладкую непроводящую горизонтальную поверхность в область однородного магнитного поля с индукцией B, направленного вертикально вниз. Кольцо вращается вокруг оси, проходящей через его центр, со постоянной угловой скоростью ω. Найдите силу натяжения T в кольца.



К задаче CN84-T2

CN84-T3. В данной задаче Вам необходимо будет ответить на несколько теоретических вопросов, связанных с температурой.

1. Что представляет собой температура с макроскопической точки зрения? С микроскопической?

Рассмотрим два термометра – ртутный и спиртовой. Каждый из них откалиброван на 0 °C при температуре плавления воды и на 100 °C при температуре её кипения, а затем их шкалы разделены на 100 частей.

Теперь термометры используют по отдельности для измерения температур двух объектов, и оба они показывают одинаковое значение в 30 °C.

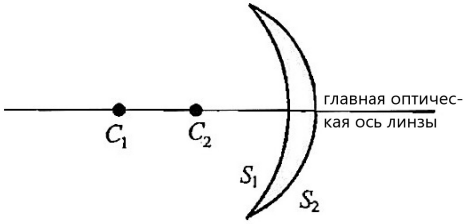
2. Одинаковы ли при этом температуры этих двух объектов? Почему?

3. Как можно измерить высокую (выше температуры плавления стекла) и низкую (ниже температуры плавления ртути) температуры? Можно ли ещё выражать столь высокие и низкие температуры в градусах Цельсия? Почему?

Известно, что температура поверхности Солнца равна 6000 K.

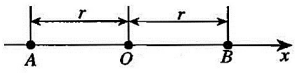
4. Как измеряется эта температура?

CN84-T4. Оптическая система микроскопа включает в себя линзу, показанную на рисунке. Поверхности такой линзы сферические, причём центром левой поверхности S_1 является точка C_1, а её радиус равен R_1; центр правой поверхности S_2 – точка C_2, её радиус R_2. Показатель преломления стекла относительно воздуха равен nm а расстояние между центрами двух сфер составляет $C_1C_2 = \frac{R_2}{n}$. Пусть объект находится в точке C_1. Покажите, что весь свет, прошедший через линзу, сфокусируется в некоторой точке Q.



К задаче CN84-T4

CN84-T5. На рисунке показаны два точечных положительных заряда Q, покоящихся в точках A и B на оси x. Расстояние от начала координат до A и B одинаково и равно r. В начало координат помещают заряженную частицу P с массой m и зарядом q.



К задаче CN84-T5

1. Будет ли частица P находиться в O в устойчивом равновесии при фиксированном направлении возможного движения?

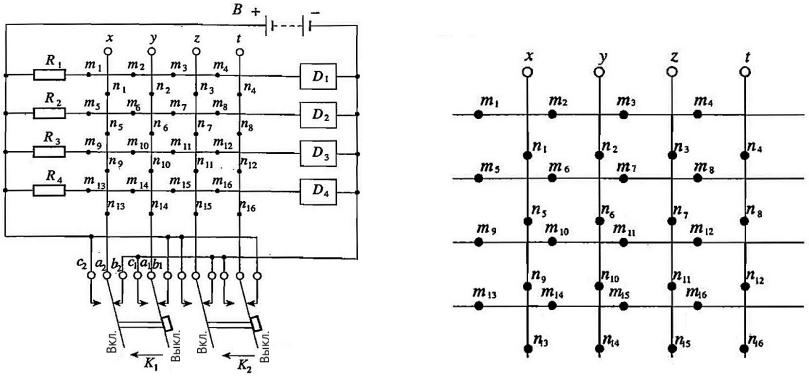
2. Как будет двигаться частица P, если придать есть малое возмущение в направлениях, соответствующих устойчивому равновесию?

CN84-T6. На рис. (а) показана электрическая схема, в которой для управления четырьмя лампами используются два переключателя. D_1–D_4 представляют собой четыре электронных устройства, которые управляют четырьмя лампами 1,2,3,4 соответственно (лампы не показаны на рисунке) по следующему принципу – если через D_1 течёт ток, что загорается лампа 1, и т.д.

В данной схеме B представляет собой источник постоянного напряжения, R_1–R_4 – четыре одинаковых резистора, а K_1 и K_2 – два переключателя с двумя возможными положениями. K_1 имеет два набора контактов – $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$. Выключенное состояние K_1 соответствует контакту a и b, включенное – контакту a и c (переключатель K_2 работает по точно такому же принципу). Неподключенные контакты остаются свободными.

На рисунке показаны 16 пар точек подключения: m_1n_1, $m_2n_2, \ldots$, $m_{16}n_{16}$. Между каждой парой точек может быть подключен диод.

Подключенные непосредственно к K_1 и K_2 провода обозначены на схеме как x, y, z и t.



(a) (b)

К задаче CN84-T6

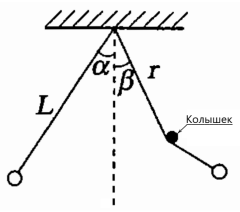
Горят лампы	K_1 выкл., K_2 выкл.	K_1 выкл., K_2 вкл.	K_1 вкл., K_2 выкл.	K_1 вкл., K_2 вкл.
Схема 1	1	2	3	4
Схема 2	1	1 и 2	3	2 и 4

1. Для каждого из вариантов, указанных в таблице выше, соберите схему, имеющую такие же параметры, соединив несколько пар точек подключения mn диодами. Отметьте, какие из пар точек подключения необходимо соединить, на рисунке ниже в каждом из двух случаев.

2. Объясните вкратце ход разработки схемы.

1985

CN85-T1. Маятник представляет собой маленький шарик массой m, подвешенный на нити длиной l. Маятник отпускают из положения, когда нить образует вертикалью угол α. В процессе дальнейшего движения на пути нити оказывается колышек, как показано на рисунке. Расстояние между точкой подвеса маятника и колышком равно r, а прямая, их соединяющая, образует угол β с вертикалью. Известно, что в после того, как шарик начинает вращаться вокруг колышка, наступает момент, когда нить перестаёт быть натянута.



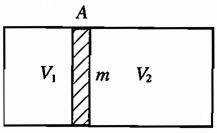
К задаче CN85-T1

1. Найдите взаимосвязь между r, l, β и α, при которой вышеописанная ситуация возможна.

Известно, что при некотором значении угла α_0 шарик ударяется о колышек в процессе дальнейшего движения.

2. Найдите это значение α_0.

CN85-T2. В цилиндре с площадью поперечного сечения S находится поршень массой m, который разделяет внутренность цилиндра на две части и может двигаться без трения. Когда система находится в равновесии, температура газа с обеих сторон цилиндра одинакова, его давление равно p, а объём частей – v_1 и V_2 соответственно. В начальный момент времени поршень незначительно отклоняют от положения равновесия и затем отпускают. Под действием давления газа в обеих сторон поршень начинает колебаться. Температуру газа при этом считайте постоянной.

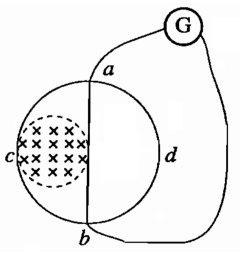


К задаче CN85-T2

1. Найдите период колебаний поршня τ. Выразите ответ через p, V_1, V_2, m и S.

2. Найдите отношение периода τ' колебаний поршня при температуре газа $t' = 30°$ к периоду τ при $t = 0°$.

CN85-T3.1. Проволочное кольцо радиуса D окружает область однородного магнитного поля с радиусом $\frac{D}{2}$, касаясь её границы в точке c, как показано на рисунке. Индукция магнитного поля в области перпендикулярна картинной плоскости и увеличивается со временем, причём $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = k = \mathrm{const}$, а поле за пределами этой области пренебрежимо мало. Проволока ab проходит по диаметру кольца, касательному к границе области магнитного поля. Сопротивление этой проволоки, а также полуколец adb и acb, равно r. Между точками a и b подключают амперметр G, как показано на рисунке, причём его внутреннее сопротивление также равно r (сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало).



К задаче CN85-T3.1

1. Найдите показания амперметра I_G.

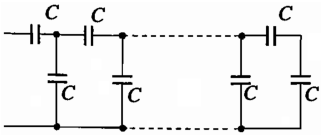
Теперь полукольцо adb сгибают на 90°, и оно становится перпендикулярным картинной плоскости.

2. Найдите показания амперметра I_G.

Наконец, полукольцо adb сгибают ещё на 90° так, что оно накладывается на полукольцо acb.

3. Найдите показания амперметра I_G.

CN85-T3.2. Рассмотрим цепь из конденсаторов с большим количеством одинаковых сегментов, показанную на рисунке. Ёмкость каждого из них равна C. Параллельно последнему конденсатору справа подключают некоторую ёмкость C', и при этом оказывается, что ёмкость всей цепи также равна C'.



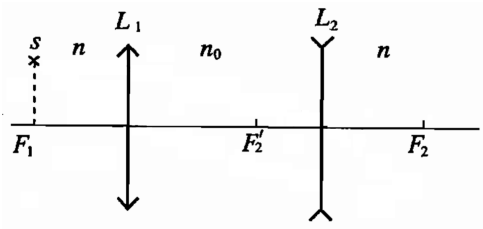
К задаче CN85-T3.2

1. Найдите значение C'.

2. К какому значению C_∞ стремится ёмкость цепи при стремлении количества её сегментов к бесконечности?

3. К какому значению $C'_{x\infty}$ стремится ёмкость цепи при стремлении количества её сегментов к бесконечности, если параллельно последнему конденсатору справа подключен конденсатор произвольной ёмкости C_x?

CN85-T4.1. Собирающая линза L_1 и рассеивающая L_2 расположены соосно, и показатель преломления в среде слева от L_1 и справа от L_2 равен n, а показатель преломления в среде между линзами – n_0 ($n < n_0$). F_1 представляет собой фокус L_1 слева от неё, а F_2 и F'_2 – фокусы L_2 справа и слева от неё соответственно. В фокальной плоскости линзы L_1 находится точечный источник s, как показано на рисунке.



К задаче CN85-T4.1

1. Нарисуйте путь лучей в системе и отметьте положение изображения источника s'. В своём решении кратко опишите процесс построения.

Фокусное расстояние L_1 в области слева от неё составляет $f_1 = 20$ см, фокусное расстояние L_2 слева от неё равно $f'_2 = 10$ см, а расстояние от s до оптической оси $sF_1 = 2$ см.

2. На каком расстоянии $s'F'_2$ от оптической оси находится изображение источника?

CN85-T4.2. Катод K испускает электроны (их масса m, заряд e, а начальная скорость пренебрежимо мала), которые затем разгоняются с помощью ускоряющего напряжения, приложенного между K и A, и обстреливают перегородку с двумя вертикальными щелями. После пролёта через щели электроны попадают на люминесцентный экран, и на нём возникает картина из светлых и тёмных полос.

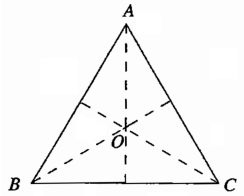
Известно, что ускоряющее напряжение равно U, а расстояние между щелями – d.

1. Тёмной или светлой будет полоса на пересечении оси симметрии системы и люминесцентного экрана?

Известно, что первая светлая полоса, не лежащая на оси, наблюдается под углом θ.

2. Найдите θ. Выразите ответ через m, e, d, U и фундаментальные константы.

CN85-T5. Три материальные точки A, B и C, имеющие одинаковую массу m, образуют равносторонний треугольник, как показано на рисунке. Материальные точки взаимодействуют гравитационно. Известно, что когда все три точки вращаются вокруг оси, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости треугольника, с некоторой угловой скоростью ω, их взаимное расположение (т.е. форма треугольника) не меняется с течением времени.



К задаче CN85-T5

1. Найдите величину этой угловой скорости ω. Выразите ответ через m, a и гравитационную постоянную G.

Пусть теперь массы материальных точек равны m_A, m_B и m_C ($m_A \neq m_B \neq m_C$). Известно, что существует точка O' такая, что при вращении материальных точек с некоторой угловой скоростью вокруг оси, проходящей через неё перпендикулярно плоскости треугольника, взаимное расположение точек тоже не меняется со временем.

2. Найдите величину этой угловой скорости ω'.

1986

CN86-T1.1. Насос объёмом $V = \frac{1}{4}$ л может совершать 8 откачиваний в минуту. Насос подключают к ёмкости объёмом $V_0 = 1$ л. Изначальное давление воздуха в ёмкости равно $p_0 = 760$ мм рт. ст., конечное – $p = 1.9$ мм рт. ст.. За какое время t насос откачает воздух из ёмкости? Температуру в процессе откачки считайте постоянной.

CN86-T1.2. Ядро захватывает μ^--мюон (масса μ^--мюона $m_{\mu^-} = 207 m_e$, а заряд равен заряду электрона e), образуя т.н. мюонный атом. Известно, что массовое число ядра равно A, а количество нейтронов N равно количеству протонов Z. Боровский радиус атома водорода равен $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}$ м.

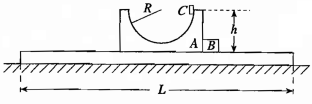
1. Найдите радиус основной орбиты мюона a в мюонном атоме.

Известно, что, когда A больше некоторого значения, радиус орбиты мюона оказывается меньше радиуса ядра. Радиус ядра определяется формулой

$$R = 1.2 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ м.}$$

2. Найдите это значение A.

CN86-T2. Как показано на рисунке, на земле закреплена гладкая платформа длиной L, и в её центре находятся два небольших соприкасающихся тела A и B. Верхняя поверхность тела A представляет собой полуокружность радиусом R ($R \ll L$), и наивысшая точка полуокружности находится на расстоянии h от платформы. В



К задаче CN86-T2

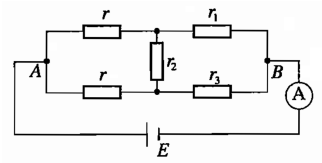
этой точке находится небольшой брусок C. Массы A, B и C одинаковы и равны m. В начальный момент времени брусок C отпускают из состояния покоя, и он начинает скользить по A. Известно, что всё время движения A и C находятся в контакте друг с другом.

1. Найдите скорость v_B тела B в тот момент, когда контакт между A и B прекратится.

2. Найдите, на какую максимальную высоту l над поверхностью платформы поднимется брусок C после разделения тел A и B.

3. Определите, с какой стороны платформы упадёт тело A и какое приблизительно время t понадобится ему для этого после потери контакта с B.

CN86-T3. В схеме, показанной на рисунке, сопротивление каждого резистора равно $r = 1\ \Omega$, а внутренними сопротивлениями амперметра и источника можно пренебречь. ЭДС источника равна $E = 10$ В.



К задаче CN86-T3

1. Найдите силу тока I через амперметр.

Предположим теперь, что только первые два резистора r полностью исправны. Про резисторы r_1, r_2 и r_3 известно, что в произвольный момент времени каждый из них проводит ток с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо от остальных, и в рабочем состоянии их сопротивление остаётся прежним – $r = 1\ \Omega$.

2. Найдите среднюю мощность $\langle P \rangle$, выделяющуюся в такой цепи.

CN86-T4. Три одинаковых конденсатора соединены последовательно, как показано на рисунке. Известно, что заряд на конденсаторе 1 равен Q, причём его левая пластина заряжена положительно, а конденсаторы 2 и 3 не заряжены. Точки a и b замыкают накоротко.

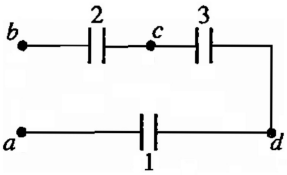
1. Найдите заряд q_2 на конденсаторе 2 и его знак на левой пластине.

Точки a и b разъединяют, после чего замыкают накоротко точки a и c. Затем их тоже разъединяют и вновь замыкают накоротко a и b.

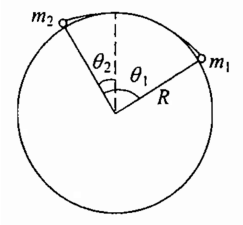
2. Найдите заряд q_2' на конденсаторе 2 и его знак на левой пластине.

Наконец, между собой соединяют точки a и d.

3. Найдите заряд q_2'' на конденсаторе 2 и его знак на левой пластине.



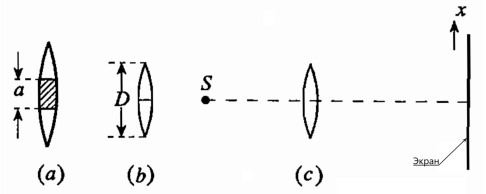
К задаче CN86-T4



К задаче CN86-T5

CN86-T5. Цилиндр радиусом R зафиксирован горизонтально, и через него перекинута идеальная нить длиной $\frac{\pi}{2}R$, концы которой привязаны к двум грузам с массами m_1 и m_2 ($m_1 = 2m_2$) пренебрежимо малых размеров, причём к m_1 привязан её правый конец. Коэффициент трения покоя между ними и поверхностью цилиндра равен $\mu < 1$, трение между нитью и цилиндром отсутствует. Поперечное сечение системы показано на рисунке. Цилиндр начинают очень медленно вращать по часовой стрелке до того положения, после прохождения которого система вышла бы из равновесия. После этого цилиндр так же медленно поворачивают на угол $\Delta\theta$ по часовой стрелке, и грузы начинают скользить вниз. Найдите величину изменения угла $\Delta\theta$.

CN86-T6. Как показано на рисунке (a), из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 20$ см вырезают центральную часть шириной a, после чего соединяют две оставшиеся половинки в т.н. цементированную линзу, как показано на рисунке (b), где $D = 2$ см.



К задаче CN86-T6

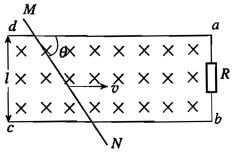
На центральной оси цементированной линзы на расстоянии 20 см от неё помещают точечный источник монохроматического света с длиной волны $\lambda = 5000$ Å, как показано на рисунке (c). На экране при этом появляются интерференционные полосы, расстояние между которыми равно $\Delta x = 0.2$ мм.

1. Чему равна ширина вырезанной части a?

2. На каком расстоянии d от линзы должен находиться экран, чтобы количество наблюдаемых интерференционных полос было максимально?

1987

CN87-T1. На рисунке показаны две параллельные направляющие, расположенные на расстоянии l м друг от друга, и их сопротивление пренебрежимо мало. Между a и b подключен резистор с сопротивлением R. На направляющих под произвольным углом θ может быть установлен прямой и тонкий стержень MN, который может скользить по ним со постоянной скоростью v в направлении, параллельном da. Погонное сопротивление стержня MN равно R на один метр. В пространстве между направляющими существует однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно картинной плоскости $dabc$ от наблюдателя. Величина индукции этого магнитного поля равна B.



К задаче CN87-T1

1. Найдите, при каком значении угла θ тепловая мощность, выделяемая на резисторе R, будет максимальна.

2. Найдите, при каком значении угла θ тепловая мощность, выделяемая на стержне MN, будет максимальна.

CN87-T2.1. Неподвижный атом с массой M излучает фотон при переходе на другой энергетический уровень (его энергия меняется с E_2 на E_1). Известно, что фотон с энергией E имеет импульс $\frac{E}{c}$, где c – скорость света. Найдите отношение кинетической энергии атома T после излучения к энергии фотона E в приближении $Mc^2 \gg (E_2 - E_1)$.

CN87-T2.2. Известно, что при абсолютной температуре T средняя энергия фотонов равновесного электромагнитного излучения равна $\frac{3RT}{N_A}$, где R – универсальная газовая постоянная, а N_A – постоянная Авогадро. Считается, что на ранних стадиях развития Вселенной столкновения фотонов могли порождать протоны и антипротоны (т.е. пара фотонов превращалась в протон и антипротон в результате столкновения). Оцените температуру T Вселенной в это время. Приведите ответ с точностью до двух значащих цифр.

CN87-T2.3. Диаметр молекул газа составляет $2 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените отношение среднего расстояния l между молекулами газа при нормальных условиях к диаметру молекул d. Приведите ответ с точностью до двух значащих цифр.

Примечание: считайте известными следующие величины: $c = 3.0 \cdot 10^8$ м/с, масса протона $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг, $R = 8.3$ Дж/(моль·К), $N_A = 6.0 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

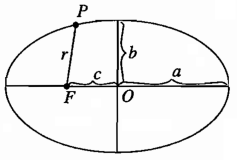
CN87-T3. Результатами астрономических наблюдений движения планет в Солнечной системе стали следующие три закона – т.н. законы Кеплера:

I. *(Первый закон)* Каждая планета вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, и Солнце находится в одном из фокусов этого эллипса.

II. *(Второй закон)* Для каждой планеты площадь, заметаемая её радиус-вектором относительно Солнца (FP на рисунке) в единицу времени, является постоянной величиной.

III. *(Третий закон)* Отношение куба большой полуоси орбиты планеты к квадрату периода её обращения одинаково для всех планет.

Типичная орбита показана на рисунке, где P представляет собой планету, F – фокус орбиты (Солнце), O – центр эллипса, а a, b и $2c$ есть большая и малая полуоси и расстояние между фокусами соответственно. Согласно закону всемирного тяготения, потенциальная энергия взаимодействия между Солнцем и планетой равна



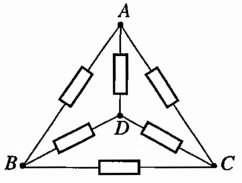
К задаче CN87-T3

$$U = -\frac{GMm}{r},$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса Солнца, m – масса планеты, а r – расстояние между ними.

Используя закон сохранения энергии, а также первый и второй законы Кеплера, найдите полную механическую энергию движения планеты E, площадь S, заметаемую в единицу времени, и период T обращения планеты. Выразите ответы через G, M, m, a, b. Докажите третий закон Кеплера.

CN87-T4. Шесть внешне неотличимых резисторов соединены в цепь, как показано на рисунке. Известно, что сопротивление пяти из них в точности равно 2 Ω, а сопротивление последнего отличается от этого значения. С помощью омметра можно три раза измерить сопротивление между любыми двумя точками цепи. Можно ли с помощью трёх измерений однозначно определить неисправный резистор? Если можно, то вкратце опишите алгоритм его нахождения.



К задаче CN87-T4

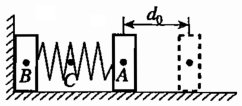
CN87-T5. На горизонтальном столе находится абсолютно твёрдый шар диаметром R, на который надевают однородную резинку в форме окружности, имеющую массу M и начальную длину $2\pi a$, $a = \frac{R}{2}$. Коэффициент жёсткости резинки равен k. Резинку надевают на шар так, чтобы в статическом равновесии она оставалась горизонтальной. Трением между ней и шаром можно пренебречь.

1. Найдите коэффициент жёсткости k резинки, если в положении равновесия её длина составляет $2\pi b$, $b = \sqrt{2}a$.

2. Найдите конечное положение равновесия резинки и её длину l, если $k = \frac{Mg}{2\pi^2 R}$.

1988

CN88-T1. Два небольших деревянных бруска A и B с одинаковой массой m соединены невесомой пружиной с коэффициентом жёсткости k и помещены в угол между стеной и гладкой горизонтальной поверхностью, как показано на рисунке. Пружину сжимают на величину d_0 и затем отпускают.



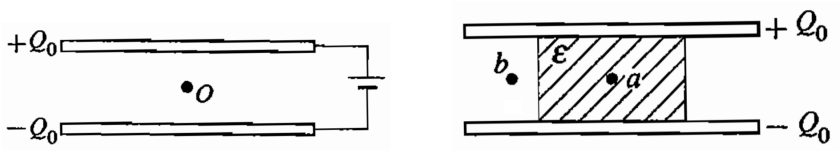
К задаче CN88-T1

1. Как будут двигаться бруски относительно их центра масс C после того, как B оторвётся от стены?

2. Найдите частоту f, амплитуду a и энергию E_C с системе отсчёта, связанной с C, для этого движения.

Примечание: в системе отсчёта, движущейся равномерно относительно земли, тоже справедливы закон сохранения энергии и второй закон Ньютона.

CN88-T2.1. Рассмотрим воздушный конденсатор с параллельными пластинами площадью S. Он подключен к источнику питания, и заряд на его пластинах равен $+Q_0$ и $-Q_0$, как показано на рисунке (a).



(a) (b)

К задаче CN88-T2.1

Теперь конденсатор отключают от источника питания и, не меняя расстояния между его пластинами, заполняют половину пространства между пластинами диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε, как показано на рисунке (b).

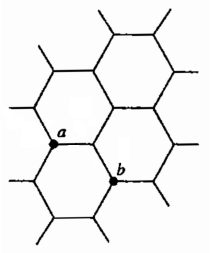
Все ответы в данной части задачи выражайте через Q_0, S и ε. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен k.

1. Найдите напряжённость поля E_O в точке O на рисунке (a).
2. Найдите напряжённость поля E_a в точке a на рисунке (b).
3. Найдите напряжённость поля E_b в точке b на рисунке (b).
4. Найдите заряд Q_1 на контактирующей с диэлектриком части положительно заряженной пластины на рисунке (b).
5. Найдите заряд Q_2 на контактирующей с воздухом части положительно заряженной пластины на рисунке (b).
6. Найдите поляризационный заряд Q_1' на границе диэлектрика, контактирующей с положительно заряженной пластиной на рисунке (b).

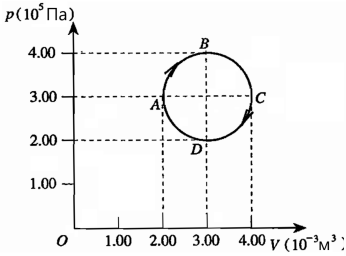
CN88-T2.2. Рассмотрим бесконечную двумерную цепь, состоящую из правильных шестиугольных ячеек одинакового размера, как показано на рисунке. Известно, что сопротивление каждой стороны шестиугольника равно R_0. Найдите эквивалентное сопротивление R_{ab} между точками a и b цепи.

CN88-T3.1. Рассмотрим одноатомный идеальный газ в количестве $n = \frac{2.00}{8.31}$ моль (молярная теплоёмкость такого газа равна $1.50R$, где $R = 8.31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная), который совершает циклический процесс $ABCDA$, представляющий собой окружность на $p - V$-диаграмме, как показано на рисунке.

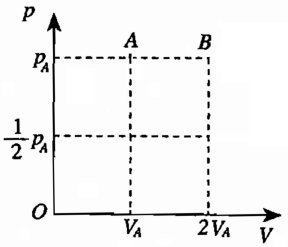
1. В какой точке H температура газа будет максимальной? Найдите эту максимальную температуру T_H.
2. Найдите подведённую к газу теплоту Q_{CD}, изменение внутренней энергии газа ΔE_{CD} и совершённую газом работу W_{CD} в процессе $C \to D$.



К задаче CN88-T2.2



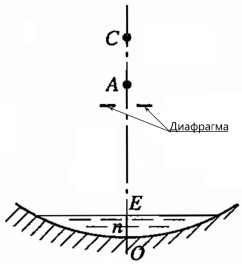
К задаче CN88-T3.1



К задаче CN88-T3.2

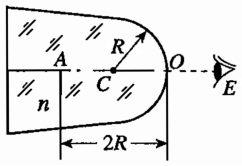
CN88-T3.2. Рассмотрим одноатомный идеальный газ в количестве n моль, который необходимо перевести из начального состояния $A(p_A,V_A,T_A)$ в конечное состояние $B(p_B = p_A,V_B = 2V_A,T_B)$, как показано на рисунке. Существует ли такой процесс, приводящий из A в B, что в нём подведённая к газу теплота равна изменению его внутренней энергии?

CN88-T4.1. На рисунке показано вогнутое сферическое зеркало, центр которого находится в точке C и в которое налита прозрачная жидкость. Расстояние от C до поверхности жидкости E равно $CE = 40.0$ см, и на прямой CO находится источник A, причём $AE = 30.0$ см, а изображение источника является действительным и с ним совпадает. Чтобы удовлетворить условиям параксиального приближения для лучей, в системе используется диафрагма с малым диаметром отверстия. Найдите показатель преломления n прозрачной жидкости.



К задаче CN88-T4.1

CN88-T4.2. На рисунке показано поперечное сечение ртутного термометра. Расстояние между столбиком ртути A и вершиной цилиндрической поверхности O равно $AO = 2R$, где R – радиус цилиндрической поверхности. Наблюдатель находится в точке E, C представляет собой центр цилиндрической поверхности, показатель преломления стекла равен $n = \frac{3}{2}$. Найдите положение столбика ртути, воспринимаемое наблюдателем, и его увеличение Г.



К задаче CN88-T4.2

CN88-T5.1. В 1884 году Бальмер изучал систему спектральных линий излучения атома водорода (позже названную серией Бальмера), расположенную преимущественно в области видимого спектра. Первые четыре по убыванию длины волны λ этой серии и предельное значение длин волны серии λ_0 равны

соответственно:

$$6562.10\ \text{Å},\ 4860.74\ \text{Å},\ 4340.10\ \text{Å},\ 4101.20\ \text{Å},\ \ldots,\ 3645{,}61\ \text{Å}.$$

Бальмер обнаружил, отношение длин волн λ серии к предельной длине волны λ_0 можно с точностью до пяти значащих цифр записать в виде рационального числа:

$$\frac{6562.10}{3645.61} = \frac{9}{5},\ \frac{4860.74}{36450.61} = \frac{4}{3},\ \frac{4340.10}{3645.61} = \frac{25}{21},\ \frac{4101.20}{3645.61} = \frac{9}{8},\ldots$$

На основе этого попытайтесь вывести эмпирическую формулу, отражающую результаты этого эксперимента, то есть формулу Бальмера для длины волны линии, и найти экспериментальное значение постоянной Ридберга.

Основываясь на этих данных, выведите эмпирическую формулу, отражающую результаты эксперимента, т.е. формулу Бальмера для длины волны линии. Найдите экспериментальное значение постоянной Ридберга R.

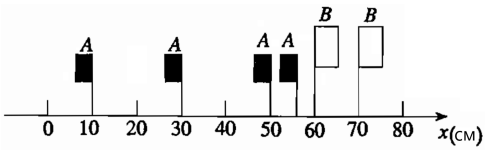
CN88-T5.2. Известно, что потенциальная энергия гравитационного взаимодействия между точечной массой m и сферически симметричной звездой с массой M и радиусом R, центр которой находится на расстоянии r ($r \geq R$) от точечной массы, равна

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}.$$

Существуют звёзды с очень настолько высокой плотностью, что их очень сильная гравитация не позволяет фотонам улететь с их поверхности, и потому никакое электромагнитное излучение от не может распространяться от них наружу. Такие звёзды называются чёрными дырами.

Пусть чёрная дыра имеет массу, равную массе Солнца $M_S = 2.0 \cdot 10^{30}$ кг. Чему равен радиус R такой чёрной дыры?

CN88-T6. Два ползунка A и B движутся по гладкой горизонтальной прямой направляющей и сталкиваются друг с другом. Для наблюдения за столкновением систему фотографируют с помощью стробоскопа. Всего происходит 4 его вспышки в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$ и $t_3 = 3\Delta t$. Результат показан на рисунке, где 4 меньших объекта представляют собой изображения ползунка A, а 2 больших – изображения B. Известно, что в моменты всех вспышек A и B находятся в диапазоне $x = 0 \ldots 80$ см.

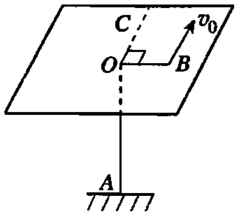


К задаче CN88-T6

Используя рисунок, найдите положение x и время столкновения t двух ползунков. Обоснуйте свой ответ.

1989

CN89-T1. Как показано на рисунке, в центре горизонтального гладкого стола есть небольшое гладкое отверстие O, через которое проходит невесомый тонкий резиновый жгут с коэффициентом жёсткости k. Один конец жгута закреплён в точке A (A находится строго под отверстием), а другой привязан к небольшому телу массой m. Длина жгута в ненатянутом состоянии равна расстоянию AO.



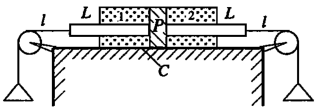
К задаче CN89-T1

Тело оттягивают вдоль стола в точку B (расстояние $OB = l$) и отпускают со скоростью v_0, направленной вдоль стола перпендикулярно OB.

1. Найдите время t, необходимое для того, чтобы тело попало из точки O в точку C, т.е. повернулось вокруг центра стола на 90°.

2. Найдите скорость тела v_C в точке C и расстояние OC от C до точки O.

CN89-T2. На рисунке показан цилиндр C, внутри которого находится поршень P. По обе стороны от P находится идеальный газ, и P может двигаться в цилиндре без трения и утечек. L представляет собой тонкий прямой стержень, закреплённый в поршне. Между стержнем и цилиндром также нет трения и утечек. l представляет собой лёгкий трос, перекинутый через два неподвижных блока, в осях которых отсутствует трение, и соединённый с двумя горизонтально подвешенными дисками, масса которых одинакова. Вся система находится в комнате с однородной температурой.



К задаче CN89-T2

При температуре $T = 300$ K груз массой $m_1 = 1.2$ кг помещается на левый диск, и после того, как система приходит в равновесия, объёмы газа в двух частях цилиндра соотносятся как $V_1 : V_2 = 1 : 1$.

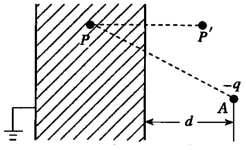
При температуре $T = 400$ K груз массой $m_1 = 0.5$ кг помещается на правый диск, и после того, как система приходит в равновесия, объёмы газа в двух частях цилиндра соотносятся как $V_1' : V_2' = 4 : 1$.

1. Как должны быть связаны массы $m_Л$ и $m_П$ грузов, помещаемых на левый и правый диски соответственно, чтобы поршень не смещался при изменении температуры в комнате?

2. Чему при этом будет равно соотношение объёмов двух частей газа $V_1 : V_2$?

CN89-T3. На рисунке показана заземлённая проводящая пластина очень больших размеров. На расстоянии d от неё размещён точечный заряд величиной $-q$.

1. Найдите напряжённость поля E_{iP}, создаваемого индуцированным в пластине зарядом, в точке P внутри неё. Расстояние между точками P и A равно r.



К задаче CN89-T3

2. Найдите напряжённость электрического поля $E_{iP'}$, создаваемого индуцированным в пластине зарядом, в точке P' вне её. Точки P и P' расположены симметрично относительно правой границы пластины.

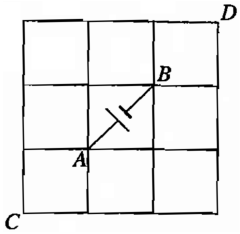
3. Покажите, что напряжённость электрического поля у поверхности проводника направлена по нормали к поверхности.

4. Найдите, с какой силой F индуцированный на пластине заряд действует на точечный заряд $-q$.

Пластину отсоединяют от земли и подают на неё заряд $+Q$.

5. В пренебрежении краевыми эффектами найдите, как должен распределиться этот заряд по поверхности пластины для достижения электростатического равновесия.

CN89-T4. Квадратная решётка из проводов с одинаковым сопротивлением состоит из 9 одинаковых маленьких квадратов, как показано на рисунке, и сопротивление стороны маленького квадрата равно $r = 8\ \Omega$. Между точками A и B подключают источник питания с ЭДС $E = 5.7$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением.



К задаче CN89-T4

1. Найдите силу тока через источник I_{AB}.

2. Теперь точки C и D соединяют проводом с пренебрежимо малым сопротивлением. Найдите силу тока через этот провод I_{CD}.

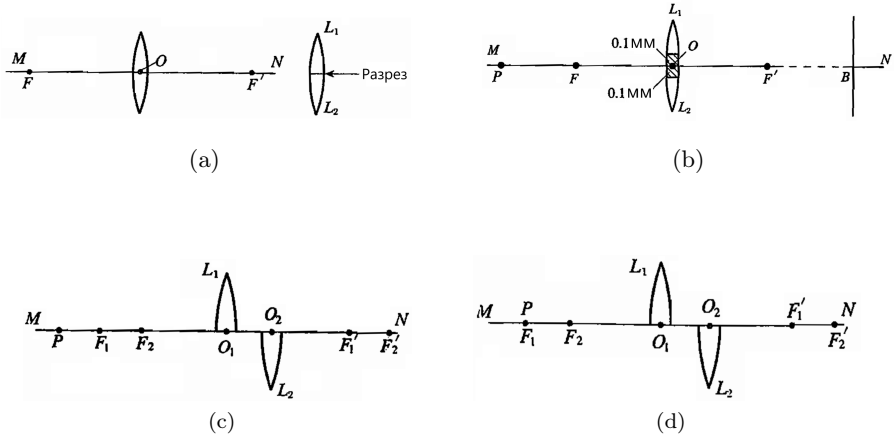
CN89-T5. На рисунке (a) показана тонкая линза с фокусным расстоянием $f = 10$ см. O – её оптический центр, а MN – её главная оптическая ось. Линзу разрезают пополам так, что разрез проходит через её оптическую ось перпендикулярно картинной плоскости. Две половинки разрезанной линзы раздвигают в направлении, перпендикулярном главной оптической оси, так, чтобы расстояние между краями разрезов и MN составляло 0.1 мм. Пространство между двумя половинками линзы после этого заполняют непрозрачным веществом. Полученная система используется для наблюдения интерференции по схеме, показанной на рисунке (b). На схеме P представляет собой монохроматический источник света с длиной волны $\lambda = 5500$ Å, B – экран, перпендикулярный MN, $PO = 20$ см, а $OB = 40$ см.

1.1. Постройте на данной схеме ход лучей света.

1.2. Найдите расстояние Δx между интерференционными полосами картины, появляющейся на экране B.

1.3. Как будет меняться Δx, если экран B сместить вправо?

Теперь половинки линзы разносят на небольшое расстояние вдоль главной оптической оси MN, как показано на рисунке (c). Полученную схему используют для наблюдения интерференции. P представляет собой монохроматический источник света, расположенный от половинки L_1 на расстоянии, большем фокусного.



К задаче CN89-T5

2.1. Постройте на данной схеме ход лучей света.

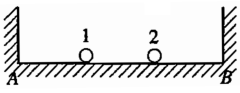
2.2. Заштрихуйте область, в которой происходит пересечение лучей от двух половинок линзы.

2.3. Нарисуйте интерференционную картину, образующуюся на экране, помещённом в области пересечения лучей от двух половинок линзы.

В схеме из предыдущей части источник света P перемещают вдоль главной оптической оси в фокус F_1 половинки L_1, как показано на рисунке (d).

3. Для получившейся схемы ответьте на те же вопросы, что и в п. 2.

CN89-T6. Как показано на рисунке, два шарика (их можно рассматривать как материальные точки) 1 и 2 с одинаковыми массами могут двигаться по гладкому горизонтальному жёлобу AB со стенками на концах. Все столкновения шариков со стенками и друг с другом полностью упругие. Изначально шарики 1 и 2 находятся в точках, разделяющих жёлоб на три равные части, и движутся в одном направлении, но не обязательно с одной и той же скоростью.



К задаче CN89-T6

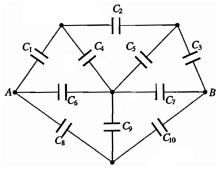
1. Найдите отношение начальных скоростей шариков v_1/v_2, если известно, что второе столкновение шариков между собой произошло точно в середине жёлоба.

2. Найдите отношение начальных скоростей шариков v_1/v_2, если известно, что пятое столкновение шариков между собой произошло точно в середине жёлоба. Какое число решений N удовлетворяет этим требованиям?

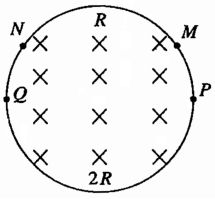
Примечание: в пункте 2 удобно сначала найти общее решение и уже из него найти все частные.

1990

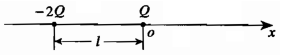
CN90-T1. В показанной на рисунке схеме $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1$ мкФ, $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2$ мкФ и $C_8 = C_{10} = 3$ мкФ. Найдите эквивалентную ёмкость C_{AB} между точками A и B.



К задаче CN90-T1



К задаче CN90-T2



К задаче CN90-T4

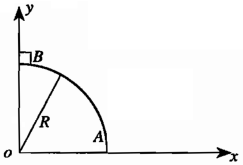
CN90-T2. Два тонких одинаковой длины из одного и того же материала с сопротивлениями R и $2R$ образуют кольцо диаметром D, соединяясь в точках P и Q, как показано на рисунке. В области внутри кольца существует однородное магнитное поле, перпендикулярное ему и направленное от наблюдателя, а его индукция линейно увеличивается со временем, и $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = b = \mathrm{const}$. Известно, что ЭДС, индуцированная при этом в кольце, распределена по нему равномерно. M и N – две точки на кольце, и длина дуги MN равна половине полуокружности $PMNQ$. Найдите напряжение $U_M - U_N$ между этими точками.

CN90-T3. Рассмотрим тонкостенный цилиндрический стакан радиусом r и массой m. Его центр тяжести находится на оси симметрии на расстоянии H от дна стакана. В стакан начинают наливать воду, плотность которой равна ρ, и в некоторый момент высота центра тяжести системы оказывается минимальной. Найдите высоту поверхности воды h относительно дна стакана в этот момент.

CN90-T4. Как показано на рисунке, в начале координат o оси x закреплён точечный заряд Q ($Q > 0$), а в точке $x = -l$ – точечный заряд $-2Q$. В некоторую точку на положительной части оси x (т.е. при $x > 0$) помещают пробный заряд величиной q.

1. Найдите положение равновесия x_p пробного заряда q. Устойчиво ли оно?
2. Постройте качественный график результирующей силы F, действующей на пробный заряд q в зависимости от его положения на оси x.

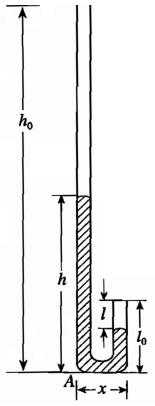
CN90-T5. На ровной горизонтальной поверхности находится тело A массы M, поперечное сечение которого представляет собой $\frac{1}{4}$ цилиндра с радиусом основания R, как показано на рисунке. Цилиндрическая поверхность A гладкая, и на её вершине находится небольшой груз B массой m. В начальный момент времени A и B находятся



К задаче CN90-T5

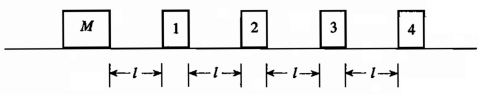
в состоянии покоя в неподвижной системе отсчёта (обозначенной xoy на рисунке), и груза B слегка выводят из положения равновесия так, чтобы он начал скользить вниз по цилиндрической поверхности A. Найдите траекторию груза B в системе отсчёта xoy до того момента, как он оторвётся от A.

CN90-T6. На рисунке показана U-образная жёсткая пластиковая трубка с однородным поперечным сечением. Длина её плеч равна $l_0 = 20.0$ см и $h_0 = 180.0$ см, и они расположены вертикально. Трубка заполнена ртутью, её верхний конец открыт, а нижний запаян, и в нём находится столбик воздуха высотой $l = 10.0$ см. Известно, что высоты столба ртути в горизонтальном и длинном вертикальном участках трубки равны $x = 10.0$ см и $h = 60.0$ см соответственно, а атмосферное давление равно $p_0 = 76.0$ см рт. ст. Теперь трубку медленно поворачивают на 180° против часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной плоскости трубки и проходящей через точку A, а затем очень быстро отрезают от её открытого конца кусок длиной 50 см. Найдите конечную высоту b столба воздуха в запаянном конце трубки.



К задаче CN90-T6

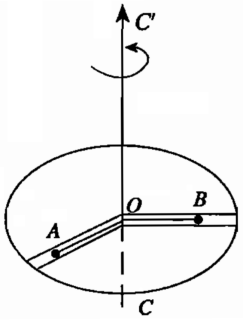
CN90-T7. Как показано на рисунке, на большой гладкой горизонтальной поверхности на равном расстоянии l друг от друга в ряд выставлены прямоугольные деревянные бруски одинаковой массы m, пронумерованные натуральными числами от 1. Теперь на расстоянии l перед первым бруском помещают большой брусок массой $M = 4m$. Изначально все бруски находятся в состоянии покоя. В некоторый момент времени на большой брусок начинает действовать постоянная сила F в направлении остальных брусков, заставляя его поочерёдно неупруго с ними сталкиваться. Скорость большого бруска непосредственно перед столкновения с k-тым маленьким обозначим v_k. Существует ли такое k_{max}, при котором v_k достигает максимума? Если да, то чему равна v_{max}?



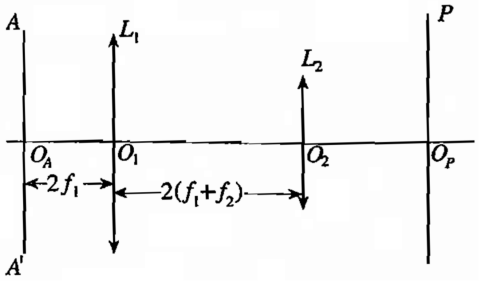
К задаче CN90-T7

CN90-T8. Круглый горизонтальный стол радиусом R может без трения вращаться с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CC', проходящей через его центр O, как показано на рисунке. В этом столе вырезаны две перпендикулярные друг другу радиальные канавки. В одну из них помещают небольшое тело A массой m_A, и коэффициент трения покоя между A и дном канавки равен μ_0, а в другую канавку помещают небольшое тело B массой m_B, и трение между ним и дном канавки отсутствует. С помощью невесомой нерастяжимой нити длины l ($l < R$), перекинутой через ось в точке O, тела A и B связывают вместе. Расстояние от тела A до центра стола O обозначим как x. Считайте,

что стол вращается с постоянной угловой скоростью, и тангенциальная составляющая силы, действующей на A со стороны канавки, равна нулю. Найдите, какому условию должны удовлетворять ω и x, чтобы тела A и B находились в состоянии покоя относительно стола.



К задаче CN90-T8



К задаче CN90-T9

CN90-T9. В показанной на рисунке оптической системе две собирающие линзы L_1 и L_2 расположены соосно, их фокусные расстояния равны f_1 и f_2, а их диаметры – D и $\frac{D}{2}$ соответственно. Линзы находятся на расстоянии $2(f_1+f_2)$ друг от друга. Объект AA' перпендикулярен главной оптической оси и имеет размер D и находится на расстоянии $2f_1$ от L_1, а его центр OA расположен на главной оптической оси. Экран P также перпендикулярен главной оптической оси и расположен справа от L_2, а O_P представляет собой изображение точки O_A. На экране можно наблюдать только центральную часть объекта AA'.

1. Нарисуйте путь лучей света в системе и объясните наблюдаемую на экране картину.

2. Можно ли, не меняя положение объекта AA', линз L_1 и L_2 и экрана P, добавить в систему собирающую линзу L так, чтобы на экране P можно было наблюдать изображение объекта AA' полностью? Если нет, объясните, почему. Если да, то где следует поместить L и чему должен быть равен её минимальный диаметр? Чему будет равно её оптимальное фокусное расстояние?

1991

CN91-T1. Показанный на рисунке электростатический сепаратор барабанного типа состоит из воронки A, направляющей пластины B, проводящего барабана C, скребка D, лотков E и F и разрядной иглы G. C и G подключены к положительному и отрицательному электродам источника высокого постоянного напряжения соответственно, и C заземлён. Напряжение источника питания достаточно высокое, чтобы ионизировать воздух вокруг иглы G. Смесь порошков двух веществ a и b с разными проводимостями высыпается из воронки A

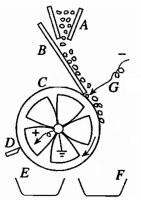
и по направляющей пластине B достигает вращающегося барабана C. Вещество порошка a имеет высокую проводимость, а вещество порошка b наоборот является изолятором.

1. Кратко объясните основной принцип работы сепаратора, т.е. то, как он осуществляет разделение частиц порошков a и b.

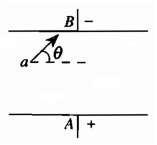
2. В какой из лотков попадают частицы каждого из порошков a и b после сортировки.

3. Кратко объясните, какую функцию выполняет скребок D.

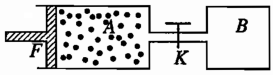
4. Будет ли работать сепаратор, если заземлить не барабан C, а разрядную иглу G при том же напряжении? Кратко объясните свой ответ.



К задаче CN91-T1



К задаче CN91-T2



К задаче CN91-T3

CN91-T2. Как показано на рисунке, A и B представляют собой две горизонтальные заряженные металлические пластины, поле между которыми можно считать однородным. В начальный момент времени из точки a под углом $\theta = 45^\circ$ к горизонту вылетает отрицательно заряженная частица. Известно, что в момент времени $t_b = 0.10$ с частица достигает наивысшей точки своей траектории, а в момент времени $t_c = 0.30$ с её кинетическая энергия равна $E_c = 750$ эВ. При решении задачи считайте, что частица всё время находится между пластинами и не сталкивается с ними. Найдите изначальную кинетическую энергию частицы E_0.

CN91-T3. На рисунке показаны два сосуда A и B с круглым сечением, соединённые короткой и очень тонкой трубкой. В трубке находится кран K с высокой теплопроводностью. Сосуд и трубка, напротив, теплоизолированы. F представляет собой теплоизолированный поршень, который плотно прилегает к стенкам сосуда A, но движется с пренебрежимо малым трением. Изначально K замкнут, а F находится на левом конце A. В сосуде A находится n моль идеального газа при температуре T_0, сосуд B вакуумирован. Поршень F двигают вправо, пока объём газа не сравняется с объёмом сосуда B. При этом над газом совершена работа W, а его температура стала равна T_1. В этот момент кран K слегка приоткрывают, и газ из A медленно просачивается в B. При этом поршень F двигается вправо так, что давление газа в A остаётся примерно постоянным. Найдите температуру газа T_2 в конце этого процесса. При решении задачи пренебрегите теплоёмкостями поршня, крана и сосудов.

CN91-T4. Придумайте цепь постоянного тока, состоящую только из резисторов, удовлетворив следующим четырём требованиям:

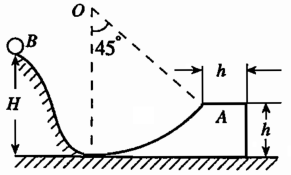
1) Цепь должна иметь 4 клеммы – A, B, A' и B' – такие, что при разомкнутых A' и B' сопротивление между A и B равно $R_{A'B'} = 8.0\ \Omega$ и при разомкнутых A и B сопротивление между A' и B' тоже равно $R_{AB} = 8.0\ \Omega$.

2) Когда на концы A и B подано напряжение $V_{AB} = 1.0$ В (+ на A и − на B), напряжение между A' и B' равно $V^*_{A'B'} = 0.1$ В (+ на A и − на B), а когда на концы A' и B' подано напряжение $V_{A'B'} = 1.0$ В, напряжение между A' и B' также равно $V^*_{AB} = 0.1$ В.

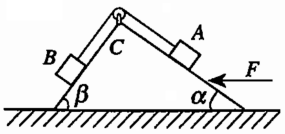
3) Количество используемых резисторов должно быть как можно меньше.

4) Необходимо придумать два типа такой схемы.

CN91-T5. На рисунке показан гладкий жёлоб A с массой M в форме $\frac{1}{8}$ окружности, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности. Его нижняя часть горизонтальна и соединяется гладко с направляющей с высотой H. B представляет собой небольшой мяч с массой $m = 0.4M$, который соскальзывает вниз с вершины направляющей из состояния покоя. В каком диапазоне должно лежать значение $\frac{H}{h}$, чтобы мяч в процессе дальнейшего движения попал на находящуюся на A платформу.



К задаче CN91-T5



К задаче CN91-T7

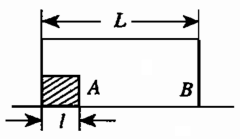
CN91-T6. Фреон с массой $M = 2.0$ кг, температурой $t = -13$ °C, объёмом $V = 0.19$ м^3 и молекулярной массой $\mu = 0.121$ кг/моль сжимается при постоянной температуре до объёма $V = 0.10$ м^3. Известно, что при −13 °C плотность жидкого фреона равна $\rho_f = 1.44 \cdot 10^3$ кг/м^3, а давление его насыщенного пара – $p_s = 2.08 \cdot 10^5$ Па. Насыщенный пар фреона можно считать идеальным газом. Найдите, какая масса M_1 фреона была сжижена в этом процессе.

CN91-T7. На рисунке показана двойная наклонная плоскость C, расположенная на неподвижном шероховатом горизонтальном столе. Её масса $m_c = 6.5$ кг, и на её верхней точке закреплён неподвижный блок, массу и трение в оси которого можно считать пренебрежимо малыми. Два груза A и B с массами $m_A = 3.0$ кг и $m_B = 0.50$ кг соответственно соединены лёгкой нерастяжимой верёвкой, перекинутой через блок. Изначально A, B и C удерживают в состоянии покоя, а верёвка натянута по обе стороны от блока.

На C начинает действовать горизонтальная сила $F = 26.5$ Н, и в этот момент грузы отпускают. C начинает скользить влево с ускорением $a = 3.0$ м/с^2,

а B при этом не смещается по горизонтали относительно стола. Найдите коэффициент трения μ между наклонной плоскостью C и столом. Считайте, что $\alpha = 37°$, угол при вершине наклонной плоскости прямой, а ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

CN91-T8. Деревянный брусок A с длиной l ставят на очень длинную и ровную горизонтальную площадку и накрывают прямоугольным ящиком B без крышки. Внутренняя ширина ящика B равна L ($L > l$), а его масса совпадает с массой A. Коэффициент трения скольжения между A и землёй равен μ_A, а между B и землёй – μ_B, причём $\mu_B > \mu_A$. В начальный момент времени левый конец A соприкасается с левой стенкой ящика B, как это показано на рисунке, и они оба движутся вправо с одинаковой начальной скоростью v_0. Считайте, что все столкновения между левыми и правыми стенками A и ящика B абсолютно упругие и происходят за пренебрежимо малое время, а другие стороны A и B не соприкасаются друг с другом в процессе движения.



К задаче CN91-T8

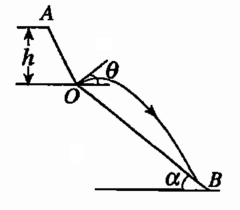
1. Чему должна быть равна начальная скорость v_0, чтобы A и B остановились одновременно, и между ними был контакт, при котором сила реакции между их стенками равна нулю?

2. Чему должна быть равна начальная скорость v_0', чтобы B остановился первым, а после остановки A между ним и B был контакт, при котором сила реакции между их стенками равна нулю?

3. Существует ли такое значение начальной скорости v_0, при котором B сначала останавливается, а после вновь приходит в движение после столкновения с A, остановившись впоследствии одновременно с ним? Поясните свой ответ.

1992

CN92-T1. Соревнования по прыжкам с трамплина проводятся на снежном склоне с углом наклона $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Спортсмены начинают движение в точке A, отрываются от поверхности земли в точке O, двигаясь под углом θ к горизонтали, и приземляются в точке B. Расстояние между точками вдоль склона равно $OB = L$. Известно также, что точка A лежит выше точки O на величину $h = 50$ м. Пренебрегая трением и сопротивлением, найдите максимальную длину прыжка L_{max} и угол θ_0, при котором такой прыжок возможен.



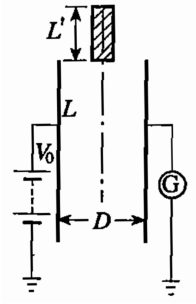
К задаче CN92-T1

CN92-T2. Сферический воздушный шар с герметичной оболочкой имеет вместе с корзиной массу 300 кг. После нагрева шар расширяется до своего максимального объёма, достигая диаметра $d = 18$ м. Газ внутри шара идентичен

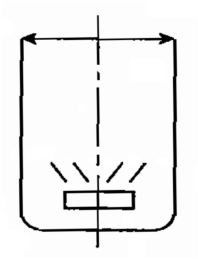
атмосферному воздуху, и давление внутри почти не превышает давление снаружи. Температура воздуха $T_1 = 27\ ^\circ\mathrm{C}$, его давление $p_1 = 1$ атм, а его плотность $\rho = 1.3$ кг/м^3. Найдите температуру T_2 газа в шаре в момент начала подъёма.

CN92-T3. Как показано на рисунке, конденсатор с квадратными обкладками со стороной L расположен вертикально и находится под постоянным напряжением V_0. G представляет собой амперметр. Рассмотрим небольшую квадратную металлическую пластину, падающую через конденсатор. Её ширина L' ($L \gg L'$), а толщина $\frac{D}{p}$, где $p \gg 1$, а D – расстояние между обкладками конденсатора. Изначально пластина располагается вертикально над центром конденсатора, её нижний конец совмещён с его верхним краем, и пластина падает из состояния покоя. Найдите заряд Q на обкладках конденсатора в зависимости от времени t.

Краевыми эффектами и силой, действующей на пластину со стороны поля конденсатора, можно пренебречь.



К задаче CN92-T3



К задаче CN92-T4

CN92-T4. Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 90$ мм помещают на верхнюю горловину высокого цилиндрического стакана, как показано на рисунке. На расстоянии $u = 100$ мм ниже линзы на оси стакана размещён круглый источник света, как показано на рисунке. Линза создаёт действительное изображение источника, имеющее радиус $b' = 45$ мм.

1. Найдите радиус источника b.

Теперь в стакан наливают воду, и её уровень оказывается на $h = 10$ мм выше источника. Коэффициент преломления воды считайте равным $n = \frac{4}{3} = 1.33$.

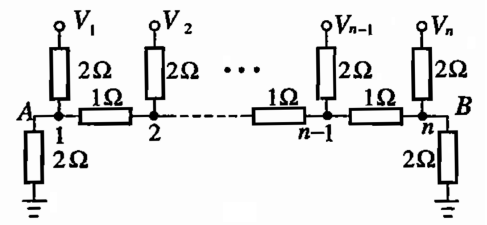
2. Найдите, на каком расстоянии u^* от линзы теперь формируется изображение источника.

Воду доливают почти до самого верха стакана, но так, что её поверхность ещё не касается линзы.

3. Как изменилось изображение источника? Каков теперь радиус b' его изображения?

CN92-T5. На рисунке показана схема, состоящая из нескольких резисто-

ров и заземлённая через сопротивления в точках A и B. Каждое из входных напряжений V_1,V_2,…,V_n может принимать только два значения – 0 В либо 1 В.

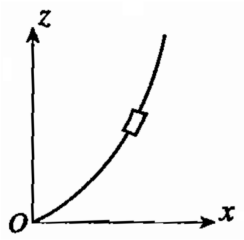


К задаче CN92-T5

1. Найдите количество N возможных значений выходного напряжения в точке B при $n = 3$.

2. Найдите максимальное значение U_∞ выходного напряжения в точке B при $n \to +\infty$.

CN92-T6. На рисунке показан изогнутый стержень, закреплённый в начале координат O и имеющий форму $z = \frac{1}{k}x^2$, где k – ненулевой коэффициент пропорциональности с размерностью длины. На стержень надет ползунок, коэффициент трения между ним и стержнем равен μ.



К задаче CN92-T6

1. Пренебрегая трением, найдите величину ускорения a ползунка, направленную по касательной к стержню, в зависимости от z.

Подсказка: выберите один из 5 возможных вариантов: 0, g, $2g\sqrt{\frac{z}{4z+k}}$, $gz\sqrt{4z^2+k^2}$, $\frac{gz}{k}$.

2. В каком диапазоне значений z ползунок будет оставаться в покое, если учитывать трение и считать стержень неподвижным? Выразите ответ через μ, g и k.

Предположим теперь, что стержень равномерно вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{2g}{k}}$.

3. В каком диапазоне значений z ползунок будет оставаться в покое относительно стержня?

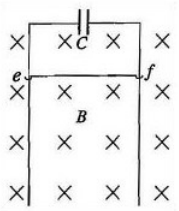
4. Решите предыдущий пункт в предположении $\mu = 0.5$, $\omega = \sqrt{\frac{6g}{k}}$.

1993

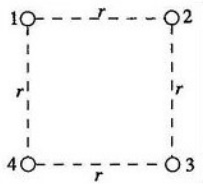
CN93-T1. Имеются 20 одинаковых строительных блоков, имеющих одинаковую массу; их длина равна l, а поперечное сечение представляет собой квадрат со стороной $h = \frac{l}{4}$. Из этих блоков необходимо возвести на горизонтальной поверхности однопролётный мост, причём ширину его пролёта нужно сделать

максимально возможной. Найдите отношение ширины пролёта L к высоте пролёта H. Схематично изобразите получившийся мост.

CN93-T2. Как показано на рисунке, конденсатор с ёмкостью C и напряжением пробоя U_b подключен к верхним концам пары длинных вертикальных гладких рельсов, расположенных на расстоянии L друг от друга. Магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости рельсов. Металлический стержень ef с массой m скользит по рельсам с начальной скоростью $v(t = 0) = v_0$. Сопротивлением и самоиндукцией всех элементов цепи можно пренебречь. Найдите время t, через которое конденсатор выйдет из строя.



К задаче CN93-T2



К задаче CN93-T3

CN93-T3. Как показано на рисунке, в вакууме находятся 4 одинаковых незаряженных проводящих сферы с радиусом a, расположенные в вершинах квадрата со стороной r ($r \gg a$). В некоторый момент времени сферу 1 заряжают зарядом Q ($Q > 0$). После этого к шарику прикрепляют один и концов тонкой металлической проволочки с пренебрежимо малой собственной ёмкостью, которую затем поочерёдно приводят в контакт со сферами 2, 3, 4 и затем заземляют. Найдите заряд Q_0, который перетечёт при этом в землю.

CN93-T4. Рассмотрим плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны $R = 30$ см. Известно, что в параксиальном приближении справедливы следующие утверждения:

1. Если посеребрить плоскую поверхность линзы, то она будет эквивалентна вогнутому сферическому зеркалу с фокусным расстоянием $f = 30$ см.

2. Если посеребрить выпуклую поверхность линзы, то она также будет эквивалентна вогнутому сферическому зеркалу. Найдите фокусное расстояние F эквивалентного сферического зеркала в случае 2.

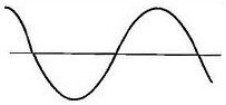
CN93-T5. На гладкой поверхности находится брусок P, закреплённый за правый конец зафиксированной невесомой идеальной пружины. Справа от P находится ещё один брусок Q, масса которого в 2.5 раза больше. Справа от P и Q на расстоянии $\frac{14\pi}{13}$ см находится вертикальная стена. В некоторый момент времени P и Q смещают влево на некоторое расстояние L_0 от их изначального положения и отпускают без толчка. Известно, что в ходе дальнейшего движения

P впервые столкнётся с Q, когда совершит одно полное колебание после первого прохождения положения равновесия. Считайте, что все столкновения в задаче являются упругими.

1. Найдите начальную величину сжатия пружины L_0.

2. На какое максимальное расстояние A_1 от точки разделения двух брусков отдалится P в промежуток времени от разделения до первого столкновения с Q?

3. На какое максимальное расстояние A_2 от точки разделения двух брусков отдалится P в промежуток времени от первого до второго столкновения с Q?



К задаче CN93-T5

4. Взяв за основу показанную на рисунке синусоиду и приняв положение и момент первого столкновения P и Q за начало координат, нарисуйте графики зависимости положения P и Q от времени и укажите момент второго столкновения брусков.

CN93-T6. Рассмотрим двойной маятник, имеющий одинаковые длины нитей L и массы грузов m. Известно, что каждый из грузов совершает круговое движение в горизонтальной плоскости, углы между нитями и вертикалью малы, и нити всё время находятся в одной плоскости. Найдите возможные значения угловой частоты ω данной системы и соответствующие отношения $\frac{r_1}{r_2}$ радиусов орбит грузов.

CN93-T7. Как известно, воздух представляет собой смесь газов – на 76.9% он состоит из азота, а на 23.1% – из кислорода (наличием других компонент пренебрежём). Рассмотрим цилиндр, наполненный воздухом и стальной ватой, состоящей из очень тонкой проволоки. В цилиндре есть поршень, который может двигаться без трения, поэтому давление в цилиндре постоянно и равно $p = 1$ атм. В цилиндре постоянно происходит очень медленная химическая реакция окисления железа в вате. В результате этой реакции к моменту истощения кислорода образуется $\nu = 1$ моль Fe_2O_3. Температура в цилиндре постоянна и равна $T = 300$ K, а выделившееся в результате реакции тепло равно $8.24 \cdot 10^5$ Дж.

1. Найдите изменение энергии системы ΔE.

2. Найдите изменение внутренней энергии газа в цилиндре $\Delta E'$.

3. Найдите изменение плотности азота $\Delta\rho$.

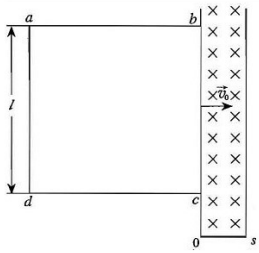
Газ в цилиндре можно считать идеальным. Молярная внутренняя энергия кислорода и азота равна $\frac{5}{2}RT$, где R – универсальная газовая постоянная, а T – температура. Объёмом, которые занимают твёрдые тела – стальная вата и продукт реакции, по сравнению с объёмом газа в цилиндре можно пренебречь.

CN93-T8. На рисунке показана квадратная рамка *abcd* со стороной $l = 0.8$ м, массой $m = 100$ г, индуктивностью $L = 10^{-3}$ В/(с $\cdot$ А) и пренебрежимо малым сопротивлением, расположенная на гладкой горизонтальной поверхности.

В момент времени $t = 0$ сторона bc попадает в ограниченную область магнитного поля с индукцией B. Скорость рамки при $x = 0$ равна $v_0 = 4.0$ м/с. Ширина области магнитного поля равна $s = 0.2$ м, величина его индукции $B = 0.5$ Тл. При решении задачи сопротивление воздуха не учитывайте.

1. Найдите положение x_1 стороны рамки bc в момент времени $t = \frac{\pi}{36}$ с.

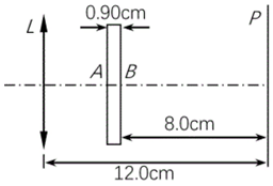
2. Найдите положение x_2 стороны рамки bc в момент времени $t = \frac{\pi}{36}$ с, если её начальная скорость равна $\frac{4}{\sqrt{3}}v_0$.



К задаче CN93-T8

1994

CN94-T1. Свет от объекта, находящегося на расстоянии $d_0 = 2.28$ м от линзы L фотокамеры, чётко фокусируется на фотоплёнке P на расстоянии $L = 12.0$ см позади линзы. Между линзой и фотоплёнкой перпендикулярно оптической оси помещают плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $AB = 0.90$ см с коэффициентом преломления $n = 1.50$ на расстоянии 8.0 см от фотоплёнки, как показано на рисунке. Линзу считайте тонкой собирающей, используйте параксиальное приближение.

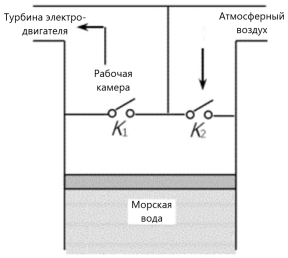


К задаче CN94-T1

1. Найдите, на каком расстоянии L_1 от линзы будет находиться изображение объекта после внесения пластинки.

2. На какое расстояние d_1 от линзы надо поместить объект, чтобы изображение снова возникало точно на фотоплёнке?

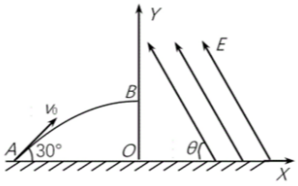
CN94-T2. В 1964 был создан маяк, который получает электроэнергию исключительно за счёт волн. Строение его воздушной камеры в упрощённом виде показано на рисунке. За счёт движения воды вверх и вниз воздух засасывается внутрь, сжимается и затем проталкивается далее для того, чтобы вращать турбину электродвигателя. Когда уровень воды опускается, открывается клапан K_2 и закрывается K_1, после чего давление воздуха в камере равно $1.0 \cdot 10^5$ Па, его температура 7 °C, объём камеры 0.233 м^2. Когда уровень воды поднимается, клапан K_2 закрывается, изолируя воздух в камере, после чего тот адиабатически сжимается. Как только его давление достигает значения $\sqrt{32} \cdot 10^5$ Па, открывается клапан K_1, и поршень продолжает подниматься, пока весь воздух



К задаче CN94-T2

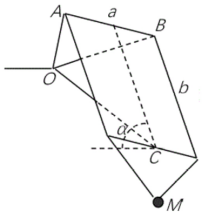
не перейдёт в рабочую камеру, его давление при этом остаётся почти неизменным. Какую работу A_0 совершает воздух в таком цикле? Массой поршня и его трением о стенку камеры можно пренебречь. Воздух считайте идеальным газом, для простоты принимаемым одноатомным.

CN94-T3. Как показано на рисунке, небольшой мяч массой 0.10 кг и зарядом $8 \cdot 10^{-4}$ Кл бросают из точки на поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом 30° к горизонту в направлении оси x. Как только мячик достигает высшей точки траектории B, которая лежит на оси y, в пространстве возникает однородное электрическое поле величиной $E = 2.50 \cdot 10^3$ В/м, параллельное плоскости xz и направленное под углом θ к отрицательному направлению оси x. Сразу после того, как мячик вновь пересекает ось y, электрическое поле исчезает. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2. Каким будет движение мячика в зависимости от угла θ? Схематично изобразите различные случаи его движения.



К задаче CN94-T3

CN94-T4. На рисунке показан прямоугольный воздушный змей шириной $a = 40$ см, длиной $b = 50$ см и массой $M = 200$ г (включая массу «хвоста» $M' = 20$ г – маленького бумажного шарика, подвешенного к змею на тонких нитях). AO, BO и CO – нити, за которые змей удерживают, причём $AO = BO$, а C – середина нижней стороны прямоугольника. Длина нитей AO и OB не меняется, а их массами можно пренебречь. При запуске змея скорость ветра равна нулю, а нить, за которую его тянут, горизонтальна. Человек, запускающий змей, бежит со скоростью v, а сопротивление воздуха, действующее на единицу поверхности змея, перпендикулярно ей и равно $P = KV \sin\alpha$, где $K = 8$ Н $\cdot$ м/с^3, а α – угол между плоскостью змея и горизонталью. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

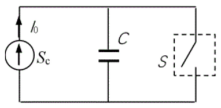


К задаче CN94-T4

1. С какой минимальной скоростью v_{min} должен бежать человек, чтобы змей мог лететь горизонтально? Каким при этом будет угол α_{min} между плоскостью змея и горизонталью?

2. Если человек бежит со скоростью $v_1 = 3$ м/с, длина нити CO равна b, и змей летит горизонтально, то чему при этом должна быть равна длина нити AO?

CN94-T5. На рисунке показан контур для возбуждения релаксационных колебаний. В нём S_C – источник постоянного тока с силой тока I_0 (ток не меняется при из-



К задаче CN94-T5

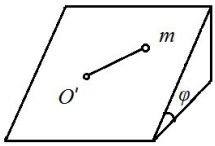
менении нагрузки), а S – ключ, открытие и закрытие которого контролируются напряжением $U_F(t) = U_1 + U_0 \sin \omega t$, создаваемым генератором синусоидальных сигналов F, где U_1 – постоянная составляющая напряжения, а U_0 и ω – амплитуда и угловая частота синусоидальной составляющей, причём $U_0 < U_1$. Напряжение U_F не меняет заряда на конденсаторе C, а только контролирует состояние ключа. Когда напряжение $U(t)$ между концами S (т.е. напряжение на конденсаторе) достигает $U_F(t)$, ключ мгновенно замыкается, приводя к разрядке конденсатора. $U(t)$ меняется очень быстро, и ключ не размыкается, пока оно не упадёт до U_{min}, где U_{min} – некоторое постоянное значение, меньшее, чем $U_1 - U_0$.

1. Найдите, как меняется со временем напряжение U на конденсаторе и изобразите в координатах $U - t$ графики $U(t)$, $U_F(t)$ и U_{min}. Процессами, происходящими при $t = 0$, можете пренебречь.

Известно, что при некоторых значениях I_0, U_1, U_0, ω и U_{min} все интервалы между соседними моментами, когда $U(t)$ достигает $U_F(t)$, равны.

2. Найдите, как выражается $U(t)$ через параметры системы, в моменты, когда $U(t) = U_F(t)$.

CN94-T6. Как показано на рисунке, на достаточно большой наклонной плоскости с углом наклона φ находится точечное тело с массой m, привязанное с помощью эластичной верёвки, закреплённой в точке O'. Длина нерастянутой верёвки равна L, можно считать, что при любых обстоятельствах для верёвки выполняется закон Гука, и её коэффициент жёсткости k. Коэффициент трения покоя между телом и наклонной плоскостью равен μ. Найдите, в какой области на наклонной плоскости тело может оставаться в покое. Схематично изобразите границу этой области при различных значениях μ.



К задаче CN94-T6

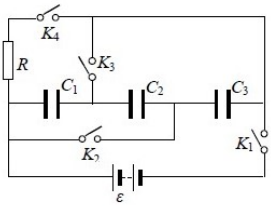
1995

CN95-T1. На тонкую собирающую линзу с диаметром $D = 10$ см и фокусным расстоянием $f = 15$ см параллельно оптической оси и симметрично относительно центра падают четыре лазерных луча с суммарной мощностью $W = 1.2$ Вт. Найдите силу F, с которой лазеры действуют на линзу. При решении задачи пренебрегайте поглощением в линзе. Импульс фотона $p = \frac{E}{c}$, где E – энергия фотона, а c – скорость света.

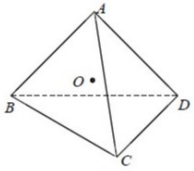
CN95-T2. В показанной на рисунке схеме $C_1 = 4C_0$, $C_2 = 2C_0$, $C_3 = C_0$, источник имеет ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малое внутреннее сопротивление, а все ключи изначально разомкнуты. Сначала замыкают ключи K_1, K_2 и K_3. Когда все конденсаторы зарядятся, ключи снова размыкают и затем замыкают K_4. Конденсаторы разряжаются.

1. Какое тепло Q выделится за всё время на резисторе R?

2. Чему будет равен ток I через резистор R, когда конденсаторы разрядятся наполовину?



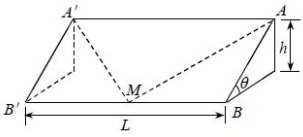
К задаче CN95-T2



К задаче CN95-T3

CN95-T3. На рисунке показан правильный тетраэдр $ABCD$. Его рёбра сделаны из проводника, однако изолированы друг от друга. Рёбра заряжают до потенциалов φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4. Найдите, чему при этом будет равен потенциал φ_0 в центре тетраэдра.

CN95-T4. Один из участков гоночной велотрассы проходит по наклонной плоскости, длина которой равна L, высота h, а угол наклона θ, как показано на рисунке. Велосипедист должен попасть из точки A в точку A' и может сделать это двумя путями – проехать либо напрямую по линии AA', либо по симметричной ломаной AMA'. Начальная скорость велосипедиста равна v_0 ($v_0 \gg \sqrt{gh}$), а сила, которую он прикладывает в процессе движения, уравновешивает силу трения. Трение между колёсами и землёй считайте достаточным для предотвращения проскальзывания. При каких значениях длины участка L велосипедисту будет выгоднее проехать по ломаной?



К задаче CN95-T4

CN95-T5. На рисунке показана кварцевая пробирка постоянной толщины с запаянными концами. Внутри неё имеется вертикальный столбик ртути, разделяющий пространство в трубке на две части, причём снизу от него находится воздух, а сверху – двухатомный газ, молекулы которого диссоциируют на отдельные атомы, когда его температура T превышает T_0. Если концентрацию молекул газа при T_0 обозначить за n_0, а концентрацию молекул, подвергшихся диссоциации при повышении температуры до $T + \Delta T$, за Δn, то при малых ΔT для степени диссоциации будет выполняться закон

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta T}{T}.$$



К задаче CN95-T5

Изначально температура газа в пробирке равна T_0, высота верхнего столба газа

равна l_0, нижнего – $2l_0$, а давление, создаваемое столбиком ртути, составляет величину a от давления воздуха снизу ($0 < a < 1$). В некоторый момент времени температуру T_0 начинают медленно поднимать. Вверх или вниз будет двигаться при этом столбик ртути в зависимости от параметров задачи? Тепловым расширением пробирки и ртути можно пренебречь.

Совет: удобно решать задачу, рассматривая смещение столбика ртути x, считая $x > 0$ при повышении столбика и $x < 0$ при понижении.

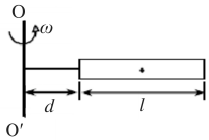
CN95-T6. Рассмотрим небольшой объект, состоящий из двух точечных тел A и B с массами $m = 0.1$ кг, соединённых идеальной невесомой пружинкой с длиной l_0 и коэффициентом жёсткости k_0. Объект падает из состояния покоя с высоты $H = 2$ м на горизонтальную поверхность. Пружина при падении остаётся ненатянутой, а столкновение A с поверхностью происходит абсолютно упруго. После этого объект подпрыгивает над поверхностью, и оказывается, что, когда A соприкасается с ней во второй раз, натяжение пружинки достигает максимума. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

1. Найдите коэффициент жёсткости пружинки k_0.

2. Найдите скорость v точки A в момент второго соприкосновения с поверхностью.

1996

CN96-T1. На рисунке показан цилиндр длиной $l = 20$ см, находящийся на космическом корабле и вращающийся вокруг оси OO', перпендикулярной оси цилиндра, с частотой $\frac{\omega}{2\pi} = 100$ об./мин. Расстояние между осью OO' и ближайшим к ней концом цилиндра равно $d = 10$ см. Цилиндр заполнен жидкостью с плотностью $\rho = 1.2$ г/см^3 и очень большой вязкостью. В центре цилиндра находится частица с массой $m' = 1.0$ мг и плотностью $\rho' = 1.5$ г/см^3, которую отпускают в некоторый момент времени.



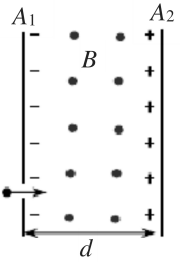
К задаче CN96-T1

1. Какую работу W совершит сила вязкого трения к тому моменту, как частица достигнет конца цилиндра?

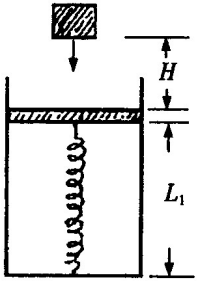
2. Какую работу W' совершит сила вязкого трения к тому моменту, как частица достигнет конца цилиндра, если плотность частицы равна $\rho'' = 1.0$ г/см^3?

CN96-T2. На рисунке показаны две заряженные металлические пластины A_1 и A_2, расположенные параллельно друг другу. Они имеют достаточно большую площадь, расстояние между ними d, разность потенциалов между ними U. Одновременно с этим между пластинами существует однородное магнитное поле, перпендикулярное картинной плоскости. Через небольшое отверстие в отрицательно заряженной пластине A_1 проходит пучок электронов со скоростями, направленными перпендикулярно её поверхности. При решении задачи пренебрегите начальной скоростью частиц и действием силы тяжести. Какой должна

быть минимальная индукция магнитного поля B_0, чтобы частицы в пучке не достигли правой пластины A_2?



К задаче CN96-T2



К задаче CN96-T4

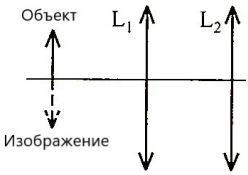
CN96-T3. Известно, что энергия основного состояния гелия равна $E = 54.4$ эВ, заряд электрона $e = 1.610 \cdot 10^{-19}$ Кл, а массы протона и нейтрона $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг.

1. Чему равна энергия $E_{1\to 2}$ перехода гелия из основного в первое возбуждённое состояние?

2. Найдите, какую относительную поправку $\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}$ вносит в длину волны испускаемых фотонов учёт отдачи атома при излучении.

CN96-T4. В вертикальном цилиндре находится некоторое количество идеального газа. Молярная внутренняя энергия газа равна $E = \frac{3RT}{2}$, где R – универсальная газовая постоянная, а T – температура газа. Поршень массой $M = 7.00$ кг соединён с лёгкой пружиной с коэффициентом жёсткости $k = 300$ Н/м, а нижний конец пружины соединён с дном поршня, как показано на рисунке. Трением между поршнем и стенками цилиндра, а также объёмом пружины можно пренебречь. В равновесии температура газа равна $T_1 = 300$ К, его давление $p_1 = 1.40 \cdot 10^5$ Па, длина пружины $L_1 = 50.0$ см. Площадь сечения поршня равна $S = 25.0$ см^2. Груз массы $m = 3.00$ кг падает из состояния покоя с высоты $H = 80.0$ см непосредственно над поршнем. Столкновение груза и поршня полностью неупругое, а время столкновения пренебрежимо мало. Известно, что в некоторый момент движения груз отрывается от поршня, и температура газа в этот момент равна $T_2 = 290$ К. В дальнейшем груз поднимается на максимальную высоту, на $h = 7.80$ см превышающую изначальную высоту поршня. Найдите тепло Q, которое было передано газу от момента падения груза до его отрыва от поршня. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2. Также считайте, что поршень изолирован, стенки цилиндра хорошо проводят тепло, а пружина является идеальной.

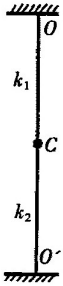
CN96-T5. Рассмотрим две выпуклые линзы с фокусными расстояниями f_a и f_b соответственно. Если разместить их соответствующим образом, то небольшой объект, перпендикулярный оптической оси, может создать перевёрнутое изображение в той же точке, как показано на рисунке. Найдите расстояние между линзами d и расстояние от левой линзы до объекта u в такой схеме.



К задаче CN96-T5

CN96-T6. Рассмотрим n точек в пространстве, пронумерованных от 1 до n. Каждая пара точек соединена проводом с сопротивлением R. К точкам 1 и n присоединяют источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Найдите силу тока I, текущего через провод, соединяющий точки 1 и n.

CN96-T7. Небольшой мячик закреплён с помощью двух лёгких эластичных резинок, концы которых лежат в точках O и O' соответственно, и в состоянии покоя вся система находится на одной вертикальной линии, как показано на рисунке. Коэффициенты жёсткости резинок равны соответственно $k_1 = 8.0$ Н/м и $k_2 = 12.0$ Н/м. Когда система покоится, шарик находится в точке C, и удлинения верхней и нижней резинок в это время равны соответственно $l_1 = 0.080$ м и $l_2 = 0.030$ м. Мячик оттягивают вниз от точки C на расстояние $l_3 = 0.080$ м и отпускают без толчка. Найдите время t, которое потребуется мячику для того, чтобы первый раз вернуться в точку, из которой его отпустили. При расчётах используйте $g = 10.0$ м/с^2.



К задаче CN96-T7

1997

CN97-T1. Состоящий из полония Po радиоактивный источник испускает α-частицы, которые в дальнейшем сталкиваются с ядрами бериллия $^9_4$Be, и в результате реакции образуются частица и ещё один продукт. Известно, что поток частиц удовлетворяет следующим свойствам:

1) Он не отклоняется магнитным полем.

2) Если частица столкнётся с неподвижным ядром водорода, то энергия, которую ядро приобретёт в результате столкновения, равна $E_H = 4.7$ МэВ.

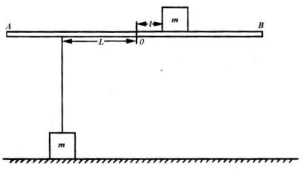
3) Если частица столкнётся с неподвижным ядром азота, то энергия, которую ядро приобретёт в результате столкновения, равна $E_N = 1.2$ МэВ.

Столкновения считайте центральными и абсолютно упругими, отношение масс ядер атомов водорода и азота равно $m_H : m_N = 1 : 14$.

1. Найдите отношение массы этой частицы к массе ядра атома водорода $\frac{m}{m_H}$.

2. Что это за частица? Запишите уравнение реакции α-частиц с ядрами бериллия $^9_4$Be.

CN97-T2. На рисунке показана однородная тонкая прямоугольная доска AB, которая может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр O. Левее O на расстоянии L за лёгкую нить к ней подвешен кубический брусок массой m. Такой же брусок кладут на доску справа от O, причём длина его стороны и расстояние от O до его левого края равны l. Изначально доска горизонтальна и находится в равновесии, при этом подвешенный брусок соприкасается с землёй, а нить натянута. К центру правой стороны лежащего на доске куба прикладывают направленную горизонтально вправо силу F. Силу постепенно увеличивают, пока система не выходит из равновесия при некотором критическом её значении. Коэффициент трения между бруском и доской известен и равен μ.

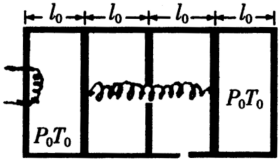


К задаче CN97-T2

1. Опишите возможные сценарии поведения системы при нарушении равновесия.

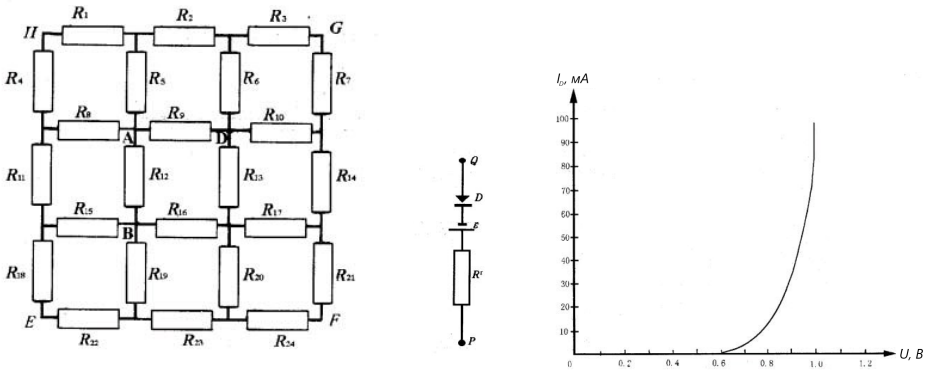
2. Изобразите области, соответствующие каждому из качественно различных сценариев, на графике, где вдоль оси абсцисс была бы отложена координата $x = \frac{2L}{3l}$, а по оси ординат – коэффициент трения μ.

CN97-T3. На рисунке показан цилиндр с двумя поршнями, соединёнными идеальной пружиной, и неподвижной перегородкой посередине. Цилиндр и поршни теплоизолированы, а в стенке есть небольшое отверстие, открывающееся в атмосферу. Коэффициент жёсткости пружины $k = 1.5 \cdot 10^4$ Н/м. Отделяемые поршнями части цилиндра содержат одинаковое количество одного и того же идеального газа, и в левой части имеется электронагреватель. Изначально система находится в равновесии, давление в изолированных частях равно атмосферному $p_0 = 1.00 \cdot 10^5$ Па, температура $T = 300$ К, $l_0 = 1.00 \cdot 10^{-1}$ м. В некоторый момент времени электронагреватель включили, и он передал газу теплоту $Q = 1000$ Дж, причём оказалось, что наибольшее изменение длины пружины при этом составило $l_m = 7.4 \cdot 10^{-2}$ м. Передача теплоты происходила достаточно медленно, чтобы считать происходящие с газом процессы квазистатическими, а трением между стенками цилиндра и поршнями можно пренебречь. Найдите температуру T_i и давление p_i газа в левой и правой изолированных частях цилиндра ($i = 1{,}2$ соответственно) в конце работы электронагревателя. Ответы должны содержать 3 значащих цифры.



К задаче CN97-T3

CN97-T4. На рисунке (a) показана решётка, состоящая из 24 резисторов с одинаковым сопротивлением. На рисунке (b) участок PQ – последовательно соединённые источник питания с ЭДС $\mathcal{E} = 3.00$ В и внутренним сопротивлением $r = 2.00$ Ом, резистор $R' = 28$ Ом и диод, ВАХ которого показана на рисунке (c).



(a) (b) (c)

К задаче CN97-T4

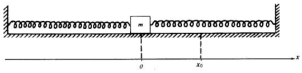
Концы P и Q подключают к точкам E и G решётки резисторов, при этом напряжение на диоде оказывается равным $U_D = 0.86$ В.

1. Найдите напряжение U_{EA} между точками E и A решётки.

Теперь концы P и Q подключают к точкам B и D решётки.

2. Найдите ток I_D через диод и напряжение U_{EG} между точками E и G решётки.

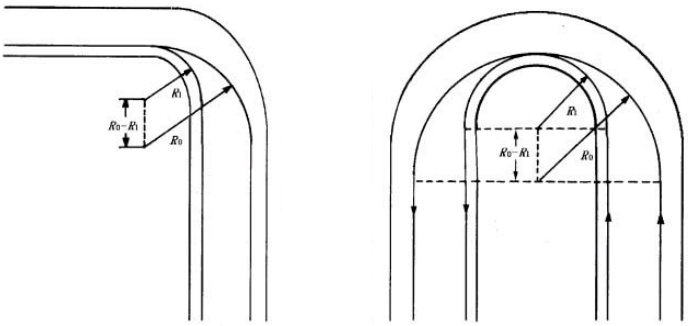
CN97-T5. На рисунке показана колебательная система, состоящая из двух одинаковых идеальных пружин жёсткостью k и небольшого бруска массой m, причём обе пружины не растянуты, когда брусок находится в точке O. Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ. В начальный момент времени брусок отводят вправо от точки O на расстояние x_0 ($x_0 > 0$) и отпускают.



К задаче CN97-T5

1. Какое число полуколебаний N совершает брусок до момента полной остановки?
2. Какое время $t_.$ проходит до полной остановки бруска?
3. В какой точке x_N остановится брусок?
4. Какую работу W совершит при этом сила трения?

CN97-T6. Гонщик едет по горизонтальной трассе и приближается к повороту с внешним радиусом R_0 и внутренним R_1. Его скорость вдали от поворота $v_d > \sqrt{\mu g R_0}$, где μ – коэффициент трения покоя между поверхностью трассы и колёсами автомобиля, не зависящий от скорости последнего. При решении задачи автомобиль считайте материальной точкой, а сопротивлением воздуха можно пренебречь.



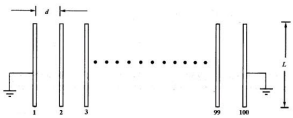
(a) (b)

К задаче CN97-T6

1. Какую из двух полос, показанных на рисунке (a), – внутреннюю или внешнюю – должен выбрать гонщик, чтобы преодолеть поворот за минимально возможное время, если трасса поворачивает на 90°.

2. Какую из двух полос, показанных на рисунке (b), – внутреннюю или внешнюю – должен выбрать гонщик, чтобы преодолеть поворот за минимально возможное время, если трасса поворачивает на 180°.

CN97-T7. На рисунке показана система из 100 одинаковых квадратных проводящих пластин, размещённых параллельно друг другу. Сторона пластин L, расстояние между соседними пластинами d (причём $d \ll L$, потому краевыми эффектами можно пренебречь). Пластины пронумерованы слева направо от 1 до 100. Изначально пластины заряжены, причём заряд на n-ной пластине задаётся выражением $q_n = nq_1$, где $q_1 > 0$ – заряд на первой пластине. В некоторый момент времени первую и сотую пластины заземляют.



К задаче CN97-T7

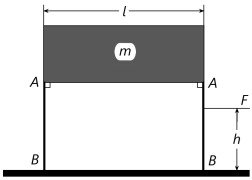
1. Найдите заряды Δq_1 и Δq_{100}, которые при этом перетекут с первой и сотой пластин в землю соответственно.

2. Найдите номер n_{max}, который имеет пластина с наибольшим потенциалом, и найдите его значение U_{max}.

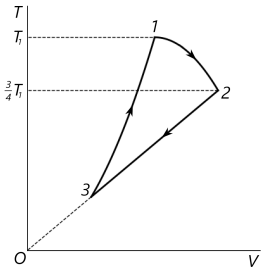
1998

CN98-T1. Для транспортировки однородной балки массой m и длиной l по ровному горизонтальному снегу используют пару салазок, как показано на рисунке. Балка также находится в горизонтальном положении. Верхние концы

салазок A прикреплены к концам балки, а нижние B находятся в контакте со снегом. На передние салазки действует горизонтальная сила F, приложенная на высоте h от поверхности снега. Коэффициенты трения скольжения между передними и задними салазками и снегом равны μ_1 и μ_2 соответственно. Площадь контакта салазок и снега малой, массой салазок можно пренебречь. Найдите, чему должна быть равна сила F, чтобы салазки двигались по снегу с постоянной скоростью, и какому условию должна соответствовать высота h, чтобы задние салазки не отрывались от снега.



К задаче CN98-T1



К задаче CN98-T2

CN98-T2. 1 моль идеального газа совершает показанный на приведённой на рисунке диаграмме $T - V$ циклический процесс $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Уравнение процесса $1 \to 2$ имеет вид

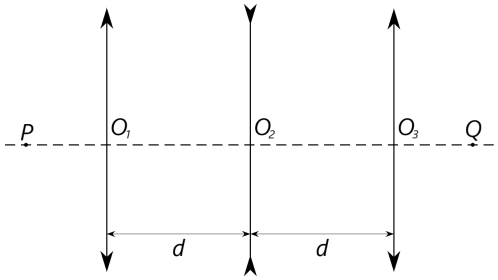
$$T = 2T_1 \left(1 - \frac{\beta V}{2}\right) \beta V.$$

Процесс $2 \to 3$ представляет собой участок прямой, проходящей через начало координат, а уравнение процесса $3 \to 1$ имеет вид

$$T = T_1 \beta^2 V^2,$$

где β – некоторая постоянная. Температуры газа в состояниях 1 и 2 известны и равны T_1 и $\frac{3T_1}{4}$ соответственно. Найдите работу W, совершаемую газом в этом цикле.

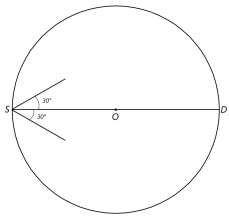
CN98-T3. Оптическая система, показанная на рисунке, состоит из трёх тонких линз L_1, L_2 и L_3 с одинаковым значением фокусного расстояния f, расположенных соосно. Две крайние линзы являются собирающими, а средняя – рассеивающая. Расстояние между соседними линзами равно d, их оптические центры обозначены точками O_1, O_2 и O_3 соответственно. Слева от L_1 на оптической оси расположен объект P, и система линз формирует его изображение Q справа от L_3. Если известно, что $PO_2 = O_2Q$, найдите расстояние PO_1 между объектом и линзой L_1.



К задаче CN98-T3

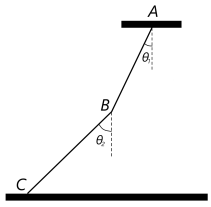
CN98-T4. К лодке, движущейся по озеру с постоянной скоростью, прикреплена вертикальная гладкая стенка, о которую в некоторый момент времени абсолютно упруго ударяется горизонтально движущийся мяч. Его скорость относительно берега равна v_1 и направлена под углом $\alpha = 60°$ к нормали к стенке. Известно, что скорость мяча после отскока от стенки перпендикулярна первоначальной. Какие условия это накладывает на скорость корабля?

CN98-T5. На рисунке показано жёсткое неподвижное кольцо радиуса R, внутри которого существует однородное магнитное поле, перпендикулярное его плоскости и направленное от наблюдателя. SD – диаметр кольца. Пучок положительно заряженных частиц с одинаковой массой и зарядом и различными скоростями попадает в область магнитного поля в кольце в точке S, причём угол между направлениями скоростей частиц и прямой SD не превышает $i_{max} = \frac{\pi}{6}$. В точке D в кольце есть небольшое отверстие. Известно, что все столкновения частиц с кольцом абсолютно упругие и не меняют их свойства, а период движения частиц в магнитном поле равен T. Столкновениями частиц между собой, их взаимодействием, а также гравитацией пренебрегите. Найдите, с какой скоростью v и под каким углом к прямой SD должна двигаться частица, чтобы её полное время движения внутри кольца было равно T, а количество её столкновений с кольцом не превышало $n = 5$, после чего она вылетала бы из кольца через точку D.



К задаче CN98-T5

CN98-T6. Два одинаковых однородных стержня тонких стержня AB и BC массой m соединены друг с другом в точке B. Верхняя точка стержня AB закреплена на потолке, а нижняя точка стержня BC касается земли. Система стержней может свободно вращаться в вертикальной плоскости, однако между BC и землёй есть трение. Расстояние от точки A до земли превышает длину



К задаче CN98-T6

стержня в $\sqrt{2}$ раз. Углы между AB и BC и вертикалью обозначим θ_1 и θ_2 соответственно.

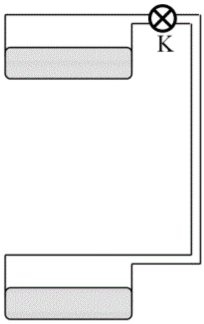
1. Найдите, в каком диапазоне углов θ_1 система ни при каком значении коэффициента трения между BC и землёй не может находиться в равновесии.

2. Найдите величину и направление силы трения f в зависимости от углов θ_1 и θ_2 в равновесии системы.

1999

CN99-T1. На устройстве, показанном на рисунке, верхний и нижний сосуды и соединяющая их тонкая трубка сделаны и материала с низкой теплоёмкостью и высокой теплопроводностью. K – вентиль, а длина трубки равна l. Система полностью герметична. Изначально вентиль закрыт, и в каждом сосуде содержится жидкость массой M и удельной теплоёмкостью C. Система находится в равновесии, и её температура равна T_0. Под действием гравитации молекулы газа в системе распределены неоднородно, и их давление подчиняется закону

$$P_h = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$



К задаче CN99-T1

где h – высота точки над поверхностью жидкости в нижнем сосуде, P_h – давление газа в этой точке, P_0 – давление над поверхностью жидкости в нижнем сосуде, m – масса молекул газа, T – температура, а k – постоянная Больцмана. Вентиль K открывают. Опишите, что будет происходить с системой в дальнейшем, и каков будет конечный результат.

CN99-T2. Существует множество свидетельств того, что периодические процессы в природе могут влиять на жизнь живых существ. Наутилус – это моллюск, живший на Земле ещё 400 миллионов лет назад. Известно, что количество линий ежедневного прироста и перегородок, связанных с лунным циклом, в его раковине увеличивается в течение жизни. В 1978 году американские учёные Джон Кан и Стивен Помпея обнаружили следующее. У 9 современных особей наутилуса и 36 окаменелостей количество линий между соседними месячными перегородками было равно 30, однако их количество снижалось для окаменелостей с увеличением их возраста. Так, в эпоху палеоцена кайнозойской эры (29 миллионов лет назад) линий было 26; в меловой период мезозойской эры (100 миллионов лет назад) – 22; в юрский период мезозойской эры (180 миллионов лет назад) – 18; в каменноугольный период палеозойской эры (320 миллионов лет назад) – 15; в ордовикский период палеозойской эры (470 миллионов лет назад) – всего 9. Учёные сделали вывод, что уменьшение количества линий ежедневного прироста связано с историческими изменениями Земли и окружающих её космических тел, в частности, периода обращения Луны. Основываясь

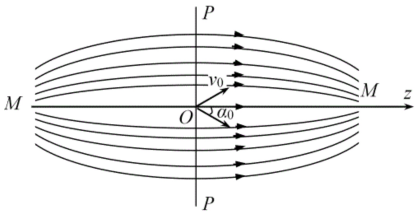
на приведённых данных, проанализируйте, как изменяется орбита Луны и оцените скорость этих изменений количественно.

Примечание: массы Луны и Земли, период вращения Земли и физические константы считайте неизменными.

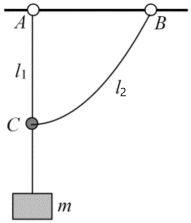
CN99-T3. Магнитное поле Земли является сильным рядом с полюсами и слабым между ними. В 1958 году Ван Аллен изучал движение заряженных частиц в магнитном поле на орбите Земли, используя данные искусственных спутников, и пришёл к выводу о существовании так называемого радиационного пояса (названного позднее в его честь) на расстояниях порядка тысяч и десятков тысяч километров над поверхностью Земли. Для дальнейшего изучения уменьшенная модель магнитного поля Земли MM, показанная на рисунке, была экспериментально воссоздана в лаборатории. Магнитная индукция в ней меняется от сильной к слабой и обратно к сильной вдоль оси z, а плоскость PP' является плоскостью симметрии системы. В точке O на оси z индукция магнитного поля равна B_0, а в обеих точках M – B_M.

В некоторый момент времени пучок частиц с массой m, зарядом q и скоростью v_0 вылетает в правое полупространство из точки O под углом α_0 к оси z. Если магнитное поле будет достаточно сильным, частицы будут двигаться лишь в «трубке» с небольшим поперечным сечением, ограниченной близкими к оси z линиями магнитной индукции. Проанализируйте, как будут двигаться частицы в магнитном поле области MM в зависимости от угла вылета α_0.

Примечание: можно показать, что отношение квадрата компоненты скорости частиц $v_\perp$, перпендикулярной направлению магнитной индукции, к индукции поля B остаётся постоянным.



К задаче CN99-T3



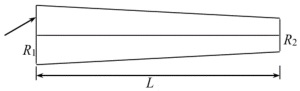
К задаче CN99-T4

CN99-T4. На рисунке показаны две нежёсткие нерастяжимые лёгкие нити длинами l_1 и l_2. Их нижние концы соединены в точке C, к которой подвешен груз массы m, а их верхние концы привязаны к маленьким лёгким кольцам A и B соответственно. Кольца надеты на круглый горизонтальный стержень, и коэффициенты трения между ними и стрежнем равны соответственно μ_1 и μ_2. Длины l_1 и l_2 известны, и $l_1 < l_2$. Система находится в равновесии. Найдите возможные значения расстояния AB между двумя кольцами при различных значениях коэффициентов трения μ_1 и μ_2.

CN99-T5. В этой задаче рассмотрим три частицы одинаковой массы. Между частицами 1 и 2 помещена полностью сжатая короткая и лёгкая пружинка. Эти частицы связаны друг с другом тонкими невесомыми нитями в единое целое и находятся в покое на гладкой горизонтальной поверхности. Двигаясь по этой же поверхности, с ними сталкивается частица 3. Частицы 1 и 3 мгновенно слипаются воедино, и сразу после этого нити, связывавшие 1 и 2, рвутся, освобождая пружинку. Далее частица 2 движется отдельно от 1 и 3. Упругая энергия, запасённая в пружинке, равна E_P. Найдите, какими должны быть исходные значения кинетической энергии E_{k3} частицы 3, если известно, угол рассеяния частицы 2 никак не мог превысить значение $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Примечание: углом рассеяния частицы 2 является угол между её скоростью после отделения и изначальной скоростью частицы 3.

CN99-T6. В процессе производства оптоволокна его вытягивание может происходить неравномерно. Из-за этого его форма иногда может быть конической, а не цилиндрической. Рассмотрим участок оптоволокна длиной L с коэффициентом преломления n ($n = 1.50$), являющийся частью конуса с очень маленьким углом раствора. Радиусы оптоволокна на его концах равны R_1 и R_2, причём R_1 несколько превышает R_2. Вид оптоволокна в разрезе, проходящем через ось его симметрии, показан на рисунке.



К задаче CN99-T6

1. Если оптоволокно находится в воздухе, найдите максимальный угол падения θ_1 света, попадающего на широкий торец, при котором он впоследствии выйдет из узкого.

2. Найдите число отражений N, которое претерпевает в оптоволокне луч, попавший на его широкий торец под углом, найденным в п. 1.

CN99-T7. Принцип эквивалентности Эйнштейна гласит, что в небольших областях пространства-времени законы физики в инерциальной системе отсчёта в присутствии гравитации выполняются так же, как в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с соответствующим ускорением.

Рассмотрим лазер, находящийся на поверхности земли и испускающий луч частотой ν_0. Луч принимается на высоте L над землёй. Ускорение свободного падения постоянно и равно g.

1. Считая, что лазерный луч представляет собой пучок частиц – фотонов с энергиями $h\nu$, найдите, какую частоту ν он будет иметь для приёмника.

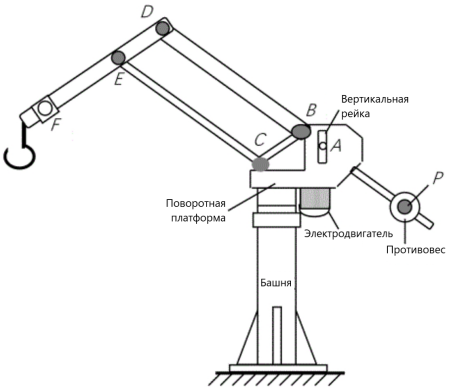
Теперь не будем рассматривать влияние гравитации. Предположим, что такой же эксперимент проводится в ящике, движущемся вдоль прямой с постоянным ускорением a. Источник и приёмник лазерного излучения теперь находятся в задней и передней части ящика соответственно. Изначально лазер имеет период T_0, а длина ящика равна L.

2. Найдите, каким будет период лазера T_1 в лабораторной системе отсчёта, когда тот достигнет приёмника.

3. Найдите величину и направление ускорения ящика a, при котором результаты экспериментов, рассматриваемых в п. 1 и п. 2, совпадают.

2000

CN00-T1. В последнее время для частой работы с грузами в десятки и сотни килограммов стали широко использоваться так называемые балансирные краны – новый вид подъёмного оборудования. Схематичный вид такого крана показан на рисунке. Обычно кран состоит из трансмиссии, системы связанных между собой стержней, поворотной платформы и башни. Система стерней состоит из четырёх стержней ABD, DEF, BC и CE. $DECB$ при любом положении стрелы крана представляет собой параллелограмм. Буквой A на рисунке обозначен горизонтальный вращающийся вал. Вал контролируется электродвигателем и может занимать различные позиции, двигаясь вдоль вертикальной рейки, изменяя при этом высоту крюка F на конце стрелы. Стержень ABD может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси вала A. Буквой C на рисунке обозначен шарнир, который может свободно двигаться вдоль гладкого горизонтального паза. Трением в шарнире можно пренебречь. Стержень AD имеет длину l_1, стержень AB – длину l_2, DF и BC – l_3 и l_4 соответственно. Считайте каждый стержень невесомым и жёстким. Рассмотрите случай, когда у крана отсутствует противовес.



К задаче CN00-T1

1. Найдите, какому соотношению должны удовлетворять длины стержней l_1, l_2, l_3 и l_4, чтобы кран находился в равновесии при всевозможных положениях крюка с поднимаемым грузом в одной горизонтальной плоскости.

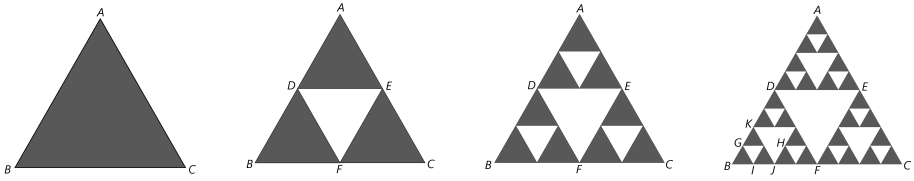
Теперь будем учитывать ненулевую массу стержней. Чтобы кран снова уравновешен при всевозможных положениях крюка с поднимаемым грузом в одной горизонтальной плоскости, в точку P на конце стержня ABD необходимо добавить противовес. Расстояние между точками A и P обозначим l_P. Вес противовеса равен G_P, а веса участков стержней AD, DF, BC и CE – G_1, G_3, G_4 и G_5 соответственно. Весом участка AP пренебрегите. Длины l_1, l_2, l_3, l_4 и l_P известны, причём $l_1 = l_3$ и $l_2 = l_4$.

2. Найдите соответствующий вес G_P противовеса.

CN00-T2. Солнечный ветер – это постоянный поток заряженных частиц, состоящий из одинакового количества протонов и электронов, излучаемых в наружном слое солнечной атмосферы – короне. Несмотря на то, что это приводит

к ежегодному уменьшению массы Солнца, им можно пренебречь по сравнению в его полной массой M_S. Наблюдения показывают, что скорость v солнечного ветра увеличивается с расстоянием r до центра Солнца. Для объяснения этого явления рассмотрим следующую модель. Будем рассматривать большое количество электронов, испускаемых короной, как идеальный газ. Корональный газ считайте изотермическим с температурой T, изотропным и движущимся радиально от центра со скоростью $v(r)$, зависящей только от расстояния r. Так как скорость направленного движения протонов много меньше, то их вкладом в эффект можно пренебречь по сравнению к вкладом электронов. Изменение скорости солнечного ветра в единицу времени обозначим $\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Найдите зависимость ускорения солнечного ветра от расстояния до центра Солнца $\tau(r)$.

CN00-T3. Польский математик Серпинский в 1916 году изучал свойства довольно примечательных геометрических фигур. Он разделил каждую сторону равностороннего треугольника ABC, показанного на рисунке (a), пополам и соединил получившиеся точки. Это разрезало ABC на четыре одинаковых равносторонних треугольника. Затем средний треугольник был изъят, в результате чего получилась фигура, показанная на рисунке (b). Те же действия были произведены с оставшимися тремя треугольниками, и результатом второй итерации стала фигура на рисунке (c), а результатом третьей – фигура на рисунке (d). Полученные фигуры обладают важным свойством самоподобия. Если итеративный процесс продолжать бесконечно, то можно получить так называемый треугольник Серпинского.



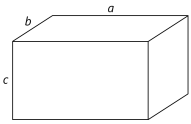
(a) (b) (c) (d)

К задаче CN00-T3

Дальнейшие работы многих математиков по изучению подобных фигур привели с созданию так называемой фрактальной геометрии. В последние 30 лет физики активно применяют её методы в своих исследованиях и получают осмысленные результаты. В этой задаче будем исследовать эквивалентное сопротивление электрической цепи, состоящей из рёбер треугольника Серпинского. Сопротивление каждой стороны треугольника ABC длиной L_0 равно r, сопротивление половины стороны, полученной в результате разделения, равно соответственно $\frac{r}{2}$, и т.д.

1. Найдите эквивалентное сопротивление R_3 между двумя вершинами треугольника ABC после трёх итераций.

2. Найдите эквивалентное сопротивление R_n между двумя вершинами треугольника ABC после n итераций.



К задаче CN00-T3

Как видим, в ходе итеративного процесса получения треугольника Серпинского сторона самых маленьких составляющих его треугольников уменьшается, и эквивалентное сопротивление треугольника может быть выражено через эту длину. Для описания свойств проводящих систем с этой точки зрения полезно будет ввести понятие их эффективной размерности s. Проиллюстрируем его следующим образом. Рассмотрим однородный проводящий прямоугольный параллелепипед с длиной, шириной и высотой a, b и c соответственно, как показано на рисунке, ток по которому протекает параллельно a. Его сопротивление будет равно

$$R = \rho\frac{a}{bc},$$

где ρ – удельное сопротивление материала. Если длины сторон b и c зафиксировать, а длину $a = L$ менять, то сопротивление такого проводника будет равно

$$R_{(1)}(L) = \rho\frac{L}{bc} \propto L^1,$$

и его эффективная размерность будет равна $s = 1$. Если же теперь зафиксировать длину стороны c и менять длины $a = b = L$, то сопротивление будет равно

$$R_{(0)}(L) = \rho\frac{1}{c} \propto L^0,$$

его эффективная размерность будет равна $s = 0$. Аналогично, если $a = b = c = L$, то получим

$$R_{(-1)}(L) = \rho\frac{1}{L} \propto L^{-1}$$

и эффективную размерность $s = -1$. Таким образом, в общем случае эффективной размерность проводника равна s, если его сопротивление можно представить в виде

$$R_{(s)}(L) = kL^s,$$

где k – коэффициент пропорциональности, а L – характерная длина.

В треугольнике Серпинского длина стороны изначального треугольника равна L_0, а характерной длиной L является длина стороны наименьшего треугольника.

3. Найдите эффективную размерность s треугольника Серпинского.

CN00-T4. Рассмотрим два неподвижных оптических элемента, расположенных соосно друг другу. Известно, что каждый из элементов может быть либо тонкой линзой, либо плоским зеркалом. Небольшой объект помещают перпендикулярно главной оптической оси. Оказывается, что когда объект находится

между оптическими элементами, то, вне зависимости от его положения, в системе возникает ограниченное число промежуточных изображений, а окончательно формируется два изображения одинакового размера. Проанализируйте различные возможные варианты такой оптической системы и укажите, может ли система в каждом из вариантов соответствовать данному описанию, и если может, то при каких условиях.

CN00-T5. Рассмотрим ω-мезон – частицу ненулевой массы изначально находящуюся в состоянии покоя. Он распадается на три π-мезона одинаковой массы:

$$\omega \to 3\pi.$$

В этой задаче будем исследовать, какие возможные значения могут иметь кинетические энергии T_1, T_2 и T_3 образовавшихся при распаде π-мезонов. Используем следующий общий метод. Построим равносторонний треугольник $\triangle A_1A_2A_3$, высота которого равна сумме кинетических энергий мезонов $Q = T_1 + T_2 + T_3$. Выберем в треугольнике точку P такую, что расстояние от неё до стороны, противолежащей вершине A_i, равно T_i $(i = 1,2,3)$. Таким образом, каждая точка будет соответствовать набору кинетических энергий (T_1,T_2,T_2). Все возможные наборы могут быть представлены областью внутри треугольника – так называемой физической областью.

1. Найдите физическую область распада $\omega \to 3\pi$ в нерелятивистском приближении.

Теперь рассмотрим атом позитрония Ps – находящуюся в невозбуждённом состоянии частицу, состоящую из электрона и позитрона. Покоящийся атом позитрония может распасться на три γ-кванта:

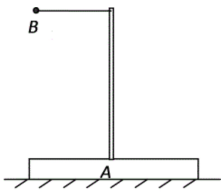
$$\mathrm{Ps} \to 3\gamma.$$

Нас интересуют возможные энергии этих γ-квантов. Вновь построим равносторонний треугольник $\triangle A_1A_2A_3$.

2. Найдите физическую область распада $\mathrm{Ps} \to 3\gamma$.

2001

CN01-T1. На рисунке показан деревянный брусок с вертикальным стержнем, имеющий общую массу M и размещённый на горизонтальной поверхности. B – небольшой шарик массой m, привязанный к вершине стержня тонкой нерастяжимой нитью. В начальный момент времени нить горизонтальна, и шарик отпускают. Считайте, что брусок не может вращаться. Известно, что до момента столкновения шарика со стержнем брусок не сдвигался с места. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента трения μ_{min}



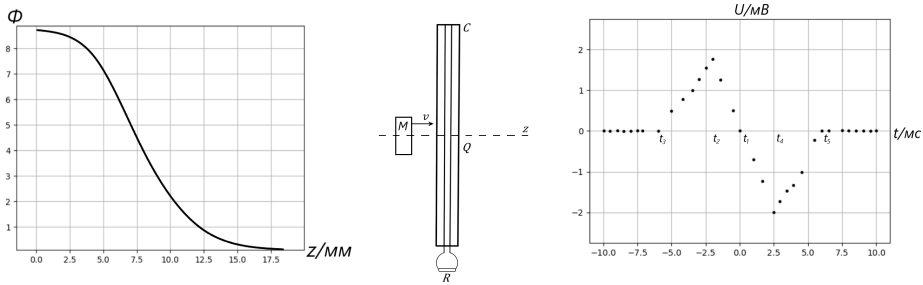
К задаче CN01-T1

между бруском и горизонтальной поверхностью, при котором реализуется описанное в задаче движение.

CN01-T2. Рассмотрим катушку C, ось симметрии z которой горизонтальна, и сильный неодимовый магнит M, расположенный соосно катушке. Его магнитный момент направлен вдоль оси z. Центр магнита обозначим O и примем его за начало оси z. Центр катушки C обозначим Q. Зависимость магнитного потока Φ через неё от координаты z точки Q на оси экспериментально измерена и показана на графике на рисунке (a). Теперь к концам катушки подсоединяют резистор сопротивлением $R = 1000$ Ом, много большее сопротивления катушки, и магнит M пролетает через неё с некоторой скоростью v вдоль оси z, как показано на рисунке (b). Значения напряжения на резисторе снимаются в отдельные моменты времени и показаны на графике на рисунке (c). При решении задачи для удобства считайте зависимость напряжения от времени треугольной волной.

1. Пренебрегая влиянием индуцированного в катушке тока на движение магнита M, оцените скорость v, с которой он пролетает через катушку.

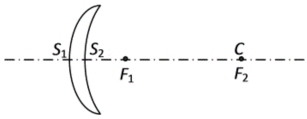
2. Найдите, какой заряд q протёк через резистор R между моментами времени t_3 и t_1.



(a) (b) (c)

К задаче CN01-T2

CN01-T3. На рисунке показана тонкая линза, поверхность S_1 которой является эллипсоидом вращения (полученным при вращении вокруг большой оси) с фокусами в точках F_1 и F_2 и эксцентриситетом e. Поверхность S_2 – участок сферы с центром в точке C, совпадающей с F_2. Известно, что когда линза находится в воздухе, то падающие на неё вдоль оптической оси параллельные пучки (не обязательно параксиальные) точно фокусируются после преломления.

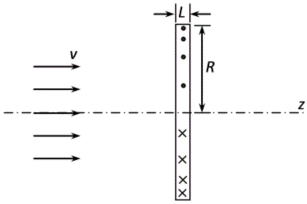


К задаче CN01-T3

1. Найдите коэффициент преломления n материала линзы.

2. Найдите, какому условию должны удовлетворять параметры эллипса, если точная фокусировка описанных в задаче пучков происходит при нахождении линзы в среде с показателем преломления n'.

CN01-T4. В пространстве существует цилиндрическая область магнитного поля радиусом R и длиной L. Ось цилиндра обозначим z. Индукция поля в каждой точке области направлена по касательной к окружности, проходящей через эту точку и имеющей ось z в качестве оси симметрии, и пропорциональна расстоянию r от оси (т.е. $B = Kr$, где K – коэффициент пропорциональности), что показано на рисунке. Также на рисунке показан пучок заряженных частиц, имеющих массу m и заряд q ($q > 0$), пролетающий с большой скоростью v через область магнитного поля параллельно оси цилиндра. Магнитное поле за пределами цилиндрической области отсутствует. Взаимодействием частиц в пучке пренебрегите. Опишите дальнейшее движение пучка частиц.

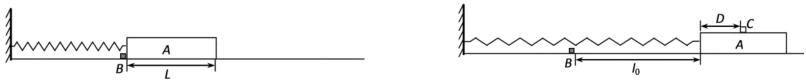


К задаче CN01-T4

CN01-T5. В данной задаче будет рассмотрено распределение материи в нашей галактике Млечный Путь. Считайте галактику сферически симметричной относительно её центра – ядра. Считайте также, что других источников гравитационного поля, кроме матери, в галактике нет. Известно, что расстояние от Земли до Солнца равно R_0, расстояние от Солнца до центра галактики равно $a = 1.75 \cdot 10^9 R_0$, и Солнце движется вокруг него по окружности с периодом $T = 2.4 \cdot 10^8$ лет. Масса Солнца равна M_S, а барионная материя в галактике наблюдается только на расстояниях $r \leq 1.5a$ от центра. Радиус галактики равен $6a$, и все объекты на расстояниях $a \leq r \leq 6a$ от центра движутся вокруг её центра с одинаковой скоростью. При ответе на вопросы массу выражайте в массах Солнца.

1. Покажите, может ли галактика состоять только из барионной материи, и может ли эта материя быть равномерно распределена.
2. Найдите максимальную массу $M_{\text{б.м.}}$ барионной материи в галактике.
3. Найдите общую массу $M_{\text{гал.}}$ галактики.
4. Найдите наименьшую массу $M_{\text{т.м.}}$ тёмной материи в галактике.

CN01-T6. На рисунке (а) показана деревянная доска A, помещённая на гладкий горизонтальный стол, один из концов которой соединён со стеной при помощи идеальной пружины. На столе есть небольшая закреплённая преграда B. Когда доска контактирует с B, пружина находится в нерастянутом состоянии.



(a) (b)

К задаче CN01-T6

Доску A оттягивают вправо на расстояние l_0, после чего помещают на неё пренебрежимо малых размеров деревянный брусок C на расстоянии D от её левого края, как показано на рисунке (b). Затем доску отпускают. Известны длина доски $L = 0.7000$ м и её масса $M = 10.00$ кг, расстояние $l_0 = 1.000$ м, масса бруска $m = 0.01000$ кг, жёсткость пружины $k = 45.00$ Н/м и коэффициенты трения покоя и скольжения между бруском и доской $\mu_0 = 0.4010$ и $\mu = 0.4000$ соответственно. Столкновения между A и B абсолютно неупругие. Ускорение свободного падения равно $g = 9.800$ м/с^2. Сопротивлением воздуха, массой пружины и влиянием бруска C на движение доски пренебрегите. Найдите, при каких значениях расстояния D брусок C не упадёт с доски A в процессе дальнейшего движения системы.

CN01-T7. Рассмотрим воздушный шар с нежёсткой тонкой нерастяжимой теплопроводящей оболочкой. Масса оболочки $m = 12.000$ кг, а максимальный объём шара $V_f = 12.500$ ^{3}.Находящийся на поверхности земли воздушный шар наполняют гелием в количестве $n = 500.00$ моль и затем отпускают. Известны молярная масса гелия $\mu_{He} = 4.0026 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, зависимость давления воздуха от высоты

$$p(h) = p_0 e^{-\sigma h},$$

где $p_0 = 1.0000 \cdot 10^5$ Па – атмосферное давление на поверхности земли, а $\sigma = \frac{\mu_a g}{RT}$, где $\mu_a = 28.964 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха, $g = 9.800$ м/с^2 – ускорение свободного падения, $R = 8.315$ Дж/(моль $\cdot$ К) – универсальная газовая постоянная, $T = 289.64$ К – температура воздуха в атмосфере и гелия в воздушном шаре (считайте, что она остаётся постоянной в процессе движения). Силой трения, действующей на шар со стороны воздуха, пренебрегите.

Примечание: решении задачи может быть удобно воспользоваться разложением экспоненты $e^x \approx 1 + x$ при $x \ll 1$.

1. На какую максимальную высоту H поднимется воздушный шар?

2. Как связаны между собой ускорение a, с которым движется воздушный шар, и его высота h над поверхностью земли.

3. Нарисуйте график зависимости ускорения воздушного шара от его высоты $a(h)$ и обозначьте на нём основные точки.

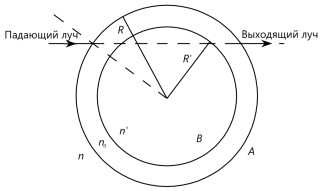
2002

CN02-T1. 1. Однородный цилиндр длиной l_0 и площадью поперечного сечения S имеет в состоянии покоя плотность ρ_0. Найдите плотность цилиндра

ρ этого цилиндра, когда он движется со скоростью $v = 0.9c$, где c – скорость света.

2. Если соответствующая электрону волна де Бройля является плоской волной с длиной волны λ, распространяющейся в положительном направлении оси Ox, найдите проекцию p_x импульса электрона на эту ось и его координату x.

CN02-T2. В среде A с показателем преломления n находится сферический пузырёк радиуса R, показатель преломления внутри которого равен n_0. Внутрь пузырька помещён концентрический ему прозрачный шар B. На пузырь направляют луч света, как показано на рисунке.



К задаче CN02-T2

1. Найдите, как связаны между собой показатель преломления n' шарика B и его радиус R', если известно, что вышедший из пузырька луч движется вдоль продолжения падающего луча. Решайте задачу в параксиальном приближении, т.е. считайте, что все углы падения и преломления удовлетворяют соотношению $\sin\theta \approx \theta$.

Чтобы использовать приближение предыдущего пункта, необходимо, чтобы значения всех углов падения и преломления не превышали 0.1 рад.

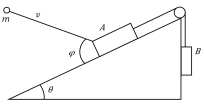
2. Найдите, какой процент световых лучей, падающих на пузырёк, удовлетворяет этому условию.

CN02-T3. Одно из первых измерений скорости света было основано на методе, использовавшем периоды обращения ближайшего к Юпитеру спутника Ио, измеренные в различных орбитальных положениях Земли. Известно, что Ио имеет период $T_0 = 42.5$ ч. Наибольшее значение периода, измеренное с Земли, на 15 сек больше T_0, а наименьшее – на 15 сек меньше. Орбиты Земли, Юпитера и Ио считайте круговыми и лежащими в одной плоскости, направления обращения всех небесных тел совпадают. Радиус орбиты Земли $R_E = 1.5 \cdot 10^8$ км, орбиты Юпитера – $R_J = 7.8 \cdot 10^8$ км, а орбиты Ио – $R_I = 4.2 \cdot 10^5$ км.

1. Найдите, в каком положении относительно Юпитера находится Земля, когда наблюдаются наименьший и наибольший периоды обращения Ио. Имеет ли при этом смысл учитывать влияние движения Юпитера и Ио на этот результат?

2. Используя данные задачи и сделав разумные приближения, найдите значение скорости света c.

CN02-T4. Как показано на рисунке, наверху зафиксированной наклонной плоскости закреплён неподвижный блок. Угол наклона плоскости равен θ. Через блок перекинута лёгкая нить, концы которой прикреплены к брускам A и B, и часть нити, соединённая с B, верти-

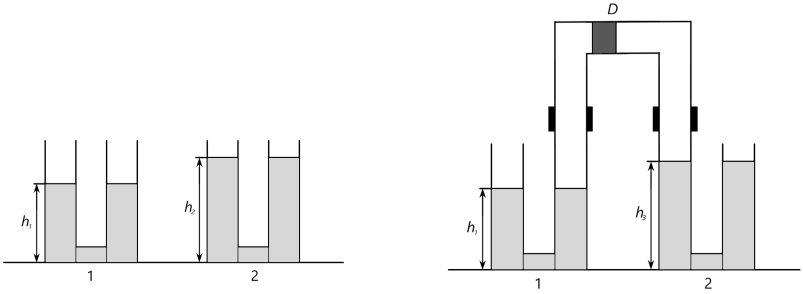


К задаче CN02-T4

кальна. Масса A равна $m_A = 0.15$ кг, а масса B – $m_B = 0.10$ кг, коэффициент трения между A и наклонной плоскостью равен $\mu = 0.2$, а угол $\theta = 30°$. В некоторый момент времени пуля массой $m = 0.010$ кг попадает в A, двигаясь перед столкновением под углом φ к наклонной плоскости со скоростью $v = 20$ м/с. При решении задачи трением в оси блока пренебрегайте. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Опишите дальнейшее движение системы при $\varphi = 45°$. Найдите скорость v бруска A непосредственно после попадания в него пули при различных значениях φ в диапазоне $45° < \varphi < 90°$.

CN02-T5. На рисунке (a) показаны две идентичные U-образные трубки 1 и 2 с поперечным сечением S, в которые залита жидкость плотности ρ до высот h_1 и h_2 соответственно. Их герметично соединяют ещё одной трубкой с таким же сечением, как показано на рисунке (b). В соединительной трубке находится поршень D, который разделяет газ в трубе на два участка длиной L_0, давление газа внутри каждой из которых равно атмосферному p_0. Максимальная сила трения покоя между поршнем и трубкой равна F.

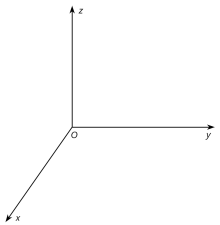
В открытое колено трубки 1 вводят некоторый объём V такой же жидкости, и после установления равновесия высота жидкости в левом колене трубки 2 оказывается равной h_3. Найдите объём введённой жидкости V.



(a) (b)

К задаче CN02-T5

CN02-T6. Известно, что в некоторой области пространства, в которой введена показанная на рисунке ортогональная система координат xyz, может существовать либо нет однородное магнитное поле и однородное электрическое поле. При ответе на каждый вопрос при отсутствии соответствующего поля пишите $E = 0$ или $B = 0$, при наличии поля записывайте его координаты E_x, E_y, E_z или B_x, B_y, B_z. Направления, если требуются, задавайте углами между вектором и положительными направлени-



К задаче CN02-T6

ями координатных осей. Протон 1 массой m и зарядом q движется в данной области пространства вдоль положительного направления оси z со скоростью v_1 и имеет ускорение $a_1 = 0$.

1. Определите из этих данных возможные направления и напряжённость электрического и индукцию магнитного полей.

2. Обоснуйте кратко выводы, сделанные в п. 1.

Протон 2 движется в данной области пространства в плоскости yOz со скоростью $v_2 = \sqrt{2}v_1$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к положительным направлениям осей Oy и Oz и ненулевым ускорением a_2 в отрицательном направлении оси Ox.

3. Учитывая теперь движение обоих протонов, определите возможные направления и напряжённость электрического и индукцию магнитного полей.

2003

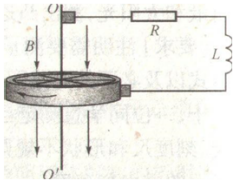
CN03-T1. Пять однородных шариков одинаковой массы, четыре из которых имеют радиус a, помещены в полусферическую чашу радиуса R. Шарики неподвижны, и их центры масс лежат в одной горизонтальной плоскости. Пятый шарик имеет радиус b и помещается сверху этих четырёх. Поверхности чаши и шариков гладкие. Найдите, какому условию должен удовлетворять радиус чаши R, чтобы после добавления пятого шарика четыре других перестали контактировать друг с другом.

CN03-T2. Искусственный спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В прямоугольной системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – соответственно его большая и малая полуоси. Когда спутник находится в апогее своей орбиты, с него запускают зонд массой m в направлении его движения. Под действием тяготения Земли зонд движется в дальнейшем по гиперболической орбите, действительная полуось которой равна расстоянию от Земли до спутника в апогее. Масса Земли m_E, гравитационная постоянная G. Влиянием источников других гравитационных полей кроме Земли пренебрегите. Найдите, какую кинетическую энергию ΔE нужно было придать зонду, чтобы запустить его со спутника.

CN03-T3. На рисунке (а) показан металлический маховик. Он имеет n спиц длины l и может вращаться вокруг оси OO'. Маховик находится в однородном магнитном поле индукции B, направленном параллельно валу маховика. Обод маховика с помощью металлических щёток соединяется с резистором сопротивления R, катушкой индуктивности L и валом в единую цепь. При решении



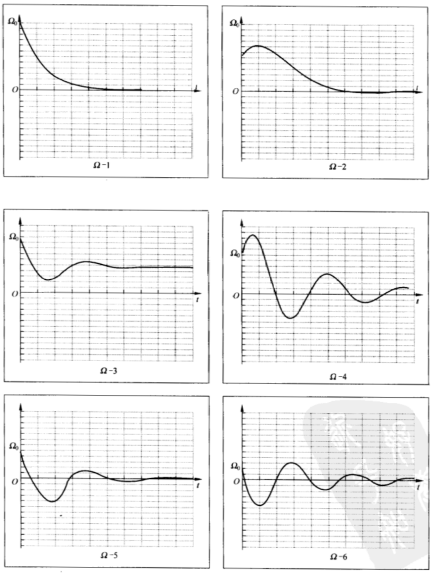
К задаче CN03-T3

задачи пренебрегите сопротивлением вала и маховика, а также трением при вращении. Изначально маховик находится в состоянии покоя, и к нему прикладывают момент сил M.

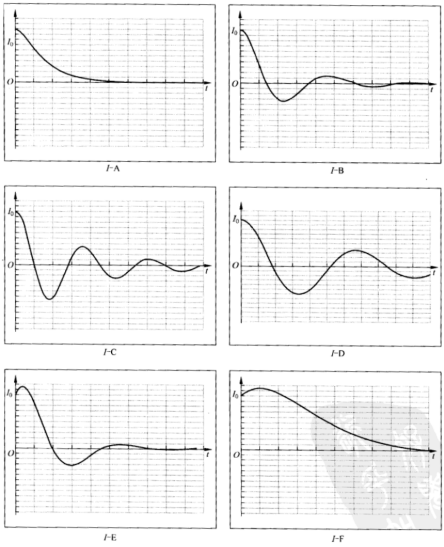
1. Найдите его угловую скорость Ω_0 и ток через резистор I_0, когда вращение стабилизируется.

Когда по достижении стационарного вращения внешний момент сил M перестаёт действовать, угловая скорость маховика и ток через резистор будут меняться со временем. В зависимости от значения R зависимости $\Omega(t)$ и $I(t)$ будут иметь разный вид. На рисунках (b) и (c) представлены по 6 графиков зависимостей $\Omega(t)$ и $I(t)$ соответственно. На каждом графике момент времени, когда момент M обнуляется, принят за начальный момент времени $t = 0$, и в этот момент угловая скорость маховика равна Ω_0, а ток через резистор – I_0. Масштабы всех графиков по Ω, I и t одинаковы.

2. Выберите те из графиков $\Omega(t)$, которые могут отражать возможное движение маховика в дальнейшем, и сопоставьте им соответствующие графики $I(t)$.



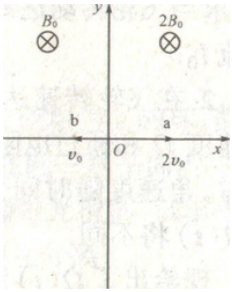
(b)



(c)

К задаче CN03-T3

CN03-T4. Как показано на рисунке, справа от оси y существует однородное магнитное поле индуктивности $2B_0$, а слева от неё же – поле индуктивности B_0, причём оба направлены перпендикулярно картинной плоскости от наблюдателя. В начале координат O находится заряженная частица a с зарядом q и массой m, которая начинает в момент времени $t = 0$ двигаться со скоростью $2v_0$ в положительном направлении оси x. Через некоторое время Δt частица b с теми же массой и зарядом начинает двигаться со скоростью v_0 в отрицательном направлении оси x.



К задаче CN03-T4

Система находится в вакууме, гравитацией и взаимодействием частиц пренебрегите. Найдите минимальное значение Δt такое, что частицы a и b в дальнейшем встретятся в процессе своего движения. Найдите соответствующие координаты $(x; y)$ встречи частиц.

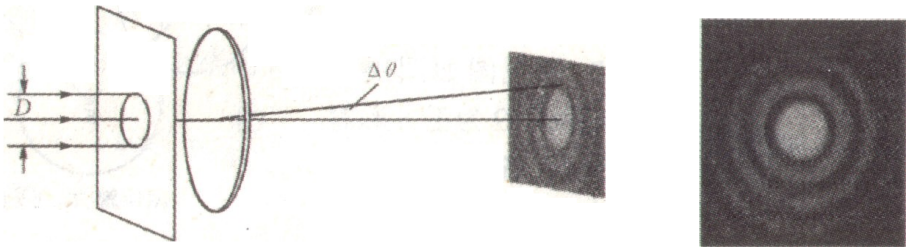
CN03-T5. Когда близорукий человек не носит очки, все объекты, которые он может чётко видеть, находятся на расстоянии не более $a = 20$ см от его глаз. Однако, если поместить перед глазами такого человека лист с маленьким отверстием, он сможет различать без очков и отдалённые объекты, глядя через это отверстие.

1. Вычислите в рамках геометрической оптики диаметр светового пятна D', образующегося на сетчатке глаза близорукого человека, когда он смотрит на отверстие диаметра D.

Примечание: человеческий глаз представляет собой оптическую систему со сложной структурой. В рамках данной задачи её можно упростить, представив глаз как систему из тонкой линзой с изменяемым фокусным расстоянием f и сетчатки, на которой формируется изображение. Можно также считать, что размеры этой линзы определяются размерами зрачка, среда по обе стороны её представляет собой воздух, а расстояние между линзой и сетчаткой равно b.

2. Учитывая, что свет испытывает дифракцию на маленьком отверстии, найдите его оптимальный диаметр D_0. Считайте, что видимый свет в среднем имеет длину волны $\lambda = 600$ нм.

Примечание: Поясним влияние наличия маленького круглого отверстия на создаваемое линзой изображение. В рамках геометрической оптики лучи света, испущенные удалённым источником и потому параллельные оптической оси соберутся строго в фокусе линзы, создавая изображение. Однако, если поместить перед линзой маленькое круглое отверстие диаметра D, произойдёт дифракция света, поэтому в фокальной плоскости появится дифракционная картина, показанная на рисунке (а).



(a) (b)

К задаче CN03-T5

В центре картины располагается яркое круглое пятно, а за его пределами – множество тёмных и светлых концентрических колец с постепенно убывающей яркостью. В силу того, что яркость этих колец много меньше, чем у центрального пятна, их наличием можно пренебречь. Тогда радиус $\Delta\theta$ центрального пятна будет связан с D как

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D},$$

где λ – длина волны используемого света. «Изображением» точечного источника при наличии маленького круглого отверстия является центральное пятно, как показано на рисунке (b). Несложно видеть, что с ростом D это пятно уменьшается в размерах, становясь в пределе точечным, а изображение при этом становится чётче. С другой стороны, при уменьшении D размер дифракционного пятна увеличивается, и изображение ухудшается. Если экран, на котором формируется изображение, находится не строго в фокусе, а в некоторой его окрестности, на экране можно будет наблюдать ту же дифракционную картину, и угловой радиус $\Delta\theta$ центрального пятна может быть приближённо вычислен по той же формуле.

CN03-T6. В данной задаче считайте Землю шаром с радиусом 6370 кг, а её магнитное поле – однородным в кольцевой области в плоскости экватора, простирающейся на 1000 км от поверхности Земли. Величина индукции магнитного поля в этой области $B = 3.20 \cdot 10^{-6}$ Тл. Пучок заряженных космических частиц с массой $m_0 = 6.68 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3.20 \cdot 10^{-19}$ Кл движется по круговой орбите с радиусом $R = 7370$ км вокруг центра Земли в области однородного магнитного поля над земным экватором.

Примечание: в СТО, когда сила F перпендикулярна скорости частицы v, соотношение между силой и ускорением имеет вид

$$F = \gamma m a.$$

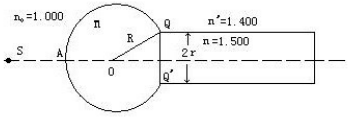
1. Найдите кинетическую энергию E_k частиц пучка.

Частица пучка, двигаясь по круговой орбите, сталкивается с неподвижной незаряженной частицей с массой $m_2 = 4m_0$ и сливается с ней воедино.

2. Найдите массу m_1 получившейся составной частицы.

2004

CN04-T1. Прозрачное оптоволокно с показателем преломления сердцевины $n = 1.500$ имеет радиус r и покрыто оболочкой с показателем преломления $n' = 1.400$. Полупроводниковый лазер S находится на продолжении оси симметрии оптоволокна и испускает луч с углом раствора 60°. Чтобы свет этого луча мог полностью попасть в оптоволокно, перед ним помещают сферический наконечник QAQ', имеющий радиус R и выполненный из того же материала, что и сердцевина оптоволокна. Полученная структура показана в разрезе на рисунке (оболочка оптоволокна не показана). Лазер S считайте точечным источником света. Вся система находится в воздухе, его коэффициент преломления равен $n_0 = 1.000$.



К задаче CN04-T1

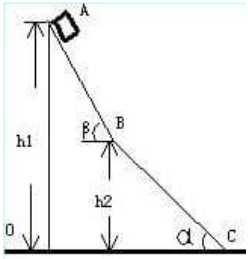
1. Найдите, какому условию должно удовлетворять расстояние x между лазером S и точкой A, чтобы весь свет лазера попадал на сферический наконечник.

2. Если $R = 1.8r$, расстояние между S и A равно R, и угол между падающим лучом света и осью оптоволокна равен α, исследуйте, сможет ли в дальнейшем луч распространяться внутри оптоволокна посредством полного внутреннего отражения при значениях $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 25°$ и $\alpha_3 = 20°$.

CN04-T2. 1. В рамках релятивистской механики покажите, что, когда фотон сталкивается с покоящимся в лабораторной системе отсчёта электроном в вакууме, энергия фотона не может быть полностью поглощена электроном.

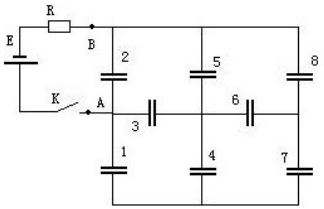
2. Покажите, что, когда фотон сталкивается с металлической поверхностью, его энергия может быть полностью поглощена. Какое условие на ν и W должно выполняться для возникновения фотоэффекта?

CN04-T3. Как показано на рисунке, клиновидный деревянный брусок $OABC$ массой $M = 30.0$ кг покоится на горизонтальной поверхности. Поверхность бруска представляет собой две наклонных плоскости AB и BC; угол, который BC составляет с горизонталью, равен $\alpha = 45°$; угол, который AB составляет с горизонталью, равен $\beta = 60°$; в точке их пересечения B имеется небольшое гладкое закругление. Маленький груз массой $m = 4.00$ кг (его можно рассматривать как точечную массу) помещают на наклонную плоскость на высоте $h_1 = 2.80$ м над землёй и отпускают. Известно, что между грузом и бруском трения нет, а коэффициент трения между бруском и землёй равен $\mu = 6.00 \cdot 10^{-2}$. Высота точки B над землёй равна $h_2 = 2.00$ м. Ускорение свободного падения равно $g = 10.0$ м/с^2. Найдите, какую работу W совершил груз за всё время скольжения по бруску, кроме момента прохождения точки B.

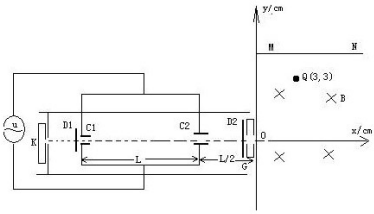


К задаче CN04-T3

CN04-T4. В показанной на рисунке электрической цепи E – это ЭДС источника тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, R – сопротивление резистора, а K – ключ. К концам контура A и B подключена цепь из восьми конденсаторов одинаковой ёмкости C. В начальный момент времени ключ K замыкают. (При решении задачи удобно отметить знак заряда на каждой из пластин конденсаторов на рисунке.) Какое количество теплоты Q выделится на резисторе за всё время дальнейшей зарядки конденсаторов?



К задаче CN04-T4

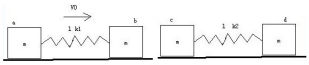


К задаче CN04-T5

CN04-T5. На рисунке показан источник заряженных частиц K, из которого могут непрерывно вылетать частицы с различными скоростями в направлении, показанном пунктирной линией. Заряд всех этих частиц положителен и равен q, а их масса равна m. D_1 и D_2 – две перегородки, которые могут быть открыты либо закрыты. C_1 и C_2 – две пары пластин конденсаторов, причём C_1 находится очень близко к D_1, расстояние между конденсаторами L, и на них подаётся переменное напряжение $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, где T – его период. Известно, что частицы могут пролететь через конденсатор только в очень короткий промежуток времени, когда напряжение на нём близко к нулю. Расстояние между C_2 и D_2 равно $\frac{L}{2}$. Рядом с D_2 располагается устройство G, корректирующее энергию частиц таким образом, что, когда заряженная частица пролетает через G в момент времени t, её энергия меняется на величину $\Delta E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$, где $E_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{ml^2}{T^2}$. Пролетев через G, частицы попадают в точке O в область однородного магнитного поля индукции B, направленного от наблюдателя. Вся система находится в вакууме. В области магнитного поля введена прямоугольная система координат xOy с началом координат в точке O, как показано на рисунке. MN – граница области магнитного поля, параллельная оси Ox. В начальный момент времени $t = 0$ обе перегородки D_1 и D_2 открывают, чтобы пустить поток частиц через C_1, а по прошествии времени $\frac{3}{4}T$ перегородку D_1 закрывают, чтобы прервать поток через C_1. По прошествии времени $\frac{10}{4}T$ перегородку D_2 также закрывают, чтобы прервать поток частиц через G. Известно, что частица с самой высокой скоростью из попадающих в область магнитного поля в точке O проходит в дальнейшем через точку $Q(3\text{ см}; 3\text{ см})$. Найдите, в какое положение y нужно сместить границу магнитного поля MN, чтобы теперь частица с самой низкой скоростью из попадающих в область магнитного

поля в точке O тоже в дальнейшем проходила через точку Q.

CN04-T6. На рисунке показаны четыре небольших бруска a, b, c и d, лежащие на гладкой горизонтальной поверхности, масса каждого из них равна m. Бруски a и b соединены пружиной, имеющей жёсткость k_1 и длину l в недеформированном состоянии. Пружина такой же длины и жёсткости k_2 соединяет бруски c и d. Центры масс всех четырёх брусков находятся на одной прямой. Все столкновения между b и c абсолютно упругие, и время столкновений очень мало. В начальный момент времени бруски c и d покоятся, а бруски a и b движутся вправо с одинаковой скоростью v_0; обе пружины не натянуты.

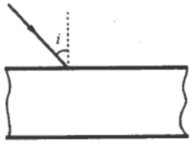


К задаче CN04-T6

1. Выясните, как будут в дальнейшем двигаться бруски, если $k_1 = k_2$.
2. Выясните, как будут в дальнейшем двигаться бруски, если $k_1 = 4k_2$.

2005

CN05-T1. Как показано на рисунке, тонкий луч света падает из воздуха на верхнюю грань прозрачной плоскопараллельной пластинки под углом i, проходит через неё и выходит в воздух снизу пластинки после преломления. Луч состоит из двух монохроматических волн 1 и 2 разных частот. Показатель преломления пластинки для на этих частотах равен n_1 и n_2 соответственно, причём известно, что $n_1 > n_2$.



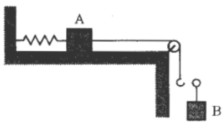
К задаче CN05-T1

1. Проанализируйте в общем виде, свет какой из двух частот в различных возможных случаях пройдёт через пластинку быстрее.

2.1. Проанализируйте, свет какой из двух частот в различных возможных случаях пройдёт через пластинку быстрее, при значениях $n_1 = 1.55$, $n_2 = 1.52$.

2.2. Проанализируйте, свет какой из двух частот в различных возможных случаях пройдёт через пластинку быстрее, при значениях $n_1 = 1.40$, $n_2 = 1.38$.

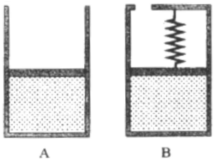
CN05-T2. Как показано на рисунке, левый конец лёгкой горизонтальной пружины с жёсткостью $k = 40.0$ Н/м прикреплён к стене, а правый – к небольшому бруску A массой $M = 3.00$ кг. Тонкая невесомая нить привязана к правой стороне A и перекинута через лёгкому и гладкому неподвижному блоку. На другом конце нити закреплён крюк. Брусок A находится на достаточно длинной горизонтальной поверхности, причём коэффициент трения покоя между ней и бруском равен $\mu_0 = 0.200$, а коэффициент трения скольжения – $\mu = 0.180$. В начальный момент времени брусок и блок находятся в состоянии покоя, а пружина не натянута. На крюк вешают груз B массой $m = 2.00$ кг и



К задаче CN05-T2

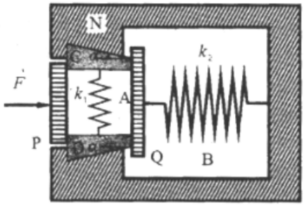
затем отпускают его. Найдите работу по преодолению силы трения W_μ и время t, затраченное на весь процесс преодоления. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

CN05-T3. Как показано на рисунке, A и B представляют собой два вертикальных цилиндра с одинаковым внутренним диаметром. Они помещены в атмосферу, давление которой равно p_0. В цилиндрах под поршнями с массой m находится один и тот же идеальный газ в количестве n моль. Площадь поперечного сечения цилиндров равна S. Поршень в цилиндре B соединён с вертикальной невесомой пружиной жёсткости k, верхний конец которой зафиксирован. Изначально температура газа в цилиндрах равна T_1, поршни находятся в равновесии, пружина не растянута. Теперь газ в обоих цилиндрах охлаждают до одной и той же температуры, причём объём газа в цилиндре B меняется в α раз. Найдите разность количеств теплоты Q_A и Q_B, отведённых от газа в цилиндрах A и B соответственно.



К задаче CN05-T3

CN05-T4. Буфер – это амортизирующее устройство, используемое для уменьшения последствий столкновения между транспортными средствами. На рисунке показана упрощённая схема широко распространённого фрикционного буфера. N – пружинная коробка. C и D – два идентичных клина с трапециевидным сечением, расположенные симметрично сверху и снизу. Их левые и правые концы соприкасаются с пластинами P и Q соответственно. Угол между наклонной плоскостью клина и горизонталью равен α. A – пружина жёсткостью k_1, прикреплённая к C и D. B – пружина жёсткостью k_2, прикреплённая к Q и внутренней стенке буфера. Вдоль каждой из контактных поверхностей возможно скольжение с коэффициентом трения μ. Важной характеристикой буфера является степень поглощения η. При её измерении буфер фиксируют и наносят удар по пластине P с силой F. Под действием этой силы пружина сжимается, причём работа, совершённая силой до момента наибольшего сжатия пружины равна W, а при обратном движении пружины до состояния наименьшего сжатия буфер совершает работу W'. Степень поглощения при этом определяется формулой



К задаче CN05-T4

$$\eta = \frac{W - W'}{W}.$$

Считайте известными следующие параметры буфера: жёсткость $k_1 = 1.2 \cdot 10^7$ Н/м, жёсткость $k_2 = 1.5 \cdot 10^6$ Н/м, коэффициент трения $\mu = 0.25$, угол $\alpha = 22°$. В начальном состоянии обе пружины слегка сжаты, и сжатие A составляет $x_{10} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ м, а сжатие B – $x_{20} = 4.0 \cdot 10^{-2}$ м. При ударе пружина B сожмётся

ещё максимум на $\Delta x_m = 6.3 \cdot 10^{-2}$ м.

Массой пружины, клиньев и пластин можно пренебречь. Найдите степень поглощения буфера η.

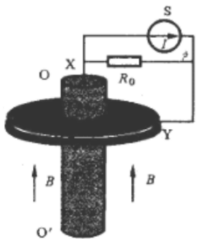
CN05-T5. Для некоторого атомного ядра известны его масса в основном состоянии m_0 и разница энергий основного и возбуждённого состояния ΔE. Известны также постоянная Планка h и скорость света в вакууме c.

1. Возбуждённое ядро свободно и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени оно переходит в основное состояние, излучая фотон. Найдите длину волны λ_0 излученного фотона.

Вследствие теплового движения возбуждённые атомы зачастую не находятся в состоянии покоя, а движутся со всевозможными скоростями во всевозможных направлениях. В данной задаче считайте, что атомы движутся только вдоль одной прямой. Максимальная скорость атомов равна u. Обозначим $\Delta\lambda$ разность наибольшей и наименьшей длин волн, испускаемых этими атомами.

2. Найдите, чему равно отношение $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$.

CN05-T6. На рисунке показан неподвижный цилиндрический вал OO', имеющий радиус a_1 и пренебрежимо малое сопротивление. Однородный проводящий диск с внутренним и внешним радиусами a_1 и a_2 соответственно и толщиной h ($h \ll a_1$) надет на вал OO', может свободно вращаться вокруг него и имеет с ним хороший электрический контакт. Удельное сопротивление диска на расстоянии r от его центра пропорционально этому расстоянию, т.е. $\rho = \rho_0 r$, где ρ_0 – некоторая постоянная. Система находится в магнитном поле индукции B, перпендикулярном поверхности диска. Также на рисунке показан источник постоянного тока S, который обеспечивает ток величины I вне зависимости от нагрузки на нём. Параллельно с нагрузкой источник тока подключен к резистору сопротивлением R_0. Один конец источника подсоединяется к центру торцевой поверхности вала X, а другой конец – к кольцевой щётке Y. Кольцевая щётка окружает диск и поддерживает с ним хороший электрический контакт, не препятствуя при этом его вращению. Эту систему можно использовать как мотор. Когда на нём нет нагрузки, то угловая скорость установившегося вращения диска равна ω_0. Когда на моторе есть некоторая нагрузка, угловая скорость равна ω. Трением пренебрегите.



К задаче CN05-T6

1. Найдите, чему равно отношение $\frac{\omega}{\omega_0}$, при котором мотор выдаёт максимальную механическую мощность P.

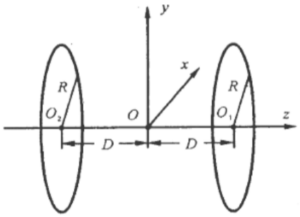
2. Какая тепловая мощность $P_{\text{Д.}}$ выделяется в этом случае на диске?

CN05-T7. На рисунке показаны два однородно заряженных тонких кольца радиусом R и зарядом Q ($Q > 0$). Их центры лежат на оси Oz, их плоскости пер-

пендикулярны ей. Центры колец O_1 и O_2 находятся на одинаковом расстоянии D от лежащего между ними центра координат O. При решении задачи силой тяжести можно пренебречь. Заряженная частица массой m и зарядом q ($q > 0$) движется вдоль положительного направления оси Oz из $z = -\infty$. Известно, что её скорости достаточно, чтобы пройти через кольца.

1. Постройте характерный график зависимости кинетической энергии E_k частицы от координаты z. Найдите, при каких D реализуются различные качественные варианты графика.

2. Опишите возможные варианты движения частицы, выпущенной с некоторой скоростью вдоль оси Oz из точки $z = 0$.

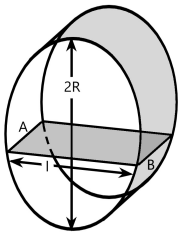


К задаче CN05-T7

2006

CN06-T1. Человечество давно мечтало построить лестницу, ведущую прямиком в космос. В настоящее время учёные из Лос-Аламосской национальной лаборатории при поддержке NASA ведут исследования в этой области. Одна из простых моделей – это считать лестницу кабелем очень большой длины с однородным распределением массы, сделанным из высокопрочных лёгких углеродных нанотрубок. Кабель доставляется на орбиту обычным космическим кораблём, после чего медленно опускается к поверхности Земли. Его верхний конец находится в космосе, а нижний касается земли, однако не действует на неё при этом ни с какой силой. Известны радиус Земли $R_0 = 6.37 \cdot 10^6$ м и ускорение свободного падения $g = 9.80$ м/с^2. Учитывая лишь гравитацию Земли и её вращение вокруг своей оси, найдите длину лестницы L.

CN06-T2. На рисунке показан цилиндр внутреннего радиуса R, расположенный на горизонтальной поверхности. Внутрь цилиндра помещён прямоугольный объект. В этом объекте A и B – два тонких круглых стержня одинаковой длины и массы m, соединённые параллельно плоским листом с пренебрежимо малой массой и шириной $l = \sqrt{3}R$. Изначально прямоугольник горизонтален и находится в состоянии покоя, а A и B касаются внутренней поверхности цилиндра. Коэффициент трения между стержнями и внутренней поверхностью цилиндра равен $\mu = 1$. Цилиндр начинают очень медленно вращать так, что A начинает подниматься.



К задаче CN06-T2

1. Найдите значение угла α, на который провернётся цилиндр, когда прямоугольник выйдет из состояния покоя.

Как только прямоугольник выходит из состояния покоя, вращение цилиндра прекращается. Угол между вертикалью и линией, соединяющей середины стержней A и B, обозначим θ.

2. Запишите уравнение на угол θ, при котором B начнёт скользить относительно цилиндра, и найдите его значение с точностью до трёх значащих цифр.

CN06-T3. Из-за вращения Земли и разницы в поглощении солнечного излучения атмосферой температура и плотность воздуха на разных высотах в неподвижной атмосфере различаются. Для сухого и неподвижного воздуха на высоте менее 20 км температура T_e уменьшается с увеличением высоты, причём известно, что это происходит линейно со скоростью

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta z} = -6.0 \cdot 10^{-3}\ \text{К/м},$$

где z – координата вдоль вертикальной оси. Рассмотрим порцию воздуха достаточно малую, чтобы ей можно было приписать определённую координату, но при этом имеющую некоторую массу. Начальное положение порции воздуха примем за начало координат $z = 0$. Обозначим её температуру, плотность и давление как T, ρ и p соответственно, а температуру, плотность и давление окружающей атмосферы как T_e, ρ_e и p_e соответственно. Пусть порция воздуха немного смещается вверх, тогда из-за уменьшения давления атмосферы порция будет расширяться, а её температура убывать (это изменение также можно считать линейным с высотой). Так как процесс достаточно медленный, то можно считать давление порции и окружающей её атмосферы равными друг другу, но при этом пренебречь теплообменом, считая процесс адиабатическим. Найдите, как в дальнейшем будет двигаться воздушная масса. Воздух в атмосфере считайте идеальным газом. В адиабатическом процессе выполняется соотношение $pV^\gamma = C$, где γ и C – некоторые константы, причём для воздуха $\gamma = 1.40$. Молярная масса воздуха $\mu = 0.029$ кг/моль $R = 8.31$ Дж/(моль $\cdot$ К), ускорение свободного падения $g = 9.80$ м/с^2, а температура атмосферы при $z = 0$ равна $T_{e\,0} = 300$ К.

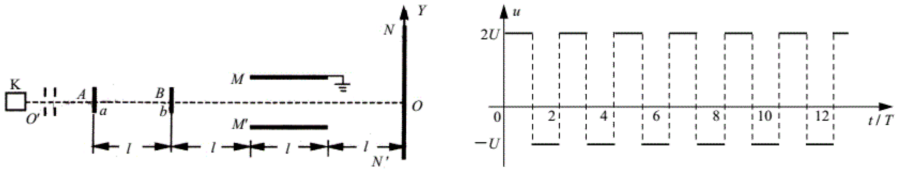
CN06-T4. На рисунке (a) показан источник заряженных частиц K, из которого непрерывно испускается поток частиц с одинаковым положительным зарядом и массой в направлении $O'O$, обозначенном пунктиром. Скорости вылетающих частиц произвольны и конечны. Когда частица попадает в перпендикулярный $O'O$ экран NN', она оставляет на нём след. Ось y перпендикулярна $O'O$, её начало находится в точке O пересечения пунктирной линии и экрана, и она направлена от O к N. В точках A и B пунктирной линии находятся клапаны a и b соответственно. Их можно открывать и закрывать, и в закрытом состоянии они блокируют поток частиц.

M и M' – две большие параллельные проводящие пластины. Расстояние от каждой из них до $O'O$ равно d, пластина M' заземлена. На пластины подаётся переменное напряжение u с периодом $2T$, оно меняется со временем так, как показано на рисунке (b). Максимальное по величине положительное напряжение равно $2U$, отрицательное – U. Когда заряженная частица движется в пространстве между двумя пластинами, её ускорение a под действием напря-

жения U, полупериод напряжения между пластинами T и расстояние d между пластинами и пунктирной линией связаны соотношением

$$aT^2 = \frac{1}{5}d.$$

Расстояние между A B, расстояние между B и левыми концами металлических пластин, длина пластин и расстояние между их правыми концами и экраном равны l. При решении задачи пренебрегите силой тяжести и взаимодействием между заряженными частицами. Частицы, на пути закрытого клапана поглощаются и не влияют на движение других частиц в дальнейшем. Считайте, что электрическое поле существует только между пластинами M и M' и считайте его однородным.



(a) (b)

К задаче CN06-T4

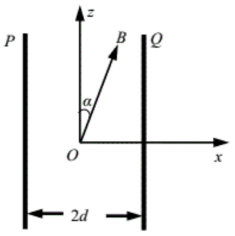
Время от открытия до закрытия клапана δ пренебрежимо мало по сравнению с T. В некоторый момент клапан a открывается и сразу же закрывается, через время T клапан a снова открывается и сразу же закрывается, ещё через время T клапан a открывается и закрывается в третий раз, и одновременно с ним открывается и закрывается клапан b. Известно, что клапан b был открыт в момент времени $t = 0$, как показано на рисунке (b).

1. Найдите координаты y следов, которые частицы могли оставить на экране.

Теперь положим $\delta = \frac{T}{10}$. В некоторый момент времени клапан a и затем закрывают. По прошествии времени T после открытия клапана a открывается и клапан b, после чего тоже закрывается. Клапан b также был открыт в момент времени $t = 0$, как и в п. 1.

2. Найдите координаты y следов, которые оставили самая быстрая и самая медленная частицы, пролетевшие через клапаны.

CN06-T5. Оси x и z прямоугольной системы координат xyz лежат в картинной плоскости, как показано на рисунке, а ось y направлена от наблюдателя. Две бесконечные металлические пластины P и Q имеют координаты $x = -d$ и $x = d$ соответственно. Магнитное поле с индукцией B направлено в плоскости xz под углом α к оси z. В начале координат O находится заряженная частица с зарядом q $(q > 0)$ и массой m, которая начинает



К задаче CN06-T5

двигаться со скоростью v_0 в положительном направлении оси y. Силой тяжести при решении задачи пренебрегите.

1. Найдите, с какой скоростью v_0 должна двигаться частица, чтобы достичь одной из пластин, но не контактировать с ней, если к пластинам не приложено напряжение. Найдите время t_0, за которое такая частица достигнет пластины.

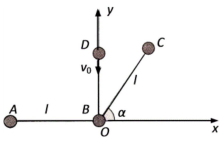
Теперь к пластинам прикладывают напряжение такое, что напряжённость поля между ними в положительном направлении оси Ox равна E.

2. Найдите, с какой начальной скоростью v_0 должна теперь двигаться частица, чтобы достичь пластины за то же время t_0, что и в п. 1. Найдите координаты частицы $(x; y; z)$, когда она достигает пластины, в случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

CN06-T6. Эксперименты в области физики высоких энергий показали, что, когда в лабораторной системе отсчёта движущийся протон сталкивается с неподвижным протоном, образуется ещё один протон и антипротон. Массы протона и антипротона равны $m_0 = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг. Найдите пороговое значение E энергии, которую должен иметь движущийся протон в лабораторной системе отсчёта, чтобы была возможна описанная реакция. Электростатическим взаимодействием частиц можно пренебречь.

2007

CN07-T1. Три твёрдых шарика A, B и C покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Масса каждого из них равна m. Они соединены между собой нежёсткими нерастяжимыми лёгкими нитями AB и BC длины l. Угол между продолжением нити AB и нитью BC равен $\alpha = \frac{\pi}{3}$. В этой горизонтальной плоскости введена ортогональная система координат xy, причём начало координат O совпадает с B, а выбор направления осей x и Oy показан на рисунке. Ещё один твёрдый шарик D массы m находится на оси y, движется в отрицательном её направлении со скоростью v_0 и сталкивается упруго с шариком B. Время столкновения очень мало, и нить BC рвётся сразу по его окончании. Найдите, через какое время t после столкновения шарик D будет находиться на минимальном расстоянии от центра масс системы, состоящей из шариков A, B и C.

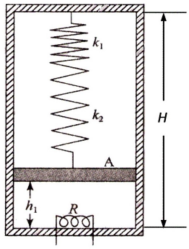


К задаче CN07-T1

CN07-T2. Чтобы запустить зонд на близкое расстояние к Солнцу и обеспечить после этого его возвращение к Земле, космический корабль, его несущий, должен быть запущен по эллиптической орбите в плоскости орбиты Земли. Расстояние от Солнца до перигелия орбиты корабля равно 0.01 а.е. (где 1 а.е. $= 1.495 \cdot 10^{11}$ м – астрономическая единица, равная среднему расстоянию от Земли до Солнца), и период обращения корабля равен земному. Корабль запускают с поверхности Земли с некоторой скоростью u_0 так, чтобы он мог выйти на необходимую орбиту. Радиус Земли $R = 6.37 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 9.80$ м/с^2. Найдите, с какой скоростью u_0

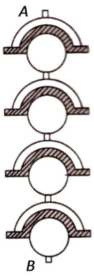
относительно Земли должен быть запущен корабль. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

CN07-T3. Как показано на рисунке, в вертикальном теплоизолированном цилиндре высотой H и площадью внутреннего сечения S находится теплоизолирующий поршень A массой m, разделяющий цилиндр на верхнюю и нижнюю части. Поршень может двигать вверх-вниз без трения о стенки цилиндра. Две лёгкие пружины с коэффициентами жёсткости k_1 и k_2 ($k_1 \neq k_2$) соединяют последовательно верхнюю часть цилиндра с A. Сверху над A вакуум, а под ним – некоторое количество идеального газа. Изначально система находилась в равновесии, высота A (т.е. расстояние между нижней частью цилиндра и нижней частью поршня) и суммарное сжатие двух пружин равны $h_1 = \frac{H}{4}$. Теперь электрический нагреватель R включают в сеть, и A начинает подниматься. Когда система достигает равновесия, высота поршня становится равной $h_2 = \frac{3}{4}H$. Молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме равна $\frac{3}{2}R$, где R – универсальная газовая постоянная. Пружины в процессе задачи подчиняются закону Гука. Найдите тепло ΔQ, которое было подведено к газу в описанном процессе.

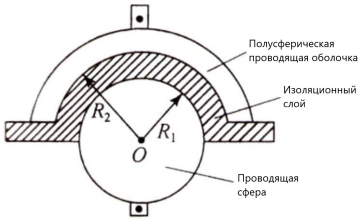


К задаче CN07-T3

CN07-T4. Чтобы уменьшить потери электроэнергии при передаче, обычно используют переменный ток высокого напряжения. Чтобы передать такой ток, необходимо возвести серию заземлённых железных опор ЛЭП, после чего собрать цепочку из изоляторов, как показано на рисунке (a). Её необходимо за верхний конец присоединить к опоре, а к нижнему подвесить линию электропередачи.



(a)



(b)

К задаче CN07-T4

Структура каждого изолятора показана на рисунке (b): проводящая сфера радиуса R_1 вплотную оборачивается полусферическим керамическим изолято-

ром, а сверху находится проводящий слой внутреннего радиуса R_2. Известно, что когда напряжение между двумя проводящими сферами радиусами R_1 и R_2 равно U, то на расстоянии r от центра сферы O напряжённость поля направлена радиально и равна

$$E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2}.$$

Внутренний радиус полусферической оболочки проводника равен $R_2 = 4.6$ см, а пробивная напряжённость керамического изолятора $E_k = 135$ кВ/см. Когда напряжённость в какой-либо точке изолятора превышает пробивную $E > E_k$, изолятор разрушается с потерей своих свойств.

1. Найдите значение радиуса внутренней проводящей сферы R_1, которое максимизирует наибольшее напряжение, которое может выдержать изолятор. Найдите соответствующее значение эффективного напряжения переменного тока U_e.

Цепочка, состоящая из четырёх изоляторов, подвешена к опоре ЛЭП (рисунок (а)), и между двумя проводниками каждого изолятора имеется ёмкость C_0. Проводящие сферы в каждом изоляторе имеют ёмкость C_0 относительно опоры, а наружные слои проводников имеют ёмкость C_2 относительно опоры. Действующее напряжение на ЛЭП равно U_0.

2. Нарисуйте схему, соответствующую такой электрической цепи.

Известны значения $C_0 = 70$ пФ $= 7 \cdot 10^{-11}$ Ф, $C_1 = 5$ пФ, $C_2 = 1$ пФ.

3. Найдите максимальное значение действующего напряжения U_{0max}, которое может выдержать система.

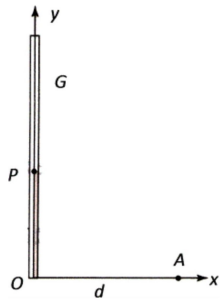
CN07-T5. На рисунке показана тонкая вертикальная стеклянная трубка G. Прямоугольная система координат xy введена, с её нижним концом в качестве начала координат O и её осью в качестве оси y. Положительный точечный заряд A величиной Q закреплён на расстоянии d от начала координат O на оси x. Частица P с зарядом q ($q > 0$) находится в трубке и может двигаться вдоль оси y без трения. Считайте, что трубка никак не влияет на силу взаимодействия между зарядами.

1. Найдите условия, при которых масса m заряженной частицы P, помещённой в трубку, удовлетворяет существованию положения равновесия в области $y > 0$.

Равновесие, достигающееся этой области $y > 0$, может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от массы частицы. Обозначим положение равновесия частицы массой m как $y(m)$.

2. Найдите интервалы значений $y(m)$, соответствующих устойчивому и неустойчивому равновесию.

Частица P массой m_1 находится в положении устойчивого равновесия и имеет координату y_1. Частице придают малое возмущение вдоль оси Oy.



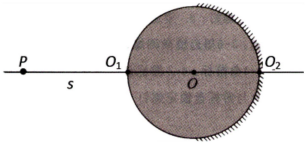
К задаче CN07-T5

3. Покажите, что её движение является гармоническим, и найдите период этого движения T.

Частица P массой m_2 находится в положении неустойчивого равновесия и имеет координату y_2. Затем частицу помещают в точку с координатой y_3, и она выходит из состояния покоя.

4. Найдите интервал значений y_3, при которых P достигнет дна стеклянной трубки (y_3 может входить в ответ неявно).

CN07-T6. Как показано на рисунке, прозрачная сфера радиуса R с показателем преломления n_g находится в воздухе с показателем преломления $n_0 = 1$. Центр сферы совпадает с точкой O оптической оси. Слева и справа сфера пересекается с осью в точках O_1 и O_2 соответственно. Правая полусфера представляет собой зеркало.



К задаче CN07-T6

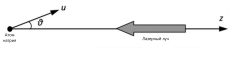
На оптической оси левее точки O_1 находится источник света P, и расстояние $PO_1 = s$. При решении задачи можно рассматривать движение света в параксиальном приближении. Отражение на границах раздела сред не учитывайте.

1. Найдите, на каком расстоянии s' от точки O_1 будет находиться изображение P'.

Пусть источник света P движется слева направо вдоль оптической оси с постоянной скоростью v.

2. Найдите скорость v' изображения P'. Найдите, при каком значении показателя преломления сферы n_g изображение P' тоже будет двигаться с постоянной скоростью.

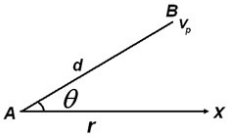
CN07-T7. Длина волны спектральной линии, которая наблюдается при переходе атомов натрия из возбуждённого состояния (обозначается $P_{\frac{3}{2}}$) в основное (обозначается $S_{\frac{1}{2}}$), равна $\lambda_0 = 588.9965$ нм. Некоторое количество газообразного натрия облучается лазерным лучом с длиной волны $\lambda = 589.0080$ нм, распространяющимся в отрицательном направлении оси z. Атомы в газе совершают нерелятивистское тепловое движение. Обозначим θ угол между направлением движения атома и положительным направлением оси z, как показано на рисунке. Найдите в каком диапазоне скоростей u атомов натрия может произойти резонансное поглощение при возможном значении угла $30° < \theta < 45°$. Найдите модуль изменения вектора скорости $|u - V|$ атома натрия вследствие резонансного поглощения. При решении задачи считайте известными массу атома натрия $M = 3.79 \cdot 10^{-26}$ кг, постоянную Планка $= 6.626069 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с и скорость света в вакууме $c = 2.997925 \cdot 10^8$ м/с.



К задаче CN07-T7

2008

CN08-T1. Во время футбольного матча нападающий передаёт мяч из точки A в направлении AX. Мяч катится по траве с постоянной скоростью V_b. Защитник находится в точке , расстояние $AB = d$. Угол $\angle BAX = \theta$ ($\theta < 90°$). В момент передачи защитник начинает бежать по прямой с постоянной скоростью V_p, чтобы перехватить мяч.



К задаче CN08-T1

При решении считайте поле достаточно большим.

1. Определите необходимое условие на v_p, при выполнении которого защитник может перехватить мяч.

2. На линии AX на расстоянии L_r от точки A находится второй нападающий. При каком условии на L_r защитник уже не сможет перехватить мяч?

3. Пусть теперь второй нападающий начинает бежать к мячу со скоростью V_r сразу после удара по нему. При каком условии на L_r защитник уже не сможет перехватить мяч?

CN08-T2. Траектории спутников можно определять с помощью наземных наблюдательных станций. Зная траектории спутников, можно определять траектории других тел в космосе и на Земле. При решении данной задачи пренебрегайте вращением Земли вокруг своей оси и Солнца.

Для начала рассмотрим способ определения положения спутника. На спутнике находятся источник электромагнитного излучения и очень точные атомные часы. Периодически спутник отправляет сигналы, содержащие информацию о времени отправления. Наземная система наблюдения за спутником состоит из нескольких станций. Они определяют положение спутника, используя информацию о показания часов спутника, содержащуюся в его сигналах.

1.1. Какое минимальное число N_1 наблюдательных станций необходимо, чтобы однозначно зафиксировать положение спутника?

Рассмотрим систему из двух наблюдательных станций, D_1 и D_2, находящихся на одном меридиане. D_1 находится в Северном полушарии на широте θ, а D_2 – в Южном полушарии на широте $-\theta$. В некоторый момент времени станции одновременно получили от спутника сигнал, имеющий задержку τ.

1.2.1. Найдите наибольшую возможную высоту H спутника над поверхностью Земли в момент отправки сигнала.

1.2.2. Найдите погрешность определения высоты ΔH, если погрешность широты θ составляет $\Delta\theta$.

1.3. Найдите погрешность определения высоты ΔH, если погрешность определения задержки времени τ составляет $\Delta\tau$.

Рассмотрим задачу предыдущего пункта при численных значениях $\theta = 45°$, $\tau = 0.10$ с и $\Delta\theta = \pm 1.0''$, $\Delta\tau = \pm 0.010$ мкс. При расчётах считайте Землю шаром с радиусом $R = 6.38 \cdot 10^3$ км, скорость света в вакууме равной $c = 2.998$ м/с, а ускорение свободного падения на поверхности Земли равным $g = 9.81$ м/с^2

2.1. Вычислите наибольшую высоту H спутника над поверхностью Земли в километрах.

2.2. Вычислите погрешность определения высоты ΔH, вызванную погрешностью определения θ.

2.3. Вычислите погрешность определения высоты ΔH, вызванную погрешностью определения τ.

Теперь рассмотрим задачу определения положения тел в пространстве с помощью спутников. Пусть сигналы спутников содержат не только время отправки, но и информацию о точном местоположении спутника в этот момент, при этом на принимающем сигналы теле часов нет.

3. Пренебрегая релятивистскими эффектами, найдите, одновременные сигналы от какого минимального числа N_2 спутников должно принимать тело для однозначного определения времени и своего положения в пространстве.

В рамках специальной теории относительности движущиеся часы отстают от покоящихся, а в рамках общей теории относительности часы отстают в области гравитационного поля. В этой части задачи учтём оба эти эффекта. В начальный момент времени часы на спутнике и на наземной станции синхронизированы. Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 2{,}00 \cdot 10^4$ км.

4.1. Чему будет равна разница в показаниях $T - t$ часов на наземной станции и на спутнике в рамках СТО через 24 ч? Для упрощения расчётов решайте задачу в приближении равномерного прямолинейного движения.

В рамках ОТО отставание часов определяется множителем $\sqrt{1 - \frac{2\phi}{c^2}}$, где ϕ – гравитационный потенциал.

4.2. Найдите разницу в показаниях $t - T$ часов на спутнике и на наземной станции в рамках ОТО через 24 ч.

CN08-T3. Холодильная машина – это устройство, которое с помощью внешней работы передаёт тепло от более холодного тела к более горячему. При этом температура более горячего тела T_1 повышается, а более холодного T_2 – понижается. Пусть машина отняла у более холодного тела количество теплоты Q и затратила на это внешнюю работу W. Тогда, согласно теореме Карно, выполняется соотношение

$$\frac{Q}{W} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

причём равенство достигается в случае идеальной холодильной машины.

Для обогрева комнаты используют идеальную холодильную машину, отбирающую тепло у внешне среды. Температура снаружи равна $5.00\ ^\circ C$, а внутри – $20.00\ ^\circ C$. Все теплопотери в комнате происходят только за счёт теплопроводности. Мощность теплопотерь задаётся выражением

$$H = \kappa \frac{\Delta T}{l} S,$$

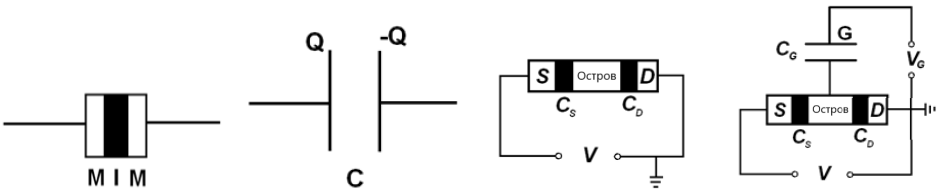
где l – толщина теплопроводящего слоя, S – его площадь, ΔT – разность температур, а κ – коэффициент теплопроводности, зависящий только от материала. Предположим, что единственным источником теплопотерь в комнате является стеклянное окно с площадью $S = 5.00$ м^2 и толщиной $l = 2.00$ мм. Коэффициент теплопроводности стекла $\kappa = 0.75$ Вт/(м $\cdot$ К).

1. Какую минимальную сумму C_{min} придётся потратить на работу идеальной холодильной машины в течение 12 ч, если тариф за электроэнергию составляет 0.5 юань/(кВт $\cdot$ ч)?

Теперь однослойное окно заменяют двухслойным. Новое окно состоит из двух стёкол толщиной $l = 2.00$ мм, между которыми находится слой воздуха толщиной $l_0 = 5.00$ мм. Коэффициент теплопроводности воздуха $\kappa = 0.025$ Вт/(м$\cdot$ К).

2. Какую сумму C'_{min} придётся потратить теперь? Какую сумму ΔC_{min} удастся сэкономить?

CN08-T4. На рисунке (a) изображено устройство, состоящее из двух металлических слоёв M, разделённых тонким изолирующим слоем I. В рамках классической физики переход электрона из одного металлического слоя в другой через изолятор невозможен, однако в рамках квантовой механики такое может происходить с некоторой вероятностью. Это называется туннельным эффектом. Так как туннельный эффект затрагивает отдельные электроны, то переносимый заряд оказывается кратен заряду электрона $-e$ ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл), потому процесс называют одноэлектронным туннелированием, а устройство MIM – туннельным переходом. В данной задаче будет рассматриваться так называемый *принцип кулоновской блокады*, влияющий на процесс одноэлектронного туннелирования. Связанная с ней область науки важна и перспективна, так как исследования кулоновской блокады позволяют создавать электронные устройства очень маленьких размеров.



К задаче CN08-T4

Чтобы объяснить принцип кулоновской блокады, рассмотрим простой пример. Представим туннельный переход как конденсатор ёмкостью C, как то показано на рисунке (b). Конденсатор будет иметь ненулевой заряд, если электронное облако незначительно сместится относительно ионов металла. Если в

результате туннелирования энергия системы увеличивается, то туннелирование не может произойти, что и называется кулоновской блокадой.

1. Определите, при каких значениях разности потенциалов между обкладками конденсатора $V_{AB} = V_A - V_B$ одноэлектронное туннелирование невозможно.

2. Определите значение ёмкости C, если одноэлектронное туннелирование становится возможным при $V_{AB} = 0.10$ мВ.

Рассмотрим теперь два туннельных перехода, которые соединили вместе и подключили к источнику постоянного напряжения V, как показано на рисунке (c). Внутренний металлический слой такой системы называется островом. На острове находятся n электронов, а переходы имеют ёмкости C_S и C_D.

3. Покажите, что выражение для энергии системы в зависимости от n имеет следующий вид:

$$U_n = \frac{(-ne)^2}{2\,(C_S + C_D)}.$$

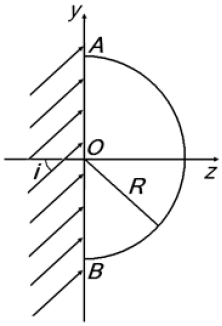
Наконец, как показано на рисунке (d), к острову присоединяют затворный электрод G с ёмкостью C_G. Полученное устройство называется *одноэлектронным транзистором*. Туннелирование между затвором и островом не происходит. Если V остаётся постоянным и небольшим по величине, то с помощью напряжения V_G можно контролировать количество электронов на острове n. Можно считать, что при включении V_G к заряду острова добавляется дополнительный виртуальный заряд $q_0 = C_G V_G$. Тогда энергия системы будет иметь вид:

$$U_n = \frac{(-ne + q_0)^2}{2C_\Sigma},$$

где $C_\Sigma = C_S + C_D + C_G$.

4. Начертите график энергии системы U_n в зависимости от напряжения затвора в диапазоне $\frac{C_G V_G}{e} \in [0;3]$ (по оси абсцисс откладывайте $C_G V_G$ в единицах e, а по оси ординат – U_n в единицах $\frac{e^2}{C_\Sigma}$). При построении графика учитывайте эффект кулоновской блокады. Отметьте значения $\frac{C_G V_G}{e}$, при которых $n = 0{,}1{,}2$ или 3.

CN08-T5. Рассмотрим прозрачный полукруглый цилиндр с радиусом R и $n = 1.50$. На рисунке показано его сечение, перпендикулярное оси цилиндра и пересекающее ось цилиндра в точке O. Широкий монохроматический параллельный пучок света падает на поверхность AB под углом i перпендикулярно к оси. Часть пучка света, при падении на AB имевшая ширину d, проходит через полуцилиндр, не испытывая полного внутреннего отражения. При решении задачи пренебрегайте многократным отражением света внутри цилиндра пренебрегите.



К задаче CN08-T5

1. Найдите максимальное и минимальное значение d_{max} и d_{min} соответственно при изменении угла падения в пределах $i \in (0°; 90°)$.

2. Найдите угол θ, под которым из точки O видна дуга, пересекаемая проходящим через цилиндр светом, в зависимости от угла падения i, и определите положение этой дуги при $i = 90°$.

CN08-T6. Согласно общей теории относительности, свет изгибается в полях тяготения массивных тел, при этом центр тяготения и траектория света лежат в одной плоскости. Ближайшую к центру точку траектории называют периастром. Известно, что траектория света симметрична относительно прямой, соединяющей центр тяготения и периастр. Введём полярные координаты (r,φ) с началом в центре тяготения таким образом, чтобы угловая координата периастра была равна $\varphi = 0$. Тогда траекторию света можно будет описать следующей формулой:

$$r = \frac{GM}{c^2} \frac{1}{a\cos\varphi + a^2\left(1 + \sin^2\varphi\right)},$$

где $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2) – гравитационная постоянная, M – масса источника тяготения, c – скорость света в вакууме, а a – некоторый параметр, такой, что $|a| \ll 1$.

Звезда находится на расстоянии $d = 80$ св. лет от Земли. В середине прямой, соединяющей центры звезды и Земли, находится белый карлик. Свет от звезды проходит мимо белого карлика, и наблюдатель на Земле видит изображение с угловым размером $\theta_S = 1.8 \cdot 10^{-7}$ рад. Найдите массу M белого карлика.

CN08-T7.1. Рассмотрим атом гелия с точки зрения модели Бора: каждый электроны движутся вокруг ядра по круговым орбитам с одинаковым радиусом, и их момент импульса равен

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},$$

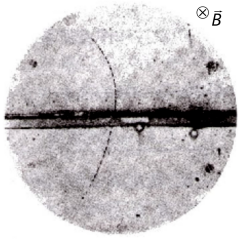
h – постоянная Планка. При решении задачи считайте известными следующие величины: $m = 0.511$ МэВ/c^2 – масса электрона, $\hbar c = 1.44$ эВ$\cdot$нм, $ke^2 = 1.44$ эВ$\cdot$нм.

1. Чему равна энергия ионизации E^+ первого уровня атома гелия? Энергия ионизации – это энергия, необходимая для перемещения одного электрона на бесконечное расстояние от ядра.

Результаты экспериментов показывают, что энергия ионизации первого уровня у атома гелия равна 24.4 эВ. Теперь учтём взаимодействие электронов в предыдущей модели. Предположим, что два электрона в силу отталкивания всегда находятся на противоположных сторонах орбиты из-за отталкивания, а ядро находится между ними.

2. Определите радиус орбиты электронов r_0, энергию основного состояния E_0 и энергию ионизации первого уровня E^+. Совпадает ли полученное значение с результатами экспериментов?

CN08-T7.2. Через диффузионную камеру прошла частица и, как показано на рисунке, оставила трек. Трек находится в плоскости фото. В середине фото находится свинцовая пластинка, направленная перпендикулярно картинной плоскости, перпендикулярно ей же направлено и существующее в камере однородное магнитное поле. Заряд частицы по модулю равен элементарному $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В нижней части фото трек имеет радиус кривизны $r_d = 210$ мм, а в верхней части – $r_u = 76$ мм. Внутри пластинки трек составляет с нормалью к ней угол $\theta = 15°$. Толщина пластинки $d = 6.00$ мм, индукция магнитного поля $B = 1.00$ Тл, масса электрона $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой сопротивления, действующей на частицу вне пластинки, пренебрегите.



К задаче CN08-T7.2

1. Определите направление движения и знак заряда частицы.

2. Определите среднюю силу сопротивления N, действующую на частицу при прохождении свинцовой пластинки.

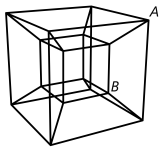
Пусть теперь на пластинку направили импульсный поток таких же частиц с потоком $j = 5.00 \cdot 10^{18}$ с$^{-1}$ и длиной импульса $\tau = 2.5$ нс.

3. Определите среднюю суммарную силу F, действующую на свинцовую пластинку, и количество теплоты Q, выделившееся при этом в ней.

2009

CN09-T1.1. Гладкая поверхность образована посредством вращения кривой $y = f(x)$ вокруг вертикальной оси Oy. Эластичное кольцо, имеющее в нерастянутом состоянии радиус a, массой m и жёсткостью k, помещается на поверхность. Оказывается, что оно может находиться горизонтально в состоянии покоя на любой высоте. Найдите уравнение кривой $y = f(x)$.

CN09-T1.2. На рисунке показан каркас из резисторов, являющийся трёхмерной проекцией четырёхмерного гиперкуба (его можно воспринимать иначе как два кубических каркаса, соответствующие вершины которых соединены между собой). Каждое ребро каркаса имеет сопротивление R. Найдите эквивалентное сопротивление R_{AB} между узлами A и B.



К задаче CN09-T1.2

CN09-T1.3. Глаза пчёл могут видеть свет со средней длиной волны 500 нм. Их фасеточные глаза состоят из 5000 глазков (омматидиев), которые плотно расположены на всей поверхности глаза. Глазки имеют довольно хрупкое строение, и на их поверхности располагается прозрачная круглая структура для сбора света – т.н. кератоскоп. Снизу прикреплен прозрачный конический кристалл, и собранный свет фокусируется на фоточувствительных клетках в вершине конуса (свет, попавший в один глазок, не проникает в другие через стенки конуса),

формируя «точку изображения» (пиксель). Пиксели всех глазков формируют полную картинку. Найдите оптимальный диаметр d кератоскопа с точностью до двух значащих цифр, если фасеточный глаз можно считать сферическим конусом со сферическим радиусом $r = 1.5$ мм

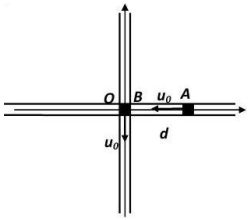
CN09-T1.4. Холостое напряжение U_0 и ток короткого замыкания I_{SC} – две важные характеристики полупроводниковых фотодиодов типа $p - n$. Выразите U_0 через I_{SC} и другие физические величины. Укажите эти величины.

CN09-T2. Движение как небесных тел, так и микроскопических систем может быть смоделировано непосредственно с помощью соответствующего программного обеспечения. Моделирование включает в себя масштабирование геометрии, но, чтобы смоделированное движение отмасштабированной системы соответствовало движению исходной, время также должно быть подвергнуто масштабированию.

1. Частица движется согласно законам Ньютоновой механики по орбите под действием силы $F(r)$, причём выполняется соотношение $F(\alpha r) = \alpha^k F(r)$, где k – некоторая константа, а r – модуль радиус-вектора частицы. Если геометрические параметры задачи отмасштабированы с параметром α, найдите, с каким параметром β необходимо при этом отмасштабировать время.

2. Покажите, что квадрат периода обращения планеты вокруг Солнца пропорционален кубу геометрических параметров орбиты.

CN09-T3. В горизонтальной плоскости лежат две перпендикулярно пересекающиеся тонкие трубки с гладкими внутренними краями, в которые помещены две частицы A и B с одинаковыми массами m и зарядами q. В исходный момент времени расстояние между частицей A и точкой пересечения трубок O равно d, а частица B находится на пересечении трубок. Скорости частиц перпендикулярны друг другу, направлены, как показано на рисунке, и равны $u_0 = \sqrt{\frac{kq^2}{md}}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 – электрическая постоянная. Найдите наименьшее расстояние r между частицами в ходе дальнейшего их движения.



К задаче CN09-T3

CN09-T4. Тепловой двигатель и тепловой насос используют термодинамические циклы для достижения противоположных целей. Двигатель забирает тепло у более нагретого тела, превращает часть теплоты в работу и передаёт тепло менее нагретому телу. Согласно второму началу термодинамики, независимо от того, является тепловая машина двигателем или тепловым насосом, если её рабочее тело контактирует только с двумя резервуарами с температурами

T_1 и T_2 и получает теплоты Q_1 и Q_2 соответственно, выполняется неравенство

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0,$$

где знак + означает, что рабочее тело получает теплоту, а − – что её отдаёт.

Изначально для обогрева комнаты использовалась теплота водонагревателя с температурой T_0, причём температура внутри помещения оставалась постоянной, равной T_1 и большей, чем температура T_2 снаружи. Чтобы оптимизировать энергозатраты, предлагается модифицировать схему, добавив в неё тепловой двигатель и тепловой насос. Найдите теоретический предел уменьшения $\frac{Q_0 - Q_0'}{Q_0}$ потребления энергии при переходе от прямого нагрева к модифицированной схеме.

CN09-T5. Магнитное поле влияет на движение электронов, и в его присутствии может оказаться, что связь между током и напряжением отличается от привычного закона Ома. Рассмотрим двумерный электронный газ с концентрацией n на плоскости xOy. В плоскости существует однородное электрическое поле $\vec{E} = E\vec{i}$ ($\vec{i}$ – единичный вектор в направлении оси Ox) и однородное магнитное поле $\vec{B} = B\vec{k}$ ($\vec{k}$ – единичный вектор в направлении оси Oz). Известно что средняя сила сопротивления, действующая на электроны вследствие рассеяния, пропорциональна их средней скорости v и может быть характеризована параметром τ и равна $-\frac{mv}{\tau}$, где m – масса электрона. Найдите плотности тока (токи на единицу длины, перпендикулярной их направлению) вдоль направлений Ox и Oy – j_x и j_y в установившемся режиме, выразив их через модуль заряда электрона e, n, E, τ и ω, где $\omega = \frac{eB}{m}$.

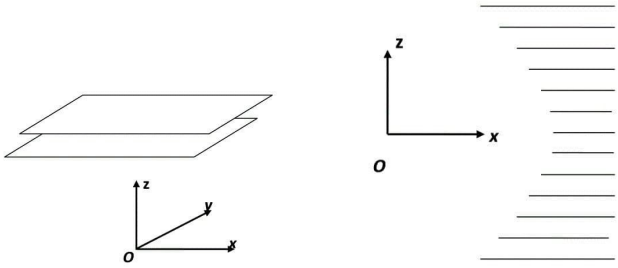
CN09-T6. Как показано на рисунке (а), две параллельных пластины состоят из идеальных проводников, расстояние между ними d, и они простираются параллельно в направлении Oy. Между пластинами в направлении, перпендикулярном Oy, распространяется электромагнитная волна в виде бегущей волны в положительном направлении оси Ox. Поле волны может быть записано как

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} - \omega t\right),$$

ω – циклическая частота, t – время, а λ_x и λ_z – некоторые параметры. С помощью такой системы можно собрать эквивалент антенны, передающей микроволновое излучение. Использование её вместо традиционной крупногабаритной параболической антенны может позволить сэкономить средства, затрачиваемые на её построение.

1. Покажите, что λ_z может принимать лишь значения

$$\lambda_z = \frac{2d}{m},\ m \in \mathbb{N}.$$



(a) (b)

К задаче CN09-T6

2. Найдите λ_x при $m = 1$.

Множество идеально проводящих пластин с одинаковым расстоянием между соседними пластинами расположено симметрично относительно одномерного источника волн, простирающегося бесконечно вдоль направления Oy. Правые концы пластин выровнены друг относительно друга, а длины пластин подчиняются некоторому выражению (система показана в разрезе в картинной плоскости на рисунке (b)), так что на правом конце получается распространяющаяся параллельно Ox плоская волна. Считайте, что $m = 1$, а расстояние между источником волн и левым концом средней пластины равно L.

3. Найдите выражение, задающее огибающую левых концов пластин системы в плоскости xOz.

CN09-T7. В классической модели атома водорода электрон движется вокруг ядра по круговой орбите, и действующая на электрон центростремительная сила возникает из-за электрического поля ядра. Однако, классическая теория электромагнетизма предсказывает, что электрон вследствие ускорения должен излучать электромагнитные волны, мощность которых равна

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0},$$

где a – ускорение электрона, c – скорость света в вакууме, $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона (формула Лармора). Энергия связи в атома водорода равна $E_H = 13.6$ эВ, масса покоя электрона $m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31}$ кг.

1. Пренебрегая релятивистскими эффектами, найдите время жизни атома водорода τ в классической теории.

Электромагнитная волна, испущенная точечной частицей при ускорении, имеет одно очень важное применение. Синхротронное излучение, широко применяемое в современных научных исследованиях, есть не что иное как излучение электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, в

магнитном поле, из-за которого они и испытывают ускорение. Основным элементом синхротрона является кольцо, в котором содержатся электроны, луч из которых с большой эффективностью создаёт синхротронное излучение при пролёте через отклоняющие магниты.

Шанхайский синхротрон – один из трёх мощных синхротронов, построенных в Китае в последние годы. Считайте известными следующие его параметры: энергия электрона в кольце $E = 3.50$ ГэВ, ток, создаваемый движением электронного луча $I = 300$ мА, периметр кольца $L = 432$ м, количество участков, снабжённых отклоняющими магнитами, $n = 20$, индукция магнитного поля в этих участках $B = 1.27$ Тл. Учтите, что, когда скорость электрона не мала по сравнению со скоростью света, второй закон Ньютона всё так же выполняется, однако формула Лармора будет иметь вид

$$P = \gamma^4 \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0},$$

где $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$, где E – полная энергия электрона, а $m_0 c^2$ – его энергия покоя.

2. Найдите мощность излучения P_0 на каждом из участков, снабжённых отклоняющими магнитами.

Так как скорость электронов близка к скорости света, их синхротронное излучение имеет заметную интенсивность лишь в узком конусе, который направлен по касательной к орбите электрона, и половина угла раствора которого равна $\frac{1}{\gamma}$. Отсюда видно, что чем выше будет энергия электронов, тем более точно направленным будет излучение.

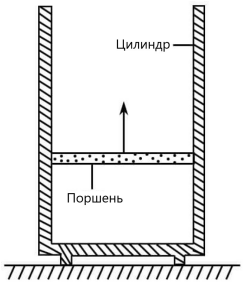
3. Найдите длительность ΔT светового импульса отдельного электрона, воспринимаемого неподвижным наблюдателем в некоторой точке вдоль направления распространения излучения.

2010

CN10-T1.1. Тонкая однородная круговая резинка постоянной толщины имеет массу M, жёсткость k и радиус R в свободном состоянии. Резинку подбрасывают в воздух, потому влиянием гравитации можно пренебречь. В процессе своего движения резинка сохраняет форму окружности и стационарно вращается вокруг оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно её плоскости, с угловой скоростью ω. Найдите установившийся радиус резинки R'.

CN10-T1.2. Птица свистит с частотой f. Если при этом максимальная скорость этой птицы равна u, а скорость звука равна V, то в каком диапазоне лежит частота свиста f', которую будет воспринимать наблюдатель, вследствие эффекта Доплера?

CN10-T1.3. Как показано на рисунке, под поршнем в вертикальном теплоизолированном цилиндре массой M и площадью внутреннего сечения A находится некоторое количество идеального газа при температуре T_0. Поршень не проводит тепло, а его массой и трением о стенки цилиндра можно пренебречь. Атмосферное давление равно P_0, а ускорение свободного падения – g. Поршень начинают медленно поднимать, и в тот момент, когда поршень достигает верха цилиндра, последний отрывается от земли. Показатель адиабаты газа равен γ. Найдите температуру газа T, когда поршень достигнет верха цилиндра.



К задаче CN10-T1.3

CN10-T1.4. В электронных микроскопах наблюдаемый объект облучается не световым лучом, а пучком электронов. Чтобы различать структуры размером $1.0 \cdot 10^{-10}$ м (масштабы атома), длина волны электрона должна не превышать этот размер. Известны масса электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6.7 \cdot 10^{-34}$ Дж·с и скорость света в вакууме $c = 3.0 \cdot 10^8$ м/с. Найдите, до какой скорости v_1 для этого должен быть разогнан электрон. Найдите также, до какой скорости v_2 нужно разогнать электрон, чтобы различить структуры размером $1.0 \cdot 10^{-10}$ м, и каким должно быть разгоняющее напряжение U.

CN10-T2. В данной задаче рассмотрим конвейерную ленту, используемую для транспортировки грузов. Лента движется с постоянной скоростью v. Сбоку к ленте примыкает наклонная плоскость, по которой на ленту из состояния покоя скатывается брусок. Брусок можно считать точечной массой. Высота наклонной плоскости $h = 2.0$ м, её длина $L = 4.0$ м, ширина конвейерной ленты $d = 2.0$ м, а её скорость $v = 3.0$ м/с. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и бруском равен $\mu_1 = 0.30$. Скорость, которую при скатывании приобретает брусок, перпендикулярна скорости ленты. Считайте, что в месте контакта наклонной плоскости ленты существует небольшое закругление, так что модуль скорости бруска при прохождении его не меняется. Ускорение свободного падения $g = 9.80$ м/с^2.

1. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ_2 между бруском и конвейерной лентой, при котором брусок не упадёт с ленты после скатывания на неё.

Предположим, что лента приводится в движение двигателем постоянного тока с устройством для стабилизации скорости. Двигатель подключен к источнику тока с ЭДС $E = 200$ В и пренебрежимым внутренним сопротивлением. Внутреннее сопротивление двигателя равно $R = 10$ Ом, рабочий ток при холостой работе ленты равен $I_0 = 2.0$ А, а количество транспортируемого груза в единицу времени равно $\eta = \frac{640}{9}$ кг/с.

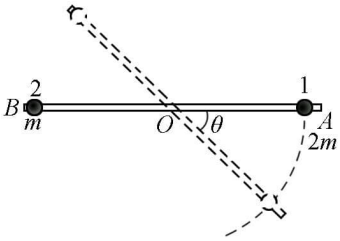
2. Чему при этом равен протекающий через двигатель ток I? Считайте, что все энергетические потери системы не зависят от потока груза, кроме потерь

на трение между грузами и лентой и теплом, выделяющимся на внутреннем сопротивлении мотора.

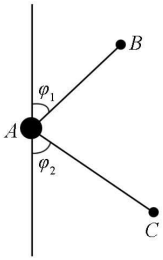
CN10-T3. Как показано на рисунке, твёрдый и тонкий стержень пренебрежимо малой массы может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг гладкой горизонтальной оси проходящей через находящуюся на стержне точку O. Две маленьких бусинки 1 и 2, которые можно считать точечными массами, надеты на стержень, и коэффициент трения между ними и стержнем равен $\mu = \frac{5\sqrt{3}}{6}$. Массы бусинок равны $2m$ и m соответственно. В начальный момент времени стержень закреплён в горизонтальном положении, а бусинки находятся близко к его концам (соответственно A и B). Стержень отпускают.

1. Найдите, при каком угле θ_1 между стержнем горизонталью бусинка 1 сорвётся со стержня.

2. Найдите, при каком угле θ_2 между стержнем горизонталью бусинка 2 сорвётся со стержня.



К задаче CN10-T3



К задаче CN10-T4

CN10-T4. На рисунке показаны три частицы A, B и C. Массы B и C равны и много меньше массы A. Между A и B существует взаимное притяжение, как и между A и C, при этом B и C отталкиваются друг от друга. Частицы совершают движение под действием этих сил. При соответствующих значениях сил возможно такое движение, при котором относительные положения частиц неизменны, они образуют плоскость и равномерно вращаются вокруг оси, лежащей в этой плоскости. Из-за большой массы частицы A ось, проходящая через неё, может считаться неподвижной. Угол φ_1 между осью и AB не равен углу φ_2 между осью и AC, и $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. Сила притяжения между A и B равна $f_{AB} = k \cdot AB^a$, а между A и C – $f_{AC} = k \cdot AC^a$, где AB – расстояние между A и B, AC – между A и C, а k – некоторый коэффициент пропорциональности. Найдите, в каком диапазоне значений a возможно описанное в задаче движение.

CN10-T5. От антарктического ледового шельфа отломился огромный айсберг, который затем под действием океанического течения приплыл к некоторому городу. Один человек в городе придумал схему, позволяющую вырабатывать с помощью айсберга электричество. Она выглядит следующим образом:

1) сначала некоторое количество воздуха из окружающей среды необходимо поместить в контейнер с регулируемым объёмом, после чего привести его в контакт с айсбергом, позволяя воздуху внутри достичь его температуры при постоянном давлении;

2) удалить контейнер от айсберга, и, зафиксировав его объём, дать воздуху нагреться обратно до температуры окружающей среды;

3) зафиксировав объём контейнера, начать выпускать из него воздух, используя его энергию для работы устройства, вырабатывающего электричество.

Цикл можно продолжать, пока весь айсберг не растает. Температура окружающей среды известна и равна $T_a = 293$ K, температура айсберга равна температуре плавления льда $T_1 = 273$ K, а доступная масса айсберга $m = 1.0 \cdot 10^{11}$ кг.

Чтобы определить, какое количество электроэнергии можно выработать, создатель схемы использует следующие приближения и данные:

1) Воздух можно считать идеальным газом.

2) Теплота плавления льда равна $L = 3.34 \cdot 10^5$ Дж/кг, и вода, образовавшаяся в результате таяния льда, больше не используется.

3) Внутренняя энергия воздуха $U = 2.5pV$, где p и V – его давление и объём соответственно.

4) Теплообмен между контейнером и окружающей средой происходит достаточно быстро, чтобы считать температуру воздуха постоянной всё время, пока его выпускают из контейнера на шаге (c).

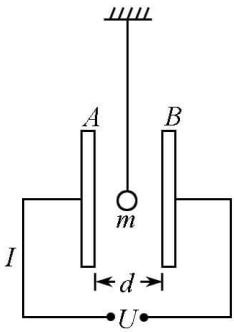
5) Выход воздуха из контейнера может быть разделён на серию небольших процессов. Объём выходящего воздуха в каждом из них равен u, и u много меньше объёма контейнера. В каждом процессе выходящий газ ускоряется под действием разности давлений внутри и снаружи, приобретая на выходе кинетическую энергию ΔE. Несмотря на изменение объёма газа в процессе разгона, считайте, что давление в контейнере всё ещё однородно, а атмосферное давление не меняется.

6) Только 45% кинетической энергии газа ΔE могут быть переработаны в электричество.

7) При $x \ll 1$ пользуйтесь приближением $\ln(1 + x) \approx x$.

Найдите, какое количество электроэнергии E_1 может быть получено из айсберга по предложенной схеме.

CN10-T6. Как показано на рисунке, две больших металлических пластины и расположены вертикально и параллельно друг другу, расстояние между ними d. К пластинам приложено постоянное напряжение U. Мячик для настольного тенниса массой m с металлическим покрытием подвешен между пластинами. Мячик слегка толкают в направлении, перпендикулярном пластинам. После столкновения с одной пластиной мячик возвращается, затем сталкивается с другой и т.д. Считайте, что столкновения шарика с пластинами неупругие с коэффициентом



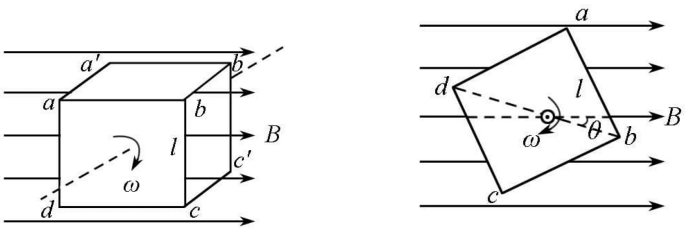
К задаче CN10-T6

восстановления (отношением модулей скорости мячика после столкновения и до него) e, а время контакта между шариком и пластинами очень мало, однако его достаточно для установления статического равновесия. В состоянии электростатического равновесия заряд q на пластинах связан с приложенным к ним напряжением как $q = C_0U$, где C_0 – константа. Размеры мячика много меньше расстояния между пластинами, а заряд на нём не влияет на распределение зарядов на пластинах. Нить, на которой подвешен мячик, достаточно длинная, поэтому можно считать, что скорость мячика всегда направлена по горизонтали. Кинетической энергией при первом столкновении и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1. Найдите максимальное значение кинетической энергии шарика E_{kmax} в процессе дальнейшего движения.

2. Найдите среднее значение тока I через электрическую цепь через достаточно долгое время.

CN10-T7. Как показано на рисунке (a), двенадцать однородных проводящих стержней соединены в твёрдый куб с длиной стороны L, и сопротивление каждого из стержней равно R. Куб равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости $abcd$. Угловая скорость вращения куба равна ω, а индукция магнитного поля равна B, и поле перпендикулярно оси вращения куба. Самоиндукцией куба пренебрегите. В некоторый момент времени куб находится в положении, показанном на рисунке (b) (угол между диагональю BD и направлением магнитного поля равен θ).



(a) (b)

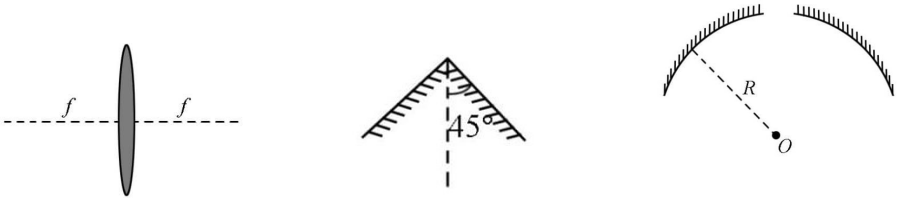
К задаче CN10-T7

1. Найдите токи I_{ba}, I_{ad}, I_{bc} и I_{cd}, протекающие в это время через стержни ba, ad, bc и cd соответственно.

2. Найдите, какой момент сил M должен действовать на куб, чтобы скорость его вращения оставалась постоянной.

CN10-T8. Полым лазерным лучом называют цилиндрический луч с нулевой интенсивностью в направлении распространения в его центре. Из-за сво-

его строения такой луч может «запирать» в своём центре некоторые частицы, что позволяет точно контролировать положение наночастиц, живых клеток и т.д. Полые лазеры активно используются в биологии, лазерной резке, атомном охлаждении и прочих областях. Основной метод создания полых лазерных лучей предполагает прохождение обычного лазерного луча через специальную оптическую систему. Основными компонентами системы являются: собирающая линза с фокусным расстоянием f, коническое зеркало с углом раствора 90° и сферическое зеркало радиуса R с круглым отверстием посередине (рисунки (a), (b) и (c) соответственно).



(a) (b) (c)

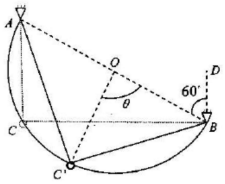
К задаче CN10-T8

1. Как из данных компонент собрать оптическую систему, которая из очень тонкого лазерного луча делает полый луч радиуса r? Нарисуйте путь лучей света в этой системе.

2. Найдите расстояние x между вершиной конического зеркала и центром сферического зеркала в системе.

2011

CN11-T1. Гладкий полукруглый направляющий рельс закреплён в вертикальной плоскости в точках A и B, его диаметр $AB = 2R$, угол между AB и вертикалью равен 60°. На рельс надето небольшое гладкое кольцо массой m, через которое проходит легкий, тонкий и гладкий шнур с коэффициентом жесткости k, два конца которого закреплены в точках A и B, как показано на рисунке. Когда кольцо находится в точке C непосредственно под точкой A, шнур не натянут. Кольцо отпускают из точки C без начальной скорости, и оно перемещается в точку C' за время t. Угол между $C'O$ и OB равен θ, ускорение свободного падения равно g.

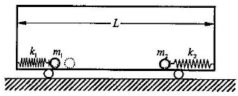


К задаче CN11-T1

1. Найдите, с какой силой направляющий рельс действует на кольцо, если $\theta = 90°$.

2. Найдите, с какой силой направляющий рельс действует на кольцо, если $\theta = 30°$.

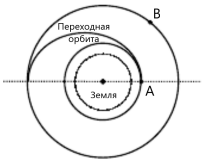
CN11-T2. Как показано на рисунке, на ровной поверхности находится небольшая тележка массой M и длиной L. Две пружины закреплены на её концах рядом с дном, они находятся на одном прямой и имеют начальные длины и коэффициенты жёсткости l_1 и l_2, k_1 и k_2 соответственно. Маленькие шарики массой m_1 и m_2 размещены на концах пружин и не связаны с ними.



К задаче CN11-T2

Вначале шарик 1 сжимает пружину 1 и удерживается в этом состоянии, пока шарик 2 закреплён на полу, а расстояние между ним и правым концом тележки равно длине недеформированной пружины 2. Шарик 1 освобождают без начальной скорости. Когда длина пружины 1 оказывается равной её недеформированной длине, шарик 2 также освобождают. Шарики абсолютно неупруго сталкиваются за пренебрежимо малое время. Все поверхности гладкие. За время от отпускания шарика 1 до максимального сжатия пружины 2 тележка переместилась на расстояние l_3. Найдите начальную длину l пружины 1 и максимальное сжатие Δl пружины 2 впоследствии.

CN11-T3. Космическая станция A движется по окружности вокруг Земли с радиусом орбиты $r_A = 6.73 \cdot 10^6$ м. Искусственный же спутник B движется по окружности в той же плоскости с радиусом орбиты $r_B = 3r_A 2$, оба A и B вращаются против часовой стрелки. Со станции на спутник необходимо запустить корабль. Разгон и замедление корабля происходят за пренебрежимо малое время, и для экономии топлива корабль движется по эллиптической орбите, вращаясь в том же направлении, что и A и B. Как показано на рисунке, такая эллиптическая орбита лежит в плоскости орбит станции и спутника, и на орбитах же станции и спутника лежат соответственно её перигей и апогей. Известно, что радиус Земли равен $R_e = 6.38 \cdot 10^6$ м, а ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g = 9.80$ м/с^2.



К задаче CN11-T3

1. Найдите приращение скорости Δv_A, необходимое для того, чтобы корабль покинул станцию A и вышел на переходную орбиту, и приращение скорости Δv_B, которое требуется кораблю в апогее, чтобы обездвижить себя относительно спутника B.

2. Найдите минимальное время Δt_m, необходимое кораблю от запуска до возвращения на станцию, и минимальный угол $\Delta\varphi_{Am}$, на который за это время повернётся станция вокруг Земли.

CN11-T4. Идеальный газ молярной массы μ течёт слева направо через длинную прямую горизонтальную теплоизолированную трубу с гладкими стенками. Площадь её поперечного сечения равна S, внутренняя энергия одного моля газа с абсолютной температурой T равна $\frac{5}{2}RT$, где R — универсальная газовая постоянная.

1. Как показано на рисунке 1, в середине трубы размещён нагревательный элемент, имеющий постоянную мощность W. Считайте сопротивление элемента

воздушному потоку пренебрежимо малым, а сам поток на концах трубы стационарным и однородным. На левом конце трубы температура газа равна T_0, давление P_0, а скоростью потока v_0. Найдите температуру T_1 газа на правом конце трубы, если его давление там равно P_1.

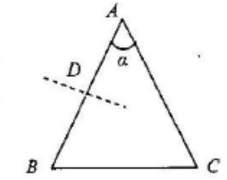


(a) (b)

К задаче CN11-T4

2. Пусть теперь в середине трубы находится пористая прослойка, как показано на рисунке 2, и поток в трубе стационарный и однородный. Температура, давление и скорость течения газа слева от прослойки равны T_0, P_0 и v_0 соответственно, а давление справа от прослойки равно P_2. Найдите скорость v_2 течения газа справа от прослойки, если газ проходит через неё без теплообмена.

CN11-T5. Как показано на рисунке, угол α при вершине A призмы ABC меньше 90°. Свет может падать на поверхность AB в точке D под произвольным углом, а после преломления падает на поверхность AC, причём может и полностью внутренне от неё отразиться. Известно, что угол полного внутреннего отражения света от AC равен Θ ($\Theta < 45°$), и AC достаточно длинная.

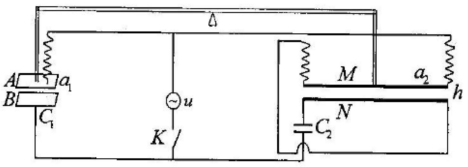


К задаче CN11-T5

1. Найдите диапазон значений угла α, при которых может произойти полное внутреннее отражение, если свет падает на AB только снизу от нормали.

2. Найдите диапазон значений угла α, при которых может произойти полное внутреннее отражение, если свет падает на AB только сверху от нормали.

CN11-T6. Электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q, имеет напряжённость $E = k_e \frac{q}{r^2}$ на расстоянии r, где k_e – постоянная. Магнитное поле, создаваемое проходящим через прямой провод током i, имеет индукцию $B = k_m \frac{2i}{r}$ на расстоянии r, много меньшем длины провода, где k_m – также постоянная.



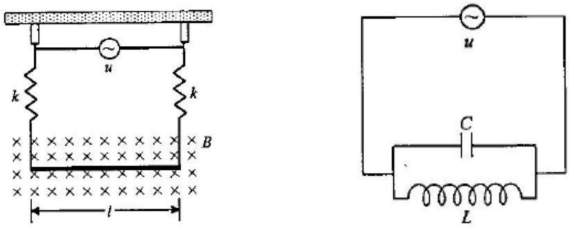
К задаче CN11-T6

Величина $\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}$ может быть измерена с помощью показанного на рисунке

устройства через электрические и магнитные поля низкой частоты ($\sim 10^2$ Гц). A и B представляют собой горизонтальные пластины конденсатора с ёмкостью C_1. Пластины квадратные и имеют длину стороны l, сильно превышающую расстояние между ними. B закреплена, а A подвешена за крюк на один из концов рычажных весов. M и N представляют собой два горизонтальных параллельных длинных тонких металлических стержня длиной a_2 и расстоянием h между ними ($h \ll a_2$). N закреплен, а M подвешен за крюк на другой конец весов. В цепи есть также ключ K и конденсатор ёмкостью C_2. Зависимость напряжения u на источнике питания от времени задаётся уравнением $u = U_0 \cos 2\pi f t$, где f — частота источника. До замыкания ключа K весы были сбалансированы, а после замыкания потеряли равновесие. Изменяя частоту источника питания, равновесие можно восстановить. Выведите выражение для $\sqrt{\frac{k_e}{k_m}}$.

Подсказка: Равновесие необходимо рассматривать при усреднении по быстрым колебаниям напряжения. Учитывайте только магнитные поля, создаваемые в двойной линии стержней, пренебрегая влиянием проводов. Краевыми эффектами электрического и магнитного полей также пренебрегите.

CN11-T7. Как показано на рисунке (a), две одинаковые лёгкие металлические пружины с коэффициентами жесткости k вертикально подвешены к потолку. Своими нижними концами они соединены с концами однородного жесткого металлического стержня массой m и длиной l. Стержень помещают в однородное магнитное поле B, направленное перпендикулярно плоскости рисунка. Стержень, пружины и источник питания переменного тока u образуют замкнутую цепь. Сопротивлением стержня и пружин можно пренебречь, магнитное поле, создаваемое током в контуре, намного слабее внешнего поля B. На рисунке (b) катушка индуктивности L и конденсатор ёмкости C подключены параллельно к такому же источнику u. Выразите L и C через известные параметры системы, показанной на рисунке (a), если в обеих схемах ток через источник в любой момент времени будет одинаковым.

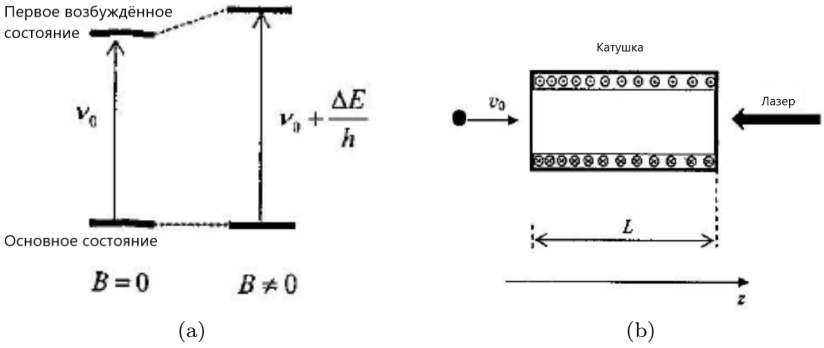


(a) (b)

К задаче CN11-T7

CN11-T8. Стивен Чу и ещё трое других ученых в 1997 году получили Нобелевскую премию по физике за разработку метода магнитооптического захвата нейтральных атомов. Основные аспекты магнитооптического захвата будут рассмотрены в этой задаче.

Примечание: Важно понимать, что физические характеристики рассматриваемых атомов на самом деле представляют собой результат усреднения по большому числу атомов или по нескольких процессам для одного атома.



К задаче CN11-T8

Как показано на рисунке (a) слева, неподвижный атом в основном состоянии резонансно поглощает фотон с частотой ν_0 и переходит в первое возбужденное состояние. Однако из-за теплового движения атомы не находятся в состоянии покоя. Предположим, что некий атом движется со скоростью v_0 в направлении, противоположном направлению распространения лазерного луча.

1. При какой частоте лазера ν теперь возможно резонансное поглощение? Насколько изменится скорость атома после поглощения фотона? ($h\nu_0 \ll mc^2$, m – масса атома, $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с)

Резонансное поглощение фотона атомом происходит мгновенно, но перешедший в возбуждённое состояние атом обычно возвращается в основное состояние не сразу, а лишь через определённый промежуток времени, который называется временем жизни атома в возбуждённом состоянии. Известно, что среднее время жизни атома в первом возбуждённом состоянии равно τ.

Примечание: атом имеет одинаковую вероятность испустить фотон в любое направление при переходе обратно в основное состояние. Из-за очень высокой частоты столкновений среднее изменение импульса атома в этом процессе равно нулю.

2. Пусть атом находится в тех же условиях, что и в п. 1, и каждый раз испытывает резонансное поглощение сразу же после того, как возвращается в основное состояние. Найдите среднее ускорение атома.

Предположим, что атом движется в положительном направлении оси Oz с начальной скоростью v_0, а лазерный луч направлен в противоположную сторону, вызывая резонансное поглощение. Чтобы уменьшить кинетическую энергию

атома до нуля за счёт последовательных поглощений при постоянной частоте лазера, атом можно пропустить через неоднородное магнитное поле $B(z)$, как показано на рисунке (b). Из-за взаимодействия атомов с магнитным полем энергия их возбуждённого состояния изменяется, как показано на рисунке (a) справа. Когда индукция магнитного поля равна B, энергия возбуждения атома изменяется как $E \to E + \Delta E$, где $\Delta E = \mu B$, μ — известная константа.

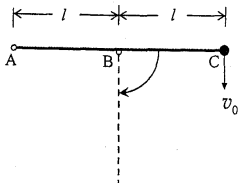
3. Найдите зависимость $B(z)$.

Начальная скорость исследуемого атома лития с массой $m = 1.0 \cdot 10^{-26}$ кг равна $v_0 = 1.2 \cdot 10^3$ м/с, частота резонансного поглощения в состоянии покоя составляет $\nu_0 = 4.5 \cdot 10^{14}$ Гц, а среднее время жизни атома в первом возбуждённом состоянии равно $\tau = 5.3 \cdot 10^{-8}$ с.

4. Найдите минимальную длину z, которую должна иметь область магнитного поля, через которую проходит атом, описанный в п. 3, чтобы его кинетическая энергия уменьшилась до нуля.

2012

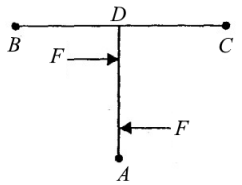
CN12-T1. В гладкую вертикальную стену на одном уровне вбиты два гвоздя A и B, как показано на рисунке. Резинка с коэффициентом жёсткости k и длиной l в ненатянутом состоянии закреплена за один конец к гвоздю A. На другом её конце закреплён шарик массой $m = \frac{kl}{4g}$, где g – ускорение свободного падения. Гвозди и шарик можно считать точечными, все столкновения шарика неупругие и происходят без слипания объектов.



К задаче CN12-T1

В начальный момент времени шарик находится на одном уровне с гвоздями на расстоянии $2l$ от точки A. Гвоздь B находится непосредственно под резинкой и гладко с ней соприкасается. Начальная скорость шарика равна $v_0 = \frac{\sqrt{gl}}{2}$ и направлена вертикально вниз. Найдите выражение для моментов времени t_n, в которые вертикальная составляющая скорости шарика в n-ный раз становится равной нулю.

CN12-T2. Три одинаковых маленьких шарика массой m закреплены в вершинах A, B и C Т-образного каркаса из лёгких жёстких стержней, как показано на рисунке, и $AD = BD = CD = a$, $AD \perp DC$. Шарики можно рассматривать как материальные точки. Система находится на горизонтальном столе, причём шарики касаются стола, а каркас нет. Коэффициенты трения покоя и скольжения между столом и шариками равны между собой и равны μ, силы, действующие на на систему, равны по модулю, противоположны по направлению и приложены на расстояниях $\frac{a}{4}$ и $\frac{3a}{4}$ от точки A к стержню AD.



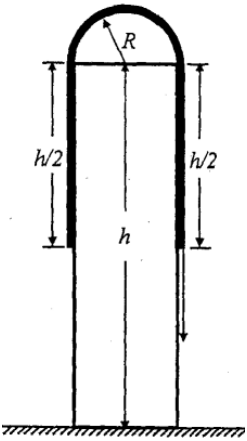
К задаче CN12-T2

1. Покажите, что при таком воздействии на систему при выходе её из состояния покоя силы трения между шариками и столом достигают своего мак-

симально возможного значения.

2. Если система может вращаться вокруг точки G, лежащей на стержне AD, найдите расстояние $x = AG$ такое, чтобы сила F, необходимая для вывода системы из состояния покоя, была минимальна, и найдите эту силу.

CN12-T3. На ровной горизонтальной поверхности находится жёсткий цилиндр массой m, коэффициент трения между ним и поверхностью равен μ. Вид на цилиндр спереди показан на рисунке, нижняя часть представляет собой прямоугольник высотой h, а верхняя – полукруг радиусом R. Сверху на цилиндр помещена однородная цепь массы m, причём оба её конца находятся на расстоянии $\frac{h}{2}$ от поверхности. Поверхность цилиндра считайте гладкой.



К задаче CN12-T3

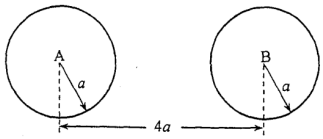
В начальный момент времени цепь была слегка выведена из равновесия и начала скользить по правой стороне цилиндра.

1. Найдите взаимосвязь между параметрами системы, если цилиндр начинает скользить по поверхности до того, как цепь её коснётся.

2. Найдите взаимосвязь между параметрами системы, если цилиндр начинает падать до того, как цепь коснётся поверхности.

3. Найдите взаимосвязь между параметрами системы, если цилиндр начинает скользить по поверхности, а потом падать до того, как цепь её коснётся.

CN12-T4. Как показано на рисунке, на горизонтальном гладком круглом столе расположены два диэлектрических шара с однородным распределением массы и заряда. Радиусы шаров равны a, масса и заряд шара A равны m и Q соответственно, а масса и заряд шара B равны $4m$ и $-4Q$ соответственно. В начальный момент времени расстояние между центрами шаров равно $4a$, и каждый из них имеет определённую начальную скорость.



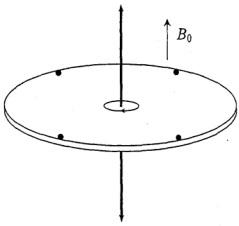
К задаче CN12-T4

1. Найдите направления и значения начальных скоростей v_{A0} и v_{B0} каждого из шаров, при которых можно минимизировать площадь поверхности стола, при которой шары бы с него не слетали.

2. Найдите соответствующий минимальный радиус стола R_{min}.

Примечание: Считайте, что поляризации материалов не происходит. Сила электростатического взаимодействия двух однородно заряженных шаров равна силе взаимодействия соответствующих точечных зарядов, находящихся в их центрах. Электрическая постоянная равна k_e.

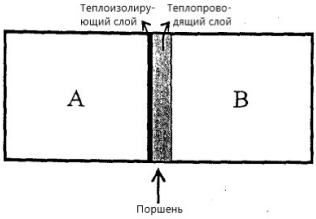
CN12-T5. Как показано на рисунке, лёгкий и тонкий изолирующий горизонтальный диск радиусом R может вращаться без трения вокруг проходящей через его центр вертикальной оси. На поверхности диска соосно ему закреплена лёгкая круглая катушка радиусом a ($a \ll R$). На краю диска симметрично закреплены 4 положительно заряженных металлических шарика массами и зарядами m и q соответственно. Вся система находится направленном вертикально вверх однородном магнитном поле B_0.



К задаче CN12-T5

В начальный момент времени диск неподвижен, а через катушку по часовой стрелке течёт ток I. Если отключить ток в катушке, диск начнёт вращаться. Найдите, с какой силой f при этом диск будет действовать на каждый шарик в горизонтальном направлении при установившемся вращении? Считайте, что шарики можно рассматривать как материальные точки и что самоиндукцией катушки и магнитным полем движущихся шариков можно пренебречь. Также считайте известным, что для описанная в задаче катушка создаётся на расстоянии r ($r \gg a$) от себя в плоскости диска направленное вертикально вверх магнитное поле $B = k_m \frac{2\pi a^2 I}{r^3}$, где k_m – магнитная постоянная. Электрическая постоянная равна k_e.

CN12-T6. Как показано на рисунке, изолированный жёсткий горизонтальный цилиндр разделён непроницаемым поршнем на две равные камеры A и B. К поршню прикреплён слой материала с пренебрежимо малой теплоёмкостью и большой теплопроводностью и ненулевым трением о стенку цилиндра, а со стороны камеры A – тонкий слой теплоизолирующего материала. Первоначально камеры заполнены одним и тем же многоатомным идеальным газом при температуре T_0. Давление газа в A в 4 раза превышает давление в B. После отпускания поршня последний из-за трения медленно перемещается, пока газ не приходит в равновесие, причём трения покоя в равновесии нет. Известные характеристики газа: при повышении температуры до критической T_d ($T_d > T_0$) молекулы газа могут диссоциировать, разлагаясь на две одинаковые многоатомные молекулы. Степень диссоциации даётся выражением $\alpha = \beta\,(T - T_d)$, $\beta = 2.00 T_0^{-1}$. Диссоциация обратима, необходимая для неё энергия на моль диссоциирующего газа равна $\Phi = \frac{c_v T_0}{10}$.



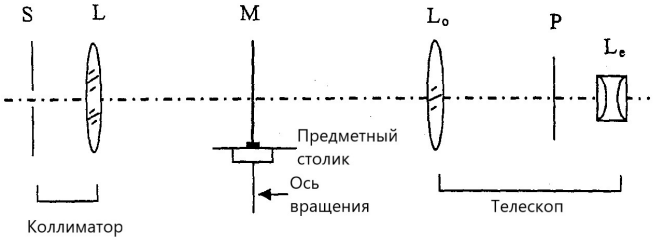
К задаче CN12-T6

1. Найдите возможные значения T_d, если бы в результаты описанного в задаче процесса диссоциация газа не происходила.

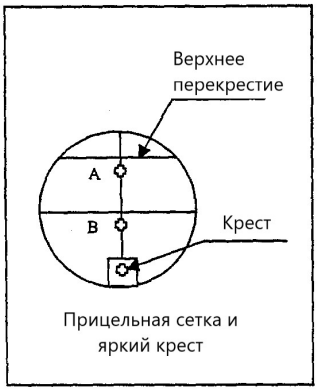
2. Найдите значение T_d, если бы в конце процесса оказалось, что степень диссоциации $\alpha = 10\%$

CN12-T7. На рисунке (а) показана система, состоящая из коллиматора,

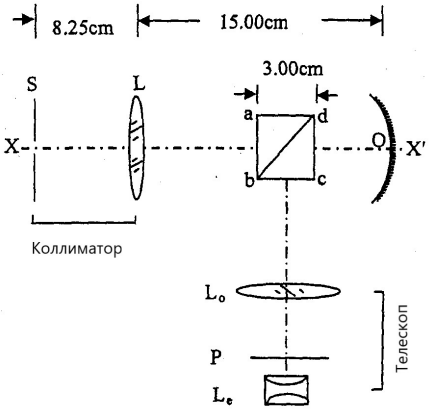
предметного столика и телескопа. Фокусное расстояние линзы L_0 объектива телескопа равно 16.00 см. В фокальной плоскости P помещена сетка с перекрестием и ярким крестом, как показано на рисунке (b). На предметный столик помещают двустороннее плоское зеркало M. При наблюдении через окуляр телескопа L_e изображение креста видно чётко после прохождения через L_0, отражения от M и возвращения обратно. На прицельной сетке крест виден в точке A, расстояние до верхнего перекрестия равно 5.2 мм. Предметный столик поворачивают на 180°, и теперь крест виден в точке B, расстояние до верхнего перекрестия равно 18.8 мм.



(a)



(b)



(c)

К задаче CN12-T7

1.1. Найдите, чему равен угол α между оптической осью телескопа и горизонталью в радианах. В дальнейшем считайте систему откалиброванной на $\alpha = 0$.

Коллиматор состоит из узкой щели S и выпуклой линзы L. Зеркало M убирают, а щель S освещают натриевой лампой. Меняя положение S, можно добиться того, чтобы щель была чётко видна в окуляр телескопа при расстоянии $SL = 8.25$ см.

1.2. Найдите фокусное расстояние f линзы L коллиматора в сантиметрах.

Теперь плоскость предметного столика перпендикулярна оси его вращения, на него помещен светоделитель шириной и высотой 3.00 см и показателем преломления 1.52. Расстояние от его центра до вогнутого сферического зеркала равно 15.00 см, и поверхность светоделителя перпендикулярна оси XX', как показано на рисунке (c). Аналогично, когда расстояние SL становится равным 8.75 см, щель становится чётко видима в окуляр телескопа.

2. Найдите радиус кривизны R сферического зеркала.

CN12-T8. При решении задач по физике микромира мы часто сталкиваемся с фундаментальными константами, например, массами элементарных частиц и постоянной Планка. В СИ значения этих величин очень малы, что зачастую создаёт неудобства при расчётах. Решением проблемы является атомная система единиц, в которой масса электрона m_e принимается за единичную, единицей момента импульса является $\hbar$, единицей заряда служит $\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$, $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ остаётся той же. Иные единицы измерения можно получить из физических формул. Используя соотношения модели атома водорода Бора, выразите через константы k_e, m_e, e и $\hbar$ единицы измерения длины L_{au}, времени T_{au} и энергии E_{au} в атомной системе единиц.

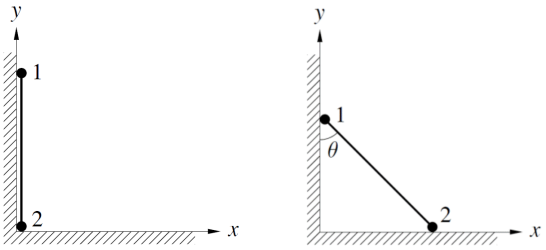
2013

CN13-T1. Мяч массой m бросают на высоте h от горизонтальной поверхности с начальной скоростью $\sqrt{2gh}$, направленной горизонтально, причём сопротивлением воздуха можно пренебречь. При отскоках мяча горизонтальная скорость не меняется, а вертикальная каждый раз уменьшается в одинаковое количество раз. Оказалось, что общая площадь под траекторией мяча с момента первого отскока оказалась равна $\frac{8}{21}h^2$. Найдите суммарный импульс p, полученный мячом в моменты отскоков от земли.

Примечание: Площадь под одной дугой траектории мяча, отскакивающего от горизонтальной поверхности, равна произведению максимальной высоты его подъёма и дальности полёта с коэффициентом $\frac{2}{3}$.

CN13-T2. Как показано на рисунке, шары 1 и 2 массой m соединены жёстким лёгким стержнем длины l, и вся система прислонена к углу стены так, что шар 1 находится сверху. Считайте, что стена и земля гладкие. В начальный

момент времени шару 2 придают малую скорость вправо. Найдите, при каком значении угла θ шар 1 впервые оторвётся от стенки.



К задаче CN13-T2

CN13-T3. В космосе находится аппарат, который удерживается над земным экватором на высоте $L = \alpha R_e$ и остаётся неподвижным относительно наземной станции. Здесь R_e – радиус Земли, α – постоянная, причём $\alpha > \alpha_m$, где

$$\alpha_m = \left(\frac{GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/3} - 1,$$

M_e и ω_e – масса Земли и угловая скорость её вращения, G – гравитационная постоянная. Предположим, что между аппаратом и станцией существует жёсткая однородная труба массы m_p, служащая для транспортировки материалов. Нижний конец трубы закреплён и перпендикулярен поверхности земли. При транспортировке материал движется по трубе вверх с относительно небольшой скоростью. При решении задачи учитывайте только вращение Земли вокруг своей оси. Общая масса транспортируемого материала равна m и мала по сравнению с массой трубы.

1. Какую работу W_L совершают сила притяжения и центробежная сила в процессе транспортировки материала?

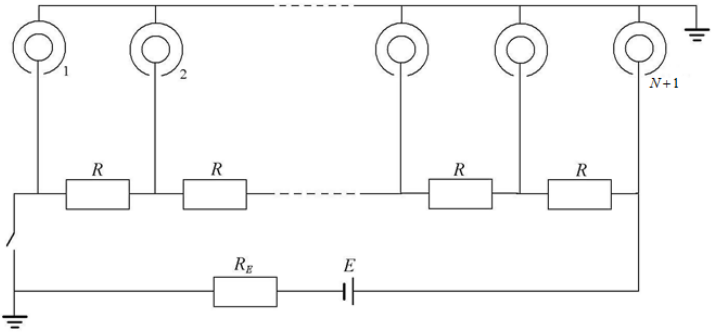
2. Какую минимальную работу W_{min} совершает внешняя сила тяги в процессе транспортировки материала?

3. При какой высоте L_0 аппарата над Землёй работа W_L окажется равной нулю?

4. Сила тяги, удерживающая аппарат на орбите, подбирается так, чтобы сила реакции, с которой он действует на пустую трубу, равнялась нулю. Если аппарат находится на высоте L, найдите величину и направление силы F_{base}, с которой на трубу необходимо действовать со стороны наземной станции, в трёх случаях: $L > L_0$, $L = L_0$ и $\alpha_m R_e < L < L_0$.

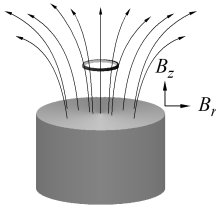
CN13-T4. Показанная на рисунке схема состоит из источника постоянного напряжения с внутренним сопротивлением R_e и ЭДС E, N резисторов сопротивления R и $N+1$ одинаковых проводящих шариков радиуса r, подключенных

к цепи с помощью тонких проводов. Для устранения влияния шариков друг на друга каждый их них окружён тонкой проводящей заземлённой оболочкой радиуса $r_0 > r$. Изначально шарики не заряжены и пронумерованы слева направо от 1 до $N + 1$. После замыкания ключа на шариках накапливается общий заряд Q. Электрическая постоянная равна k. Выразите радиус r заземляющих оболочек шариков через остальные параметры системы.



К задаче CN13-T4

CN13-T5. Как показано на рисунке, тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом r_0, массой m и индуктивностью L находится над расположенным вертикально цилиндрическим магнитом и соосно с ним. Магнитное поле вблизи кольца цилиндрически симметрично, компоненты магнитного поля равны $B_z = B_0(1 - 2\alpha z)$ и $B_r = B_0\alpha r$, где α – положительная константа, а z и r – аксиальная и радиальная координаты соответственно. В начальный момент времени $t = 0$ координаты центра кольца равны $z = 0$ и $r = 0$, а ток в кольце равен I_0 и течёт против часовой стрелки, если смотреть сверху. Кольцо отпускают, и оно начинает двигаться вниз, оставаясь симметричным относительно оси Oz. В силу сверхпроводимости поток через кольцо в процессе движения остаётся неизменным.



К задаче CN13-T5

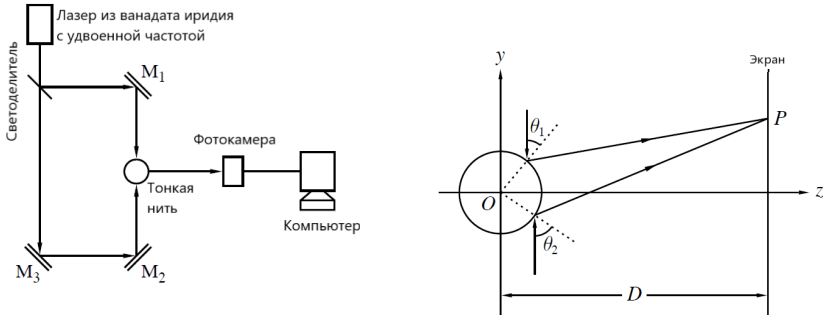
1. Как движется кольцо в дальнейшем? Найдите зависимость координаты $z(t)$ его центра от времени.

2. Найдите зависимость тока в кольце $I(t)$ от времени.

CN13-T6. Тонкий металлический диск толщиной t вывешен на воздухе, имеющем температуру $T = 300.0$ K. Верхняя поверхность диска освещается солнечными лучами, из-за чего диск нагревается: температура его нижней поверхности $T_b = 340.0$ K, а температура верхней $T_t = 360.0$ K. Считайте, что температура воздуха вблизи диска не меняется, а энергия, которую из-за теплообмена теряет диск с единицы поверхности в единицу времени, пропорциональна разности температур его поверхности и воздуха. Найдите, какие температуры T_t' и

T_b' имели бы верхняя и нижняя поверхность диска соответственно, если бы его толщина была равна $2t$.

CN13-T7. На рисунке (a) показано устройство для наблюдения двулучевой интерферометрии при рассеянии на нитях субмиллиметрового диаметра. M_1, M_2 и M_3 – зеркала, а фотокамера представляет собой матрицу CCD. Луч лазера из ванадата иридия делится светоделителем пополам. Один из полученных лучей отражается от M_1 и падает на нить сверху, второй отражается от M_3 и M_2 и падает на неё снизу. На рисунке (b) показаны пути лучей света, θ_1 и θ_2 – углы падения лучей на нить, D – расстояние от оси нити до наблюдательного экрана (то есть матрицы фотокамеры), а P – точка пересечения отражённых лучей на экране. Декартова система координат введена в соответствии с рисунком: центр лежит на оси нити в плоскости лазерного луча, Oz перпендикулярна экрану, Oy вертикальна, Ox дополняет их до правой тройки. Длина волны света лазера равна λ, а расстояние между интерференционными полосами на экране равно a. Размытием изображения из-за конечности размеров нити пренебречь.



(a) (b)

К задаче CN13-T7

1. Так как размеры установки малы, то свет лазера падает на нить под углом, близким к 45°. Тонкие лучи под близкими углами отражаются и попадают на экран, при этом падающие на верхнюю и нижнюю поверхность луч создают два мнимых изображения. Найдите положения (y_1,z_1) и (y_2,z_2) этих изображений. Считайте, что при $x \sim 0$ верно, что $\sin x \sim x$ и $\cos x \sim 1$.

2. Найдите диаметр нити d.

CN13-T8. Пока Ли стоял на земле, его одноклассники Чжан и Ван двигались относительно него со скоростью v вправо и влево соответственно. Когда Чжан и Ван встретились, все трое установили свои часы на ноль. Когда расстояние между Чжаном и Ваном было равно L с системе отсчёта Ли, Чжан хлопнул в ладоши. Известно, что относительная скорость между Чжаном и Ваном равна $v_r = \frac{2\beta c}{1+\beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, а c – скорость света в вакууме.

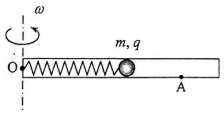
1. Найдите показания T часов Чжана, когда тот хлопнул в ладоши.

2. В системе отсчёта Вана, когда Чжан первый раз хлопнул в ладоши, Ван тоже хлопнул в ладоши в первый раз. В системе отсчёта Чжана, когда Ван хлопнул в ладоши в первый раз, Чжан хлопнул в ладоши второй раз, и т.д. Найдите расстояние d_n между Чжаном и Ваном в системе отсчёта Ли после n-ного хлопка Чжана.

3. В какие моменты времени t_n Чжан и Ван хлопали в системе отсчёта Ли. Укажите, в каком порядке следуют эти моменты времени.

2014

CN14-T1. На рисунке показан принцип работы устройства по измерению угловой скорости. В точке O находится положительный заряд величины Q. Легкая изолирующая тонкая трубка с гладкими стенками может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Также трубке находится переключатель A, расстояние от оси вращения до него равно $OA = L$. Легкая изолирующая пружина, имеющая длину $L/4$ в ненапряжённом состоянии, закреплена одним концом в точке O, а другой её конец соединён с маленьким шариком с массой m и положительным зарядом q. Вначале система находится в равновесии. Трубка начинает вращаться вокруг неподвижной оси под действием внешнего крутящего момента, шарик может свободно перемещаться вдоль трубки. Угловая скорость трубки ω постепенно увеличивается, пока шарик не достигает положения A. Шарик сбалансирован относительно трубки, когда срабатывает переключатель. После этого внешний крутящий момент мгновенно становится равным нулю, а заряд в точке O меняется на отрицательный той же величины $-Q$. Угловая скорость вращения может быть определена путем измерения положения равновесия шарика B относительно трубки. Расстояние OB оказалось равным $L/2$.

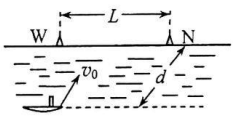


К задаче CN14-T1

1. Найдите жёсткость пружины k_0 и угловую скорость вращения трубки ω_B, когда шарик находится в точке B.

2. Возможны ли малые радиальные колебания шарика относительно трубки вблизи положения равновесия B? Если да, то найдите период этих колебаний.

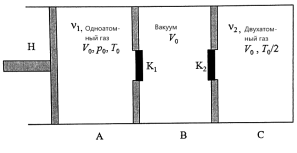
CN14-T2. Система нападения с несколькими боеголовками является эффективным средством противодействия системе противоракетной обороны. Как показано на рисунке, пусть на берегу есть две военные цели W и N, расстояние между ними L. На расстоянии d от берега параллельно ему курсирует подводная лодка. После получения команды подводная лодка всплывает на поверхность и запускает бомбу, которую можно разделить на три боеголовки. Скорость пуска равна v_0 и намного превышает скорость движения подводной лодки. Бомба



К задаче CN14-T2

разделяется на три части, когда достигает наивысшей точки траектории. Каждая из боеголовок имеет одинаковую массу, их скорость во время разделения равна v, и они разделяются в одной горизонтальной плоскости. Две из трёх боеголовок используются для поражения целей. Если две боеголовки могут поразить цели W и N соответственно, определите положение подводной лодки во время запуска бомбы, определите направление запуска и укажите условия, при которых такой запуск возможен.

CN14-T3. Как показано на рисунке, теплоизолированный сосуд разделен на три камеры A, B и C равного объема V_0 двумя неподвижными теплоизолированными перегородками, в которых имеются клапаны K_1 и K_2. $V_A = V_B = V_C = V_0$. Левый торец сосуда закрыт теплоизолированным поршнем H. Левая камера A содержит $\nu_1 = 1$ моль одноатомного газа с давлением P_0 и температурой T_0, средняя камера B откачана до состояния вакуума, правая камера C содержит $\nu_2 = 2$ моля двухатомного газа при температуре $T_c = 0.5T_0$. В начальный момент времени клапаны K_1 и K_2 закрыты. Все процессы в системе происходят без теплообмена с внешней средой.



К задаче CN14-T3

1. Клапан K_1 открывают, позволяя газу из A свободно расшириться в вакуум B. После установления равновесия газ квазистатически сжимают с помощью поршня H, уменьшая объем камеры A на 30% ($V'_A = 0.70V_0$). Найдите температуру и давление рассматриваемой порции газа до и после процесса сжатия.

2. Держа клапан K_1 открытым, открывают также и клапан K_2, позволяя двум газам в сосуде смешаться и прийти в равновесие. Найдите давление и температуру смеси.

3. Держа клапаны K_1 и K_2 открытыми, объём камеры A квазистатически увеличивают с помощью поршня H до исходного объема $V''_A = V_0$. Найдите давление и температуру смеси газов после расширения.

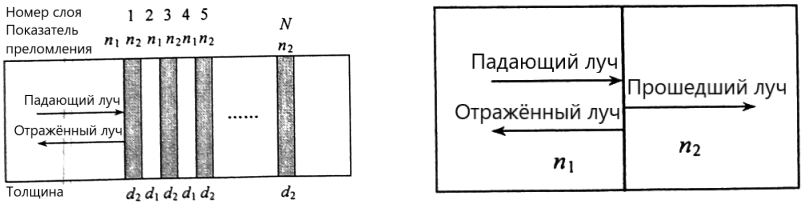
Подсказка: Во всех вышеупомянутых процессах газ можно рассматривать как идеальный. Результат расчета может содержать экспоненциальные или дробные выражения. Согласно второму началу термодинамики, когда система, состоящая из идеального газа из в результате обратимого (квазистатического) адиабатического процесса переходит из состояния (p_i,T_i,V_i) в состояние (p_f,T_f,V_f), справедливо уравнение:

$$(\Delta S_1)_{if} = \nu_1 C_{V_1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \nu_1 R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right),$$

где ν_1 — число молей газа, C_{V_1} — его молярная теплоемкость при постоянном объеме, R - универсальная газовая постоянная. Когда же система состоит из двух идеальных газов, предыдущее уравнение записывается в виде

$$(\Delta S_1)_{if} + (\Delta S_2)_{if} = 0.$$

CN14-T4. Волоконная брэгговская решётка — это оптическое устройство, в котором периодически меняется показатель преломления среды. Пусть показатель преломления материала сердцевины волоконной решётки равен $n_1 = 1.51$, а показатель преломления изменённых частей $n_2 = 1.55$. Слои с показателями преломления n_2 и n_1 имеют толщины d_2 и d_1 соответственно и располагаются поочерёдно, общее число слоёв равно N. Продольный разрез решётки показан на рисунке (a). В процессе проектирования устройств обычно учитывают только однократное отражение от каждой границы раздела слоев и игнорируют поглощение в среде.



(a) (b)

К задаче CN14-T4

Пусть длина волны используемого света в вакууме составляет $\lambda = 1.06$ мкм. Какими должны быть минимальные толщины слоёв d_1 и d_2, чтобы отражённый свет конструктивно интерферировал? Каким должно быть при этом наименьшее число N слоёв, чтобы коэффициент отражения достигал 8%?

Подсказка: Как показано на рисунке (b), когда свет падает перпендикулярно из среды с показателем преломления n_1 в среду с n_2, для отражённого и прошедшего лучей справедливы формулы:

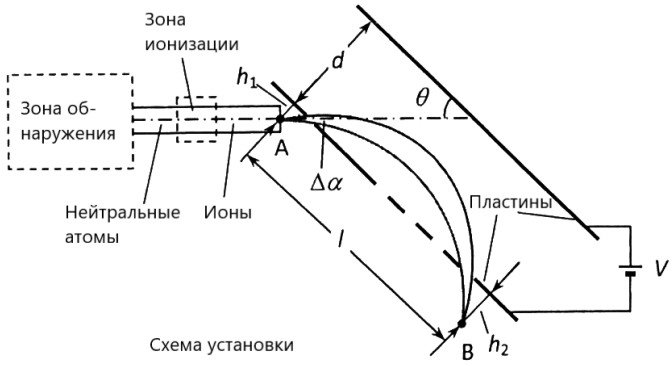
$$\frac{\text{амплитуда отраженного луча}}{\text{амплитуда падающего луча}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{\text{амплитуда прошедшего луча}}{\text{амплитуда падающего луча}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\text{коэффициент отражения} = \left(\frac{\text{амплитуда отраженного луча}}{\text{амплитуда падающего луча}}\right)^2$$

CN14-T5. Анализатор нейтральных частиц — важное устройство для измерения распределения температуры и энергии быстрых ионов в исследованиях ядерного синтеза. Принцип работы анализатора показан на рисунке. Измеряя энергию и импульс нейтральных атомов с высокой энергией (200 эВ $\sim$ 30 кэВ) (они легко проникают в электромагнитную область в зоне обнаружения), можно узнать природу частиц, которые до этого с ними столкнулись. Чтобы измерить

энергетическое распределение нейтральных атомов, последние сначала ионизируются, а затем ионный пучок под углом θ попадает в область между заряженными пластинами, расстояние между которыми равно d, а напряжение равно V, а затем покидает эту область после отклонения электрическим полем. Если рассматриваемый ион не касается верхней пластины, то его энергия определяется путем измерения расстояния l, которое преодолел ион вдоль пластины от отверстия A до отверстия B. Предположим, что расстояние между A и нижней пластиной равно h_1, расстояние между B и нижней пластиной равно h_2, заряд иона равен q.



К задаче CN14-T5

1. Выведите соотношение между l и энергией E иона и найдите, на какое максимальное расстояние отдалится ион от пластины в процессе движения.

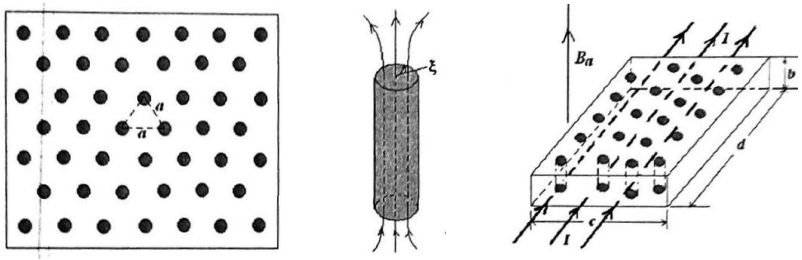
2. Ионный пучок обычно имеет угол расходимости $\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha \ll \theta$). Для повышения точности измерения необходимо, чтобы ионы, имеющие ту же энергию E, но направление движения которых изменяется в пределах $\Delta\alpha$, попадали в то же малое отверстие B. Найдите выражение для h_2. Найдите, как связаны при этом E и l.

3. Чтобы достичь наилучшего разрешения по энергиям ионов, ионы с энергиями, равными верхней границе измеряемого диапазона, должны пройти максимально возможное для оборудования расстояние l_{max}. В то же время расстояние d между пластинами должно быть как можно меньше, чтобы минимизировать объём установки. Используя результат пункта 2, выведите выражение для d. Найдите d, если $\theta = 30°$.

4. Предложите конструкцию устройства для того, чтобы различать массы этих ионов, схематично нарисуйте его и найдите выражения для масс ионов.

CN14-T6. Важным применением сверхпроводников является намотка магнитов с сильным магнитным полем, в которых используется провод, сделанный из сверхпроводника второго рода. Если такой сверхпроводник поместить во внешнее магнитное поле с величиной магнитной индукции B_a, силовые ли-

нии этого поля будут проникать в сверхпроводник в виде квантов (иначе называемых вихревыми линиями) магнитного потока, образующих правильную треугольную форму. Такая сетка вихрей магнитного потока в сверхпроводнике показана на рисунке (a).



(a) (b) (c)

К задаче CN14-T6

Квант магнитного потока показан на рисунке (b). Область с радиусом ξ вокруг его центра находится в нормальном состоянии (т.е. её сопротивление не равно нулю), а окружение вихря находится в сверхпроводящем состоянии (т.е. его сопротивление равно нулю). Переносимый при этом магнитный поток равен $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15}$ Вт (наименьшая единица магнитного потока).

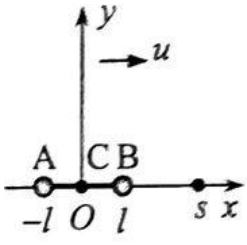
1. Найдите расстояние a между вихревыми линиями магнитного потока, если $B_a = 5 \times 10^{-2}$ Тл.

2. С ростом B_a плотность вихревых линий магнитного потока увеличивается. Когда B_a достигает определенного критического значения B_{c2}, сверхпроводник полностью утрачивает свои свойства. Предположим, что радиус вихря магнитного потока равен $\xi = 5 \times 10^{-9}$ м. Найдите соответствующее критическое значение магнитного поля B_{c2}.

3. Когда ток I проходит через идеальный сверхпроводник второго рода, вихри магнитного потока будут перемещаться под действием силы тока, создавая сопротивление (также называемое сопротивлением магнитному потоку) и приводя к джоулевым потерям, что препятствует работе сверхпроводящих магнитов. Связь между скоростью v устойчивого движения вихря магнитного потока, движущей силой f_A и B_a на единицу объема вихря магнитного потока равна $f_A = \eta \frac{B_a}{\Phi_0} v$, где η — коэффициент пропорциональности. Приложенное магнитное поле, направление тока и размер сверхпроводящего материала показан на рисунке (c). Укажите направление движения вихрей магнитного потока и найдите удельное сопротивление, создаваемое движением вихрей магнитного потока, используя B_a, Φ_0, η и размеры сверхпроводника b, c, d.

4. Чтобы сделать сверхпроводящие материалы действительно практичными, необходимо устранить сопротивление магнитному потоку. Предложите свой вариант решения этой задачи.

CN14-T7. На рисунке показана система материальных точек, представляющая собой два маленьких шара A и B с массой m (оба могут рассматриваться как точечные массы), закреплённых на обоих концах жёсткого легкого тонкого стержня с центром в C и длиной $2l$. Координатная плоскость Oxy вертикальна, Ox направлена горизонтально вправо, а Oy — вертикально вверх. Вначале центр C системы материальных точек находится в начале координат O, и систему бросают вертикально вверх с начальной скоростью v_0. В процессе подъёма линия ACB всегда остаётся горизонтальной. Скорость ветра постоянна, равна $\vec{u}$ и сонаправлена с осью X. Сила сопротивления воздуха движущегося шара пропорциональна относительной скорости воздуха v, а направление противоположно, то есть $\vec{f} = -k\vec{v}$, где k — положительная постоянная. Когда система поднимается в наивысшую точку, оказывается, что небольшой камень (рассматриваемый как точечная масса) с массой m_1 и скоростью u_1, движущийся в положительном направлении оси Oy, сталкивается с шаром A. Столкновение является абсолютно упругим и происходит за пренебрежимо малое время. Через некоторое время после этого точка C возвращается на тот же уровень, что и в начале броска вверх. В этот момент её координата по оси Ox равна s, а время от подбрасывания до падения оказалось равным T. Количество оборотов системы материальных точек равно n.



К задаче CN14-T7

1. Найдите угловую скорость ω_0 системы сразу после столкновения с камнем и соотношение между n и угловой скоростью ω_s системы, когда она находится в точке s.

2. Найдите, как связана с n, T и s работа W_f, совершённая сопротивлением воздуха за всё время от начала броска до падения в точку s.

CN14-T8. Солнце — это звезда, на которой мы живем. Его основным компонентом является водород, который нагревается, сжимаясь под действием собственных гравитационных сил. Когда его температура достигает определенного уровня, нейтральные атомы ионизируются и превращаются в плазму, состоящую из протонов и электронов. В центральной области температура, достигающая 1.5×10^7 K, и плотность более 1.6×10^5 кг/м^3 вызывают термоядерный синтез и выделение огромной энергии, тем самым противодействуя собственному гравитационному сжатию, чтобы прийти в равновесие и стать звездой. Основные термоядерные реакции, происходящие внутри Солнца:

$$^1H + {}^1H \to D + e^+ + \nu_e$$

$$D + {}^1H \to {}^3He + x$$

$$^3He + {}^3He \to {}^4He + {}^1H + {}^1H$$

Так как первая реакция определяется слабым взаимодействием, то её вероятность очень мала, что приводит к медленному выделению энергии. Продукт

реакции позитрон $^+$ аннигилирует с электроном $^-$ с выделением гамма-лучей, а именно:

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$$

Численные значения: массы протона ^1H, дейтерия D, гелия-3 ^3He и электрона e^- равны соответственно 938.27, 1875.61, 2808.38, 3727.36 и 0.51 МэВ/с^2 (погрешность 0.01 МэВ]/с^2), c — скорость света в вакууме, масса нейтрино ν_e меньше 3 эВ/с^2. Постоянная Планка $h = 6.626{\times}10^{-34}$ Дж·с, $c = 3.0{\times}10^8$ м/с, постоянная Больцмана $k = 1.381 \times 10^{-23}$ Дж/К, элементарный заряд $= 1.602 \times 10^{-19}$ Кл.

1. Используя модель идеального газа, оцените среднюю кинетическую энергию различных частиц в тепловом равновесии и давление в центральной области Солнца (в качестве единиц измерения используйте эВ и атм соответственно).

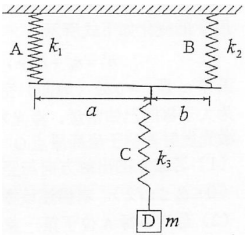
2. Какая из частиц α, β, γ, p, n обозначена как x формулах реакций? Вычислите кинетическую энергию и импульс этой частицы. Можно ли найти систему отсчета, в которой кинетическая энергия частицы x равна нулю?

3. Укажите диапазон кинетической энергии каждого из продуктов первой реакции.

4. Когда γ-луч (фотон) , возникший в результате аннигиляции, достигает поверхности Солнца после многократного комптоновского рассеяния, его длина волны приблизительно равна 5.4×10^{-7} м. Пусть энергия падающего фотона равна E_0, энергия фотона после одного рассеяния E, а угол рассеяния фотона ϕ (угол между импульсами фотона до и после рассеяния). Выразите E через E_0 и ϕ. Найдите ϕ, предполагая, что на пути от центра Солнца к поверхности фотон претерпел комптоновское рассеяние 10^{26} раз, и угол каждого рассеяния один и тот же.

2015

CN15-T1. Жёсткий невесомый стержень подвешен к потолку за свои концы двумя невесомыми пружинами A и B, а груз D соединён со стержнем невесомой пружиной C. Коэффициенты жёсткости A, B и C равны k_1, k_2 и k_3 соответственно, масса груза равна m. Расстояния от точки крепления C до точек крепления A и B равны a и b соответственно. Когда вся система находится в равновесии, стержень практически горизонтален, как показано на рисунке. Блок D может колебаться по вертикали. Пружины A и B считаются всегда вертикальными, сопротивление воздуха не учитывается.



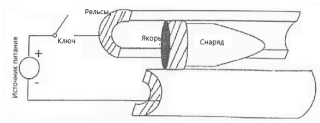
К задаче CN15-T1

1. Найдите удлинение каждой пружины, когда система находится в положении равновесия.

2. Найдите частоту малых вертикальных колебаний груза D.

3. Как должны быть связаны a и b , чтобы частота колебаний груза была наибольшей? Найдите соответствующее значение частоты.

CN15-T2. Как показано на рисунке, рельсотрон состоит из двух прямых параллельно закрепленных длинных жестких металлических рельсов, мощного источника питания, якоря и снаряда. Ток вытекает из источника, проходит через рельс, якорь и другой рельс, образуя замкнутый контур для создания в пространстве магнитного поля. Якорь ускоряется под действием силы Ампера и толкает снаряд вперед. Масса якоря равна m_s, масса снаряда m_a, сопротивление на единицу длины рельса равно R'_r, индуктивность на единицу длины рельса равна L'_r, сопротивление якоря равно R_s, его индуктивность L_s, сопротивление проводов равно R_0, их индуктивность L_0. Сопротивление воздуха и трение между рельсами и якорем можно не учитывать.



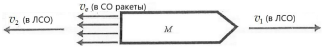
К задаче CN15-T2

1. Изобразите эквивалентную схему рельсотрона и составьте уравнение для этой схемы уравнение.

2. Найдите, как связаны между собой ускорение снаряда и ток в контуре.

3. Пусть ток в контуре постоянен и равен I, суммарная масса якоря и снаряда $m_s + m_a = 0.50$ кг, длина рельсов равна $x_{sm} = 500$ м, индуктивности на единицу длины рельса $L'_r = 1.0$ мкГн/м. Если вначале снаряд неподвижен, а скорость его вылета $v_{sm} = 3{,}0 \times 10^3$ м/с, найдите ток I в контуре и полное время разгона снаряда τ.

CN15-T3. Российский учёный К. Э. Циолковский упростил модель запуска ракеты и вывел самое первое уравнение её движения, которое послужило теоретической основой современного ракетостроения. Упрощённо модель можно описать так: изначально ракета находится в определённой точке лабораторной системы отсчёта, внешними силами, действующими на ракету можно пренебречь, начальная масса покоя ракеты (включая топливо) равна M_i. Пуск происходит в момент $t = 0$. Ракета выпускает газ влево, скорость газа относительно ракеты постоянна и равна v_e. При этом в ЛСО ракета движется вправо со скоростью v_1, а скорость выпускаемого газа в ЛСО равна v_2, как показано на рисунке. Масса ракеты по окончании работы равна M.



К задаче CN15-T3

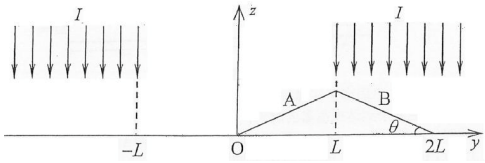
1. В приближении Ньютоновой механики выведите соотношение между скоростью ракеты v_1 и отношением масс $\frac{M}{M_i}$.

2. В рамках релятивистской механики выведите соотношение между скоростью ракеты v_1 и отношением масс $\frac{M}{M_i}$.

3. Когда $v_1 \ll c$, найдите разницу между этими двумя результатами с точностью до членов порядка $\left(\frac{v_1}{c}\right)^2$.

CN15-T4. Когда свет отражается от поверхности объекта или поглощается ею, фотоны передают свой импульс объекту, поэтому свет создаёт давление на объект. На основании этого эффекта работает так называемый оптический пинцет, позволяющий производить точные манипуляции с очень маленькими

частицами. Пусть лазер создаёт во всей области $|y| \geq L$ поле однородной интенсивности, распространяющееся в отрицательном направлении оси Oz, и его интенсивность (световая энергия, проходящая через единицу площади поперечного сечения в единицу времени) равна I. В области $|y| < L$ поле полностью отсутствует. Соответствующее поперечное сечение показано на рисунке. Небольшая призма с плотностью ρ (её поперечное сечение — равнобедренный треугольник с длиной основания $2L$ (от $y = 0$ до $y = 2L$) и углом при основании θ) помещена на гладкую горизонтальную плоскость xOy, а её стороны A и B покрыты составом, полностью отражающим свет. Изначально призма находится в состоянии покоя, как показано на рисунке. Считайте, что угол отражения света равен углу падения, а частота фотонов при отражении остается неизменной.



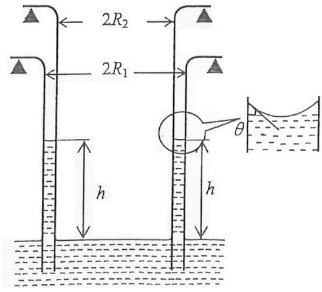
К задаче CN15-T4

1.1. Запишите уравнение движения призмы в данном поле.

1.2. Найдите время t, необходимое призме, чтобы переместиться на расстояние $3L/2$ от исходного положения в отрицательном направлении оси Oy.

2. На самом деле, из-за движения призмы частота отражённых фотонов будет немного изменяться. Когда призма совершает описанное в п. 1, качественно сравните частоту отражённых и падающих фотонов и изменение её со временем.

CN15-T5. Как показано на рисунке, два коаксиальных цилиндра с закреплёнными верхними концами — один с внешним радиусом R_2, другой с внутренним радиусом R_1, R_2 немного меньше R_1 — не касаясь дна вертикально погружены в воду в большом контейнере. Пусть угол смачивания между водой и стеклом равен θ (см. увеличенный вид на рисунке). Коэффициент поверхностного натяжения воды равен α, ускорения свободного падения на поверхности земли равно g.



К задаче CN15-T5

1. При капиллярном эффекте изменение потенциальной энергии, вызванное им, можно также рассматривать как работу, совершаемую силой поверхностного натяжения жидкости на границе трёх фаз при изменении уровня жидкости. Покажите, принимая уровень воды в большом контейнере за нуль потенциальной энергии, что, когда высота подъёма воды из-за капиллярного эффекта равна h, его потенциальная энергия равна $E_s(h) = -2\pi\alpha\cos\theta(R_1 + R_2)h$.

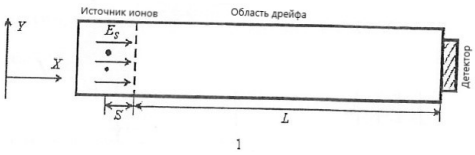
2. Найдите теплоту, выделяемую системой, когда вода поднимается из-за капиллярного эффекта.

3. Пусть теперь этот эксперимент провели на самолёте, летящем на высоте

более 10 км, за время достаточно малое, чтобы считать его движущимся по прямой с постоянной скоростью. Тепло, выделенное при этом системой, равно Q. Предполагая, что коэффициент поверхностного натяжения и угол смачивания воды в самолёте те же, что и на земле, и пренебрегая вращением Земли, найдите, на какой высоте летит самолёт.

CN15-T6. Направление вращения всех планет в Солнечной системе одинаково, но наблюдатель на Земле на самом деле видит лишь проекцию планеты на звёздное небо. Из-за разницы в скорости вращения планет и их орбитального положения, направление их движения на фоне звёздного неба для наблюдателя на Земле не всегда совпадает с направлением её вращения. Видимое движение планеты называется прямым, когда его направление совпадает с направлением вращения Земли, противоположное ему называется ретроградным. Точкой стояния называют точку перехода планеты от прямого движения к ретроградному или наоборот. Ретроградное движение для внешних планет может наблюдаться вблизи противостояния – явления, при котором планета, Земля и Солнце находятся на одной прямой, причём планета и Солнце расположены по разные стороны от Земли. Противостояние Марса – обычное астрономическое явление. Предполагая, что Земля и Марс движутся вокруг Солнца по окружностям в одной плоскости, и пренебрегая их взаимодействием друг с другом и вращением Земли, вычислите период времени, который Марс проводит между соседними точками стояния в прямом и ретроградном движениях. Радиус орбиты Марса R_m в 1.524 раза больше радиуса орбиты Земли R_0.

CN15-T7. Основной принцип времяпролётного масс-спектрометра показан на рисунке (а). Он состоит из трёх частей: источника ионов, области дрейфа и детектора. После образования в источнике положительно заряженные ионы ускоряются электрическим полем E_S, проходят через область дрейфа (вакуум, поле нулевое) и достигают детектора. Расстояние, которое проходит ион при ускорении, равно S, а длина области дрейфа равна L. Регистрируя время прибытия иона в детектор, можно разделить разные ионы в соответствии с отношением массы к заряду $\frac{m}{q}$, где m и q – масса и заряд иона соответственно. Разрешение – самый важный показатель масс-спектрометра, именно оно и будет рассматриваться в задаче. Во всех пунктах гравитацией можно пренебречь.

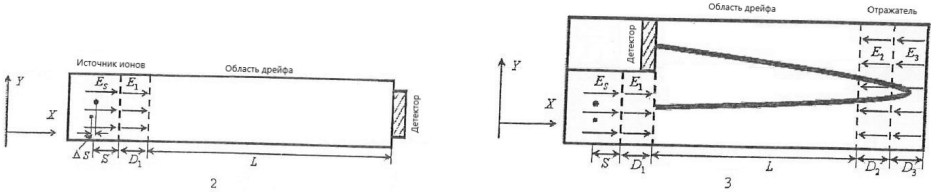


К задаче CN15-T7

1. В идеальном масс-спектрометре разные ионы генерируются с одной и той же координатой x в одно и то же время $t = 0$ с нулевой начальной скоростью. Детектор может измерять время t, в которое ион достигает его, и минимальное разрешение детектора по времени (то есть ошибка измерения t) составляет Δt. Определите разрешение прибора $R = \frac{m}{\Delta m}$, где Δm – минимальное разрешение по массе, соответствующее Δt. При этом R полностью определяется Δt.

Выведите связь между R, t и Δt.

2. На деле существует небольшая разница ΔS в положении генерации ионов ($\Delta S \ll S$), не позволяющая ионам с одинаковым $\frac{m}{q}$ достичь детектора одновременно, что влияет на разрешение масс-спектрометра. В этом случае удобно ввести второе ускоряющее поле с длиной D_1 и напряжённостью E_1. Тогда при правильном подборе длины области дрейфа L можно добиться того, чтобы ионы с одинаковым $\frac{m}{q}$ достигали детектора одновременно, тем самым минимизируя влияние ΔS на разрешение. Найдите L.

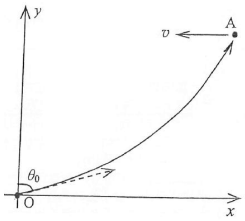


(b) (c)

К задаче CN15-T7

3. Чтобы ещё больше уменьшить влияние ΔS на разрешение, обычно используется отражающий масс-спектрометр, показанный на рисунке (c). Здесь к двухступенчатому ускоряющему полю с E_S и E_1 добавлен отражатель, состоит из двухступенчатого поля с E_2 и E_3, причём выполняется $E_S S + E_1 D_1 \leq E_2 D_2 + E_3 D_3$. Таким образом направление движения иона можно изменить на противоположное, чтобы минимизировать влияние ΔS. Найти соответствующее значение L. Для удобства расчётов считайте, что ион всегда движется параллельно оси Ox.

CN15-T8. При проектировании лазерной системы наведения необходимо учитывать неоднородность показателя преломления воздуха. Из-за влияния различных факторов, таких как состояние поверхности, высота, температура, влажность и плотность воздуха, показатель преломления в разных точках может различаться, и тогда свет не будет двигаться по прямой. Предположим, что показатель преломления воздуха n изменяется с высотой y следующим образом:



К задаче CN15-T8

$$n(y) = n_0 + \alpha y,$$

где n_0 – показатель преломления при $y = 0$, $n_0 > 0$, $\alpha > 0$ – известные константы. Время распространения лазера мало. Лазер находится в начале координат O, как показано на рисунке.

1. Если изначальный угол между лазерным лучом и вертикальной осью равен θ_0 ($0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$), найдите уравнение, которое описывает распространение луча.

2. Пусть цель A находится в первом квадранте. Если её высота равна y_a, найдите максимальное значение $x_{a\,max}$ координаты x цели, которую может поразить лазер.

3. Лазерное поражение цели требует определенного времени воздействия. Если цель A находится в зоне поражения лазера, её начальное положение равно (x_0,y_0), и цель приближается к лазеру с постоянной горизонтально направленной скоростью v, как должен изменяться угол θ_0 со временем t, чтобы луч всегда попадал в цель?

4. Лазерные атаки обычно следуют принципу безопасного уничтожения, то есть самолёт-цель A должен быть уничтожен, и все сброшенные им бомбы не должны поражать лазер. Бомба при сбрасывании неподвижна относительно A. Как только A входит в зону поражения лазера, тот сразу же начинает его облучать. Высота полёта A равна y_a, а продолжительность воздействия, необходимого для уничтожения A, равна t_a. Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха можно пренебречь. Найдите диапазон скоростей A, при которых лазер сможет его уничтожить.

2016

CN16-T1. Высота угольной шахты в городе Датун относительно города Циньхуандао составляет h_c. Поезд массой m_t перевозит уголь массой m_c из Датуна в Циньхуандао, проезжая при этом расстояние l и возвращается обратно пустым.

На пути в одну сторону часть потенциальной энергии поезда и угля расходуется на преодоление силы трения, а остальная энергия преобразуется в электрическую с помощью генератора и запасается с КПД η_1. На обратном пути эта энергия используется с КПД η_2 для преодоления сил тяжести и трения.

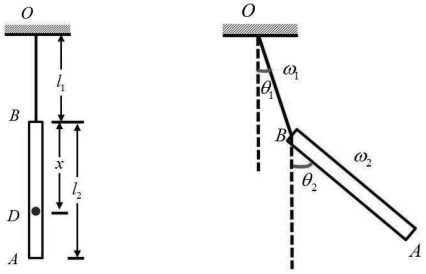
Предполагается, что средняя работа на единицу длины, необходимая для преодоления силы трения, пропорциональна общему весу поезда с постоянным коэффициентом μ, а количество запасённой энергии при отправке из Датуна равно нулю.

1. Найдите электрическую энергию E, которая остаётся у поезда к моменту прибытия обратно в Датун.

2. Какую минимальную массу угля m_c необходимо загрузить на поезд, чтобы он смог вернуться в Датун, используя только запасённую энергию?

3. Выразите через известные величины среднюю выходную мощность P генератора на пути из Датуна в Циньхуандао, если средняя скорость поезда на этой части маршрута равна v.

CN16-T2. Как показано на рисунке a, однородный тонкий стержень AB длиной l_2 и массой m подвешен за один из концов к неподвижной точке O с помощью невесомой нерастяжимой нити длины l_1. В начальный момент времени система находится в статическом равновесии, все последующие движения происходят в одной и той же вертикальной плоскости.



К задаче CN16-T2

Прикладывая горизонтальную силу к точке D, стержню мгновенно передают импульс p. Оказалось, что сразу после этого угловая скорость ω_0 вращения точки B вокруг подвеса O совпадает с угловой скоростью вращения стержня вокруг своего центра.

1. Найдите расстояние $x = DB$ и значение ω_0.

Предположим, что в определенный момент времени углы, которые нить и стержень образуют с вертикалью, равны соответственно θ_1 и θ_2, как показано на рисунке b, а их угловые скорости равны соответственно ω_1 и ω_2.

2. Найдите угловые ускорения α_1 и α_2 нити и стрежня соответственно.

CN16-T3. Атмосфера Марса по большей части представляет собой разреженный углекислый газ, который можно рассматривать находящийся в равновесии идеальный газ с молярной массой μ. Масса Марса равна M_m и намного превышает массу атмосферы, радиус Марса равен R_m. Зависимость плотности атмосферы от высоты h над поверхностью Марса задаётся уравнением:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{R_m}\right)^{1-n},$$

где ρ_0 и n $(n > 4)$ – постоянные.

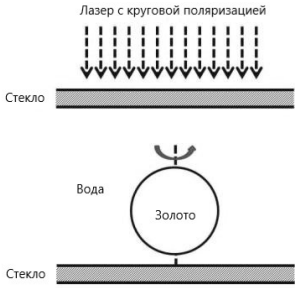
1. Запишите выражение, определяющее зависимость температуры марсианской атмосферы $T(h)$ от высоты h.

Для исследования Марса аппарат малого объёма и массой m_t должен приземлиться на его поверхность. В начальный момент времени аппарат находится на некоторой высоте, много меньшей R_m, а его скорость равна нулю. Известно, что аппарат приземлился на поверхность через время t_l.

В процессе спуска можно считать, что аппарат не вращается, а плотность атмосферы и ускорение свободного падения такие же, как на поверхности. Сила сопротивления, действующая со стороны атмосферы на аппарат, движущийся со скоростью v, пропорционально плотности атмосферы и v^2 с постоянным коэффициентом коэффициентом k.

2. Найдите мгновенную скорость $v(t_l)$ аппарата непосредственно перед посадкой.

CN16-T4. Помимо энергии и импульса, фотон может также иметь момент импульса. Момент импульса фотона в луче с круговой поляризацией равен h. Он наряду с импульсом и энергией передаётся объектам при поглощении, что может заставить объекты вращаться. Этот принцип используется для вращения наночастиц и создания быстрых вихревых потоков в жидкости. Как показано на рисунке, сферическая золотая наночастица находится в воде между двумя горизонтальными стеклянными пластинами и облучается сверху вниз лазерным лучом с круговой поляризацией. Длина волны лазера в вакууме равна $\lambda = 830$ нм, диаметр луча равен $d = 1.20 \times 10^{-6}$ м, а мощность лазера равна $P = 20.0$ мВ. Радиус наночастиц равен $R = 100$ нм, плотность золота равна $\rho = 19.32 \times 10^3$ кг/м^3. При решении задачи пренебрегайте отражением света на границе раздела сред и поглощением в стекле и воде. Результаты расчётов округляйте до 3 значащих цифр.



К задаче CN16-T4

1. Найдите частоту лазера ν и его интенсивность I.

2. Найдите массу золотой наночастицы m и величину её момента инерции J относительно вертикальной оси, проходящей через её центр.

Сечение поглощения света частицей равно $\sigma_{abs} = 0.123\pi R^2$.

3. Найдите момент M силы, действующий на частицу со стороны лазера относительно той же оси.

На вращающуюся в жидкости сферическую частицу действует момент сил вязкого трения, равный $M_f = 8\pi\eta r^3\omega$, где ω — угловая скорость вращения частицы, r — её радиус, а η — вязкость жидкости (значение для воды $\eta = 8.00 \times 10^{-4}$ Па $\cdot$ с).

4. Найдите частоту f установившегося вращения частицы (в оборотах в секунду).

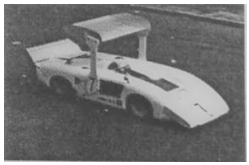
В момент времени $t = 0$ изначально покоившуюся частицу начинают облучать лазером.

5. Найдите зависимость частоты $f(t)$ вращения частицы от времени для $t > 0$.

Теперь частицу облучают импульсным лазерным лучом, причём во время импульсов интенсивность лазера равна I, длительность импульсов равна T_1, интервал между импульсами равен T_2. Момент начала облучения первым импульсом совпадает с началом отсчёта времени $t = 0$.

6. Найдите частоту f_n вращения частицы после n полных периодов облучения и найдите предел $f_{n\to\infty}$.

CN16-T5. Многие гоночные автомобили бывают оснащены регулируемыми дефлекторами для создания дополнительного вертикального давления на автомобиль. При этом сила давления равна $f_B = c_B v^2$, где v — скорость автомобиля, c_B — постоянная величина. Сила давления направлена вверх, если вверх направлена передняя часть дефлектора, и наоборот. Действующая на автомобиль сила сопротивления воздуха равна $f_A = c_A v^2$, где v — скорость автомобиля, c_A — постоянная величина. Масса автомобиля равна m, коэффициент трения покоя между шинами и асфальтом равен μ_S ($\mu_S < 1$).



К задаче CN16-T5

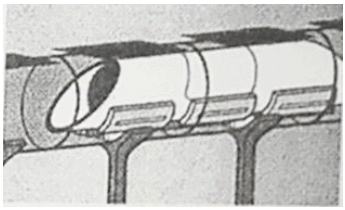
Когда автомобиль движется со скоростью v по прямой горизонтальной дороге, на него действует дополнительно сила трения качения, пропорциональная весу автомобиля с коэффициентом, равным μ_R ($\mu_R < \mu_S$). Передняя часть дефлектора направлена вверх. Найдите мощность двигателя автомобиля при данной скорости v.

1. Найдите максимальную мощность P_{max}, которая достигается двигателем на всём диапазоне возможных скоростей.

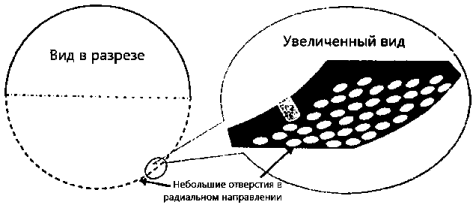
Теперь автомобиль движется с постоянной скоростью по кольцевой дороге радиуса r. Силой трения качения можно пренебречь, а максимально возможную мощность двигателя можно считать достаточно большой. Найдите максимальную скорость v_{max}, при которой автомобиль не соскальзывает с дороги и не отрывается от земли для двух разных положений дефлектора.

2. При каком его положении v_{max} окажется больше?

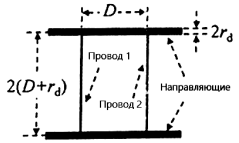
CN16-T6. Hyperloop – это технология, дающая возможность быстрой транспортировки обтекаемого транспортного средства вдоль горизонтальной трубы, как показано на рисунке (a). Транспортировка происходит с использованием так называемой воздушной подушки, то есть в процессе движения происходит выброс газа под большим давлением из небольших отверстий в нижней половине транспортного средства, как показано на рисунке (b). Его поперечное сечение представляет собой круг радиуса R, отверстия на нижней половине распределены равномерно, их количество на единицу площади равно n ($n \geq 1$), площадь одного отверстия равна s. Длина транспортного средства равна l, а масса равна M. Считайте, что поток газа подчиняется уравнению Бернулли, температура газа постоянна, а его давление на выходе равно давлению окружающей среды P_{low}. Как показано на рисунке (c), в трубе закреплены две параллельные направляющие, ответственные за электропитание, а на транспортном средстве закреплены два провода, перпендикулярные направляющим. Направляющие имеют радиус r_d и удельное сопротивление ρ_d, расстояние между ними равно $2\,(D + r_d)$; толщиной проводов можно пренебречь, расстояние между ними D, сопротивление каждого провода в два раза больше сопротивления направляющей той же длины. Направляющие и провода находятся в горизонтальной плоскости, сопротивлением их контакта можно пренебречь.



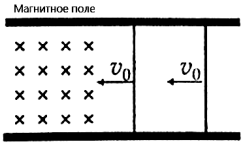
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

К задаче CN16-T6

1. При каком давлении газа P транспортное средство может оторваться от земли?

Как показано на рисунке (d), когда транспортное средство попадает на станцию со скоростью v_0, оно входит в область направленного вертикально вниз однородного магнитного поля с индукцией B, граница которого параллельна проводу.

2. Найдите, с какой скоростью v будет двигаться транспортное средство к моменту, когда оба провода окажутся в магнитном поле.

Перед тем, как транспортное средство покидает станцию, к направляющим подключают источник постоянного напряжения $\mathcal{E}$ на расстоянии D за проводом 2, как показано на рисунке (e).

3. Пренебрегая массой источника и сопротивлением подключенных к нему проводов, найдите ускорение a транспортного средства сразу после подключения источника.

Примечание: Магнитное поле на расстоянии r_0 от цилиндрического провода равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right),$$

где θ_1 и θ_2 — углы между перпендикуляром к проводу и направлениями на его концы.

Можно пользоваться формулой для следующего интеграла:

$$\int_a^b \frac{1}{x} \frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}\, \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\frac{c+\sqrt{c^2+a^2}}{c+\sqrt{c^2+b^2}}\right),$$

где a, b и c — положительные числа.

CN16-T7. Общая теория относительности Эйнштейна предсказывает, что перераспределение плотности материи вызывает возмущение метрики пространства-времени, выражающееся в виде гравитационных волн. Для простоты будем рассматривать волну, распространяющуюся вдоль оси Oz. Для любого фиксированного z дифференциал расстояния dr между двумя точками с координатами (x,y) и $(x+dx,y+dy)$ задаётся формулой:

$$\mathrm{d}r = \sqrt{(1+f_1)\,(\mathrm{d}x)^2 + f_2(\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\;\mathrm{d}x) + (1-f_1)\,(\mathrm{d}y)^2},$$

где гравитационная волна представлена возмущениями f_1 и f_2.

Считайте, что плоские гравитационные волны представимы в виде:

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right], f_2 = 0, 0 < A \ll 1,$$

где A и ω – амплитуда и частота волны соответственно, c – скорость света.

1.1. Поместим два детектора в плоскости xOy: один в начале координат O, другой – на расстоянии R от начала координат под углом θ к оси Ox. Найдите приближённое выражение для отклонения $D-R$ расстояния между детекторами от R при прохождении гравитационной волны.

1.2. Поместим решётку детекторов на окружности радиуса R с центром в точке O в плоскости xOy. При прохождении гравитационной волны пространственные координаты могут быть переопределены как (X,Y) так, что расстояние между точками (X,Y) и $(X+dX,Y+dY)$ будет равно $\sqrt{(dX)^2+(dY)^2}$. Найдите форму решётки детекторов в новой системе координат в момент времени t.

1.3. Если в положительном направлении оси Oz распространяются одновременно две гравитационные волны вида:

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right], f_2 = 0$$

и

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\varphi\right], f_2 = 0, 0 \le \varphi < 2\pi.$$

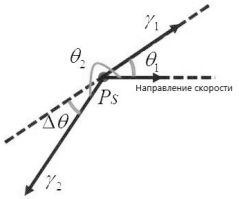
Каким условиям должны удовлетворять ω и φ, чтобы амплитуда колебаний расстояния между датчиком в начале координат O и в точке $(R\cos\theta,R\sin\theta)$ была максимальной? Минимальной?

2. Предположим, что источником гравитационных волн является двойная звезда. Массы компонентов равны M, за начало координат O возьмём центр масс системы. Если компоненты вращаются в плоскости xOy, то f_1 и f_2 можно записать как

$$f_1 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_1\left(T-\frac{l}{c}\right)\right], f_2 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_2\left(T-\frac{l}{c}\right)\right],$$

где G – гравитационная постоянная, а l – расстояние вдоль оси Oz от начала координат O до точки обнаружения гравитационной волны (много больше расстояния между компонентами), и $I_1(t) = \left[x_1'^2(t) + x_2'^2(t)\right] M, I_2(t) = x_1'(t)y_2'(t)M$. Найдите амплитуды f_1 и f_2 в точке обнаружения, если частота гравитационной волны равна ω. Для расчёта параметров орбиты двойной звезды можно использовать Ньютонову механику.

CN16-T8. Атом позитрония Ps представляет собой связанную квантовую систему из электрона e^- и его античастицы позитрона e^+. По аналогии с атомом водорода, позитроний тоже подчиняется правилу квантования Бора, а именно суммарный орбитальный момент импульса электрона и позитрона должен квантоваться, то есть быть целым кратным постоянной Планка h. Ответы в этой задаче приводите с точностью до 4 значащих цифр.



К задаче CN16-T8

1. Найдите энергию $E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}$ основного состояния позитрония.

Позитроний в основном состоянии нестабилен и быстро аннигилирует, образуя два фотона: $\mathrm{Ps} \to \gamma_1 + \gamma_2$. Пусть аннигиляция происходит, когда атом позитрония находится в основном состоянии и движется с нерелятивистской скоростью в лабораторной системе отсчёта. Фотон γ_1 движется по углом θ_1 относительно направления скорости атома, фотон γ_2 движется в обратном направлении, отклоняясь на угол $\Delta\theta$ от прямой, вдоль которой движется γ_1, как показано на рисунке.

2.1. Найдите выражение для скорости v_0 атома позитрония в основном состоянии. Вычислите её значение, а также значения энергий E_1 и E_2 фотонов γ_1 и γ_2 соответственно, если $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta\theta = 3.464 \cdot 10^{-3}$ рад.

2.2. Найдите разность между энергиями E_1 и E_2 двух фотонов γ_1 и γ_2 соответственно и энергией электрона в покоящемся атоме позитрония.

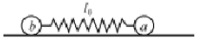
Рассмотрим теперь атом позитрония, движущийся в лабораторной системе отсчёта с релятивистской скоростью v_0 и аннигилирующий из основного состояния. Найдите энергии E_1 и E_2 фотонов γ_1 и γ_2 соответственно.

3. Найдите соотношение между углами отклонения θ_1 и θ_2 от направления скорости атома фотонов γ_1 и γ_2. Вычислите E_1, E_2 и θ_2, когда $v_0 = \frac{c}{2}$ и $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

Примечание: Известно, что энергия основного состояния атома водорода равна $E_{n=1}^{H} = -13.60$ эВ, масса покоя электрона равна $m_e = 0.5110$ МэВ/с^2, а отношение массы протона к массе электрона равно $\frac{m_p}{m_e} = 1836$.

2017

CN17-T1. Маленькие шарики a и b массами m_a и m_b соответственно помещены на гладкую горизонтальную поверхность и соединены лёгкой пружиной с коэффициентом жёсткости k_0 и начальной длиной l_0, как показано



К задаче CN17-T1

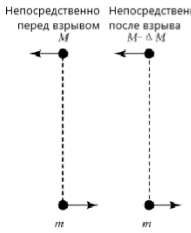
на рисунке. Поверхность и пружина являются изоляторами. В момент времени $t = 0$ пружина нерастянута, шарик b находится в состоянии покоя, а шарик a движется со скоростью v_0 по направлению к шарику b.

1. Считая деформацию пружины упругой, найдите скорость каждого из шариков произвольный момент времени t $(t > 0)$.

Предположим, что оба шарика имеют одинаковый по величине и знаку заряд, и пружина имеет длину L_0, когда система находится в равновесии. Поляризацией шариков пренебречь электрическая постоянная равна k.

2. Найдите величину заряда q шариков и частоту f малых колебаний системы.

CN17-T2. Двойные звёзды — важный класс астрономических объектов. Будем рассматривать двойную звезду как систему двух точечных масс M и m, совершающих круговое движение вокруг общего центра масс. Период вращения системы равен T_0. В некоторый момент времени звезда M мгновенно взрывается и теряет массу ΔM. Её новую массу обозначим как M' $(M' = M - \Delta M)$. Считайте, что в силу быстроты и изотропности взрыва относительно звезды M, её мгновенные скорости до и после взрыва равны. При решении задачи считайте, что взрыв никак не влияет на звезду m. Гравитационная постоянная равна G, релятивистскими эффектами пренебречь.



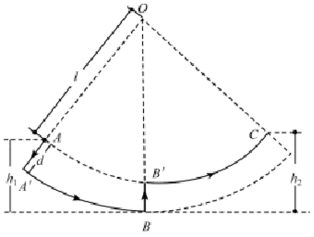
К задаче CN17-T2

1. Найдите расстояние r_0 между звёздами M и m до взрыва.

2. Считая, что движение системы звёзд M' и m после взрыва осталось финитным, найдите его период T_1.

3. Найдите, какое условие должно быть наложено на M, m и ΔM, чтобы движение системы звёзд M' и m после взрыва стало инфинитным.

CN17-T3. Известно, что можно раскачать качели, вставая и приседая на них в нужный момент времени. Пусть человек массой m качается на качелях, состоящих из свободно вращающейся штанги и прикрепленной к ней жёсткой пластине. Массой конструкции можно пренебречь и потому считать, что вся масса сосредоточена в центре масс человека. Расстояние между центром масс и точкой подвеса O равно l, когда человек стоит на качели, и равно $l + d$, когда он полностью приседает. При решении задачи пренебрегите временем, которое требуется человеку, чтобы присесть или встать. Рассмотрим следующую модель: человек сначала приседает по достижении качелями наивысшей точки A, затем приседает в самой низкой точке B, затем снова встаёт во второй наивысшей точке C. Разница в высоте между A и B равна h. Траектория центра масс человека при этом показана на



К задаче CN17-T3

рисунке. После этого тот же процесс повторяется для третьей, четвёртой и т.д. наивысших точек. Считайте, что при вставании/приседании сила взаимодействия с качелями всегда направлена вдоль штанги, точку B примите за ноль гравитационной потенциальной энергии.

1. Найдите механическую энергию системы на каждом участке движения $A - A' - B - B' - C$ и её изменение в результате. Считайте, что при приседании/вставании потерь энергии не происходит.

Предположим теперь, что при приседании/вставании происходят потери механической энергии ΔE, связанные с сопутствующим этому изменением высоты Δh следующими соотношениями:

$$\Delta E = k_1 mg(h_0 + \Delta h),\ 0 < k_1 < 1 \text{ для приседания,}$$

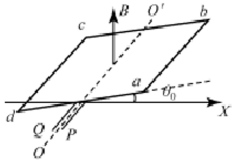
$$\Delta E = k_2 mg(h_0' + \Delta h),\ 0 < k_2 < 1 \text{ для вставания,}$$

где k_1, k_2, h_0 и h_0' – некоторые постоянные, g – ускорение свободного падения.

2.1. Найдите соотношение между высотами h_n и h_{n+1} относительно точки B n и $n+1$ наивысших точек.

2.2. Найдите соотношение между h_n и h_1 и соотношение между $h_{n+1} - h_n$ и h_1.

CN17-T4. Как показано на рисунке, в однородном магнитном поле B, направленном вертикально вверх, находится однородная жёсткая проводящая квадратная рамка $abcd$. Её масса равна m, длина стороны равна l, а сопротивление R. Рамка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси OO', проходящей через середины сторон ad и bc. Выводы рамки обозначены как P и Q. Ось x направлена горизонтально и перпендикулярно OO'. При решении задачи самоиндукцией рамки пренебречь.



К задаче CN17-T4

1. Найдите момент инерции J рамки относительно оси OO'.

В момент времени $t = 0$ угол между плоскостью рамки и осью x равен θ_0 и может считаться малым. В этот момент через рамку пускают ток I, который течёт по направлению $P \to a \to b \to c \to d \to Q$.

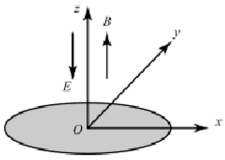
2. Найдите зависимость угла θ, угловой скорости $\dot{\theta}$ и углового ускорения $\ddot{\theta}$ от времени.

В некоторый момент времени $t = t_0 > 0$, когда плоскость рамки оказывается горизонтальной, цепь, к которой подключена рамка, разрывается.

3. Как будет двигаться после этого рамка? Найдите зависимость напряжения V_{PQ} между точками P и Q от времени.

После того, как рамка будет двигаться таким образом в течение некоторого времени, и угол между плоскостью рамки и осью x станет равен θ_1 $\left(\frac{\pi}{4} \le \theta_1 \le \frac{3\pi}{4}\right)$, точки P и Q замыкают накоротко. Известно что после этого рамка провернётся на небольшой угол α и затем остановится.

4. Найдите соотношение между α и θ_1 и минимальное значение угла α_m.



К задаче CN17-T5

CN17-T5. Как показано на рисунке, на горизонтальной плоскости xOy размещена круглая пластина, причём её центр совпадает с центром координат O. Сверху от плоскости xOy существуют электрическое поле E, направленное противоположно оси z, и магнитное поле B, сонаправленное с этой осью, причём за пределами вертикального цилиндра, основанием которого является пластина, поля отсутствуют. Из начала координат O изотропно по всем направлениям над плоскостью xOy испускаются положительно заряженные частицы. Их заряд равен q, масса m, а начальная скорость v. При решении задачи пренебрегите силой тяжести, действующей на частицы, а также взаимодействием частиц.

1. Считая, что каждое столкновение частицы с пластиной является упругим, найдите радиус R последней, если количество частиц, остающихся в процессе движения в области над пластиной, равно $\eta = 50\%$ от общего числа частиц.

Теперь считайте, что при столкновении с пластиной направление горизонтальной составляющей скорости не меняется, а вертикальная и горизонтальная составляющие скорости изменяются пропорционально своим значениям так, что кинетическая энергия частицы уменьшается на 10%.

2.1. Найдите максимальное значение проекции на ось xOy расстояния $s_{z=0}^{max}$, на которое переместится частица до своего первого столкновения с пластиной.

2.2. Найдите, какой путь s_{total} пройдёт частица из п. 2.1 до того, как осядет на пластину.

Считайте известным значение интеграла:

$$\int du\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) + C,$$

где C – константа интегрирования.

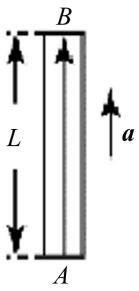
CN17-T6. Рассмотрим капилляр, представляющий собой стеклянную трубку длиной 6.00 см и имеющую внутренний и внешний радиусы 0.500 мм и 5.00 мм соответственно. В вертикально закреплённый капилляр впрыскивают воду, после чего на нижнем его конце образуется капля, а высота верхнего конца водяного столбика в капилляре относительно неё составляет 3.5 см.

1. Найдите радиус кривизны a нижней части поверхности капли.

Теперь капилляр на треть погружают в воду. Известно, что плотность стекла в два раза больше плотности воды, плотность воды равна $1.00 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения воды равен $7.27 \cdot 10^{-2}$ Н/м, ускорение свободного падения равно 9.80 м/с, а угол смачивания θ между водой и стеклом можно принять равным нулю.

2. Найдите, какой величины вертикальную силу F необходимо приложить к капилляру, чтобы удерживать его в равновесии.

CN17-T7. Принцип эквивалентности Эйнштейна гласит, что законы физики в присутствие гравитации работают так же, как в отсутствие гравитации в неинерциальных системах отсчёта, движущихся с соответствующим ускорением. Два примера этого принципа будут рассмотрены в этой задаче. Когда луч света перемещается из области с меньшим гравитационным потенциалом в область с большим, его длина волны увеличивается. Это явление называется гравитационным красным смещением. Рассмотрим луч света с длиной волны λ_0, который излучается вертикально вверх из точки A рядом с поверхностью сферической однородной звезды, и попадает на зафиксированный на расстоянии L по вертикали от точки A приёмник B. Известно, что масса звезды равна M, а её радиус равен R ($R \gg L$). Гравитационное поле считайте слабым, так что применимы приближения ньютоновской теории гравитации. Скорость света в вакууме равна c, гравитационная постоянная равна G.



К задаче CN17-T7

1.1. Найдите длину волны λ' принимаемого света.

Предположим, что, как показано на рисунке, свет испускает из точки A с одной стороны длинного ящика и принимается в точке B на другой его стороне. Ящик имеет при том длину L и находится вдали от гравитационных полей. В момент времени $t = 0$ ящик начинает равномерно ускоряться в направлении AB, его ускорение равно a $\left(aL \ll c^2\right)$, и одновременно с этим из A испускается луч света.

1.2. В рамках специальной теории относительности найдите длину волны света λ'', принимаемую в точке B.

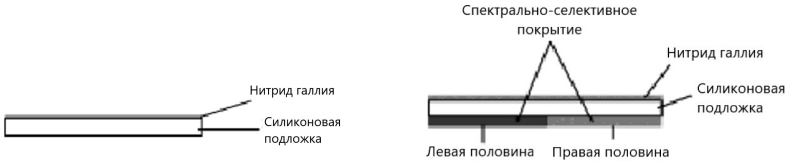
1.3. Сравните результаты, полученные в п. 1.1 и п. 1.2. Чему должно быть равно ускорение a, если следовать принципу эквивалентности?

Первая экспериментальная проверка гравитационного красного смещения на Земле была проведена с помощью детектора, работающего на основе эффекта Мессбауэра. Такой детектор может определять энергию γ-квантов с очень хорошей точностью. По аналогии с п. 1.1, стационарный источник γ-излучения размещается около поверхности земли, частота излучаемых им γ-квантов равна ν_0. Детектор размещается в точке B на пути излучения. Известно, что детектор может поглощать только γ-кванты, имеющие частоту ν_0 в системе отсчёта детектора. Чтобы обнаружить γ-кванты, испущенные из A, детектору необходимо придать некоторую направленную вертикально вниз скорость. В период с 1960 по 1964 год Паунд, Ребка и Снайдер использовали башню физической лаборатории Джефферсона в Гарвардском университете для проведения данного эксперимента. В их эксперименте $L = 22.6$ м. Ускорение свободного падения на поверхности земли $g = 9.81$ м/с^2, скорость света в вакууме $c = 3.00 \cdot 10^8$ м/с.

2. Найдите, с какой скоростью v должен двигаться при этом детектор, чтобы обнаружить γ-квант, излученный в точке A.

CN17-T8. Как показано на рисунке (а), на кремниевую подложку с помощью специальной технологии нанесена тонкая плёнка нитрида галлия постоян-

ной толщины.



(a) (b)

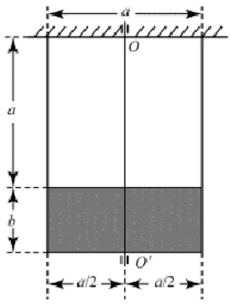
К задаче CN17-T8

Когда поверхность нитрида галлия облучается равномерно нормально падающим светом в диапазоне длин волн $450 \sim 1200$ нм, наблюдается, что спектр отражённого света имеет максимумы лишь при двух значениях длины волны, одно из которых 600 нм. Дисперсионное соотношение (соотношение между показателем преломления и длиной волны падающего света в вакууме) имеет вид:

$$n^2 = 2.26^2 + \frac{330.1^2}{(\lambda - 265.7)^2}.$$

Показатель преломления кремния изменяется в пределах $3.49 \sim 5.49$ в зависимости от длины волны.

1. Рассматривая только отражения от поверхности нитрида галлия и от границы раздела его с кремниевой подложкой, найдите толщину d плёнки и длину волны λ света в вакууме, соответствующую второму максимуму спектра.



К задаче CN17-T8

Спектрально-селективное покрытие наносится равномерно на левую и правую половины подложки, как показано на рисунке (b). Известно, что для определённой длины волны света левая половина покрытия полностью поглощает его, а правая полностью отражает. Пусть теперь образец подвешен вертикально с помощью двух лёгких тонких нитей длины a. Длина образца равна a, а ширина b. Он может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси OO', проходящей по его центру, а также перемещаться вверх–вниз, как показано на рисунке (c). В начальный момент времени образец находится в состоянии покоя, и его поверхность облучается лазером необходимой длины волны. При неизменном направлении лазера образец вращается вокруг оси OO' до стабилизации. Считайте, что поверхность образца всё время облучается лазером, действием излучения на боковую поверхность образца пренебрегите. Предположим, что толщина кремниевой подложки равна d', а её плотность равна ρ'. Толщина плёнки нитрида галлия равна d, его плотность равна ρ. Массу покрытия считайте пренебрежимо малой. Диэлектрическая проницаемость вакуума равна ε_0, ускорение свободного падения равно g.

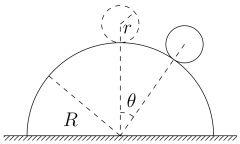
2. Найдите эффективную напряжённость E электрического поля лазера, если в результате стабилизации образец провернулся на угол α.

Пусть $E = 5.00 \cdot 10^4$ В/м, $d' = 3.00 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho' = 2.33 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho = 6.10 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $g = 9.80$ м/с^2.

3. Найдите значение угла α.

2018

CN18-T1. Как показано на рисунке, твёрдая полусфера массой M и радиусом R лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На её вершине покоится однородная сфера меньшего радиуса r массой m. В некоторый момент времени сфера оказывается слегка выведенной из положения равновесия и начинает скатываться вниз. Её положение описывается углом θ между вертикалью и прямой, соединяющей центры тел. Коэффициент трения покоя и скольжения между сферой и полусферой равен μ, момент инерции сферы относительно оси симметрии равен $\frac{2}{5}mr^2$, ускорение свободного падения равно g.



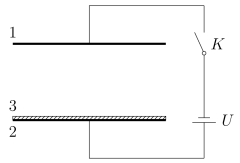
К задаче CN18-T1

1. Некоторое время после начала движения сфера скатывается без проскальзывания. Когда угол $\theta = \theta_1$, найдите величину скорости $v_M(\theta_1)$ и ускорения $a_M(\theta_1)$ полусферы.

2. Сфера начинает проскальзывать при значении угла $\theta = \theta_2$. Выведите соотношение, связывающее при этом $v_M(\theta_2)$ и $a_M(\theta_2)$.

3. Сфера отрывается от полусферы при значении угла $\theta = \theta_3$. Найдите величину скорости v'_C центра сферы относительно полусферы в этот момент.

CN18-T2. Как показано на рисунке, каждая из пластин плоского конденсатора закреплена горизонтально и имеет площадь S, расстояние между пластинами равно d. Конденсатор соединён через ключ K с источником питания с ЭДС U. Незаряженная проводящая пластина массы m и тех же размеров, что и пластины конденсатора, покоится на нижней пластине в хорошем контакте с ней. Вся система находится в вакууме, его диэлектрическая проницаемость равна ε_0. Когда ключ K замыкают, пластина начинает перемещаться вверх-вниз внутри конденсатора. Считайте, что электрическое поле внутри конденсатора однородно, сопротивлением компонентов цепи и временем перезарядки конденсатора можно пренебречь, все столкновения в системе абсолютно неупругие, перераспределение заряда при них происходит мгновенно. Ускорение свободного падения равно g.



К задаче CN18-T2

1. Найдите минимальное напряжение U_{min}, при котором возможно такое движение в системе.

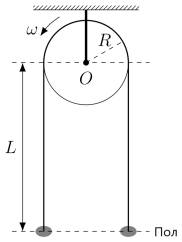
2. Найдите период T движения пластины в конденсаторе.

Примечание: Можно воспользоваться интегралом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx}\right) + C,$$

где $a > 0$, а C — константа интегрирования.

CN18-T3. Как показано на рисунке, очень длинная нерастяжимая нить постоянной линейной плотности λ продета через блок радиусом R, ось которого находится на высоте L от пола. Изначально система находится в равновесии. В момент времени $t = 0$, блок мгновенно приобретает угловую скорость ω, вращаясь против часовой стрелки, и сохраняет её потом. Коэффициент трения скольжения между нитью и блоков равен μ. Это также приводит нить в движение. Подвешенные части нити остаются вертикальными в процессе движения, а её концы всегда остаются на полу. Натяжение нити слева и справа от блока обозначены T_1 и T_2 соответственно. Ускорение свободного падения равно g.



К задаче CN18-T3

1. Запишите систему уравнений движения для каждой точки нити в трёх случаях: для частей нити, лежащих слева и справа об блока, и части нити, лежащей на блоке.

2. Найдите максимально возможную скорость v_{max} движения нити в описанном процессе.

Примечание: Можно воспользоваться следующими равенствами:

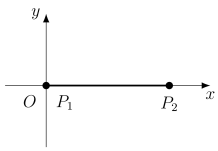
$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = e^{-\alpha x}\frac{ye^{\alpha x}}{dx},$$

$$\int e^{\alpha x}\cos x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1+\alpha^2}(\alpha\cos x + \sin x) + C_1,$$

$$\int e^{\alpha x}\sin x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1+\alpha^2}(\alpha\sin x + \cos x) + C_2,$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования.

CN18-T4. Как показано на рисунке, натянутая струна длины L помещена вдоль оси Ox, и её левый конец находится в начале координат. Оба конца струны могут быть подключены к виброгенератору, инициирующему колебания вдоль оси Oy. Скорость распространения волн в струне равна u. Пусть правый конец струны P_2 закреплён, а левый конец P_1 соединён с генератором. При установившихся колебаниях сдвиг на левом конце зависит от времени как $y(x = 0,t) = A_0\cos\omega t$, где A_0 и ω – амплитуда и угловая частота колебаний соответственно.



К задаче CN18-T4

1.1. Поперечные колебания перемещаются вдоль струны с декрементом затухания $\gamma > 0$. Найдите амплитуду колебаний в произвольной точке струны, если для струны бесконечной длины соответствующие колебания имеют вид $y(x,t) = Ae^{-\gamma x}\cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{u} + \varphi\right)$, где A и φ – амплитуда и фаза колебаний в точке $x = 0$ соответственно.

1.2. Теперь пренебрежём затуханием. Найдите уравнение стоячей волны в струне, а также положения её узлов и пучностей.

2. Теперь оба конца струны подключены к генератору, и сдвиги на концах P_1 и P_2 струны зависят от времени как $y(x = 0,t) = A_0\cos\omega t$ и $y(x = L,t) = A_0\cos\omega t + \varphi_0$ соответственно. Пренебрегая затуханием, найдите уравнение волны в струне и запишите условие резонанса в случаях $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$.

CN18-T5. Изолированный тонкостенный контейнер массы M находится в открытом космосе вдали от небесных тел, космическое пространство можно считать вакуумом. Начальная скорость контейнера в выбранной инерциальной системе отсчёта равна нулю. Его объём равен V, изначально он заполнен N_0 молекулами одноатомного идеального газа, масса одной молекулы m, начальная температура газа T_0. В момент времени $t = 0$ контейнер протыкают, создавая небольшую дыру площадью S. Контейнер начинает двигаться без вращения. Считайте, что газ в контейнере остаётся в равновесии в процессе утечки. Распределение Максвелла для x-компоненты скоростей молекул v_x имеет вид:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right),$$

где k – константа Больцмана.

1. Найдите количество N_{leak} молекул, покидающих контейнер через единицу площади в единицу времени, выразите ответ через концентрацию молекул n и температуру T газа в этот момент.

2. Найдите среднюю кинетическую энергию $\bar{E}_k$ относительно контейнера покидающих его молекул, ответ выразите через температуру газа T в этот момент.

3. Найдите зависимость $T(t)$ температуры газа от времени.

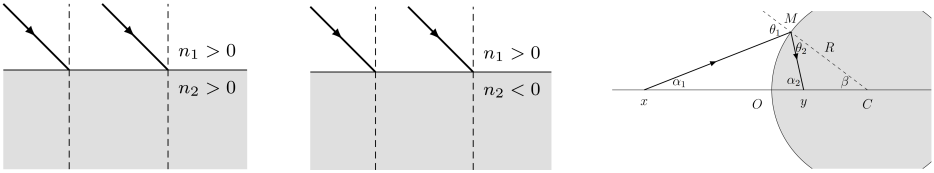
4. Найдите зависимость $u(t)$ скорости контейнера от времени.

Примечание: Можно пользоваться интегралами:

$$\int\limits_0^\infty xe^{-Ax^2}dx = \frac{1}{2A},\quad \int\limits_0^\infty x^2e^{-Ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{A^3}},\quad \int\limits_0^\infty x^3e^{-Ax^2}dx = \frac{1}{2A^2}.$$

CN18-T6. Коэффициент преломления n среды может быть как больше, так и меньше нуля. Материалы с $n < 0$ называются метаматериалами с отрицательным показателем преломления. Оптический путь луча в такой среде будет отрицательным. Если считать угол преломления отрицательным, падающий и

преломлённый лучи лежат по одну сторону от нормали, то закон Снеллиуса $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ будет выполняться независимо от знаков n_1 и n_2. Считаем по умолчанию, что угол падения $\theta_1 \geq 0$.



(a) (b) (c)

К задаче CN18-T6

1. Предположим, что свет падает на границу раздела двух материалов с разными показателями преломления. Для всех возможных случаев на рисунках выше найдите оптический путь двух соседних лучей и покажите, что обобщённый закон Снеллиуса выполняется.

2. Сферическая поверхность радиуса R с центром в точке C делит трёхмерное пространство на внутреннюю и внешнюю область с $n_2 < 0$ и $n_1 > 0$. Рассмотрим произвольную оптическую ось, проходящую через C, и примем точку O на пересечении оси со сферой за начало координат. Луч x падает на сферу в точке M и преломляется, переходя в луч y, как показано на рисунке. Расстояния от начала координат до объекта и изображения равны s_1 и s_2 соответственно. В параксиальном приближении запишите формулу такой линзы (связывающую s_1, s_2 и параметры системы) и найдите увеличение линзы. В ответах обязательно указывайте корректные знаки полученных величин.

3. Предположим, что первая среда – это воздух, и $n_1 \approx 1$, n_2 же может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поместим собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 1.5R$ перед сферой так, чтобы оптическая ось линзы проходила через C и один из фокусов находился внутри сферы. Расстояние между O и центром линзы O' равно d. Параллельный оптической оси пучок света падает на линзу. Для каждого случая из таблицы ниже найдите расстояние от точки O до точки, в которой свет сфокусируется. Изобразите путь лучей для случая 4.

Случай	n_2	d
1	1.5	$0.35R$
2	1.5	$0.85R$
3	-1.5	$0.35R$
4	-1.5	$0.85R$

CN18-T7. Поведение твёрдых тел зачастую бывает трудно моделировать привычными методами из-за их сложной внутренней структуры. Если необхо-

димо рассматривать взаимодействие частиц, то проблему можно упростить, используя концепцию квазичастиц, для которых соотношение между импульсом и энергией может отличаться от такового у реальных частиц. В присутствии электромагнитных полей движение квазичастицы в твёрдом теле обычно разрешимо методами механики. Одна из разновидностей квазичастиц с эффективной массой m и зарядом q может существовать в двумерных граничных поверхностях, то есть движение таких частиц происходит только в плоскости xOy. Кинетическая энергия K таких частиц выражается через модуль их импульса p как $K = \frac{p^2}{2m} + \alpha p$, где α – положительная постоянная.

1. Кинетическая энергия K реальной частицы выражается через модуль её импульса p как $K = \frac{p^2}{2m}$. Выразите её скорость $\vec{v}$ через импульс $\vec{p}$, используя равенство $dK = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

2. С помощью того же метода выразите скорость квазичастицы $\vec{v}$ через её импульс $\vec{p}$.

3. Выразите $v = |\vec{v}|$ через K.

4. Предположим, что поверхность, на которой существуют квазичастицы, теперь помещена в сонаправленное с осью Oz однородное магнитное поле B. Тогда квазичастица кинетической энергии K будет совершать вращательное движение. Найдите радиус R её траектории, период T её вращения и значение L момента импульса частицы.

5. Теперь магнитное поле заменено на однородное электрическое с напряжённостью E, сонаправленное с осью Ox. Найдите составляющие a_x и a_y ускорения квазичастицы, скорость которой направлена под углом θ к электрическому полю. Не забывайте, что составляющая ускорения, перпендикулярная электрическому полю, может быть ненулевой.

CN18-T8. Когда тепловое излучение падает на отражающую поверхность, последняя может совершать работу под действием давления излучения. Этот процесс можно изучать как с точки зрения механики, так и с точки зрения термодинамики. Для простоты будем рассматривать одномерный луч излучения абсолютно чёрного тела, падающий на идеально отражающую плоскую поверхность. Давление излучения уравновешивается силами сопротивления таким образом, что поверхность движется с постоянной скоростью v, сонаправленной с лучом. Скорость света в вакууме равна c, а энергетическая яркость одномерного чернотельного излучения имеет вид $\varphi(\nu,T) = \frac{2h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$ в лабораторной системе отсчёта, где h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана.

1. Решать данную задачу можно с помощью механики. Рассматривая столкновения фотонов в луче с отражающей поверхностью, найдите КПД η поверхности по превращению энергии фотонов в механическую работу, совершаемую против сил сопротивления, в лабораторной системе отсчёта.

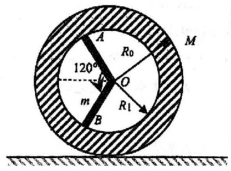
2. Термодинамический анализ демонстрирует иной подход. Систему можно воспринимать как идеальную тепловую машину с отражающей поверхностью в качестве рабочего тела. Приходящее излучения можно интерпретировать как

получение тепла от нагревателя, а отражённое излучение – как отдачу тепла холодильнику. Используя эту модель, покажите в системе отсчёта поверхности, что профили энергетической яркости излучения совпадают с таковыми для чернотельного, и найдите КПД системы η'.

3. Найдите КПД η данной тепловой машины в лабораторной системе отсчёта.

2019

CN19-T1. Перед тем, как поступить в продажу, новые модели транспортных средств должны проходить краш-тест. В одном из таких тестов одна из трёх спиц автомобильного колеса была выбита. Вид колеса в разрезе показан на рисунке. Колесо считайте однородным диском с внутренним и внешним радиусами $R_1 = \frac{4}{5}R_0$ и R_0 соответственно, а спицы считайте однородными стержнями. Масса каждой спицы m, а масса диска $M = 8m$. В начальный момент колесо неподвижно и находится в положении, показанном на рисунке (биссектриса угла между спицами в начальном положении горизонтальна). Колесо отпускают, и оно катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности.

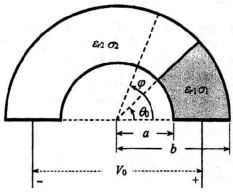


К задаче CN19-T1

1. Найдите угловое ускорение колеса α сразу после того, как его отпустили.

2. Найдите угловое ускорение колеса α, величину сил трения F_f и силы реакции опоры F_N, когда спица OB примет в процессе качения вертикальное положение.

CN19-T2. Как показано на рисунке, полуцилиндр длины l, имеющий внутренний радиус a и внешний радиус b, состоит их двух различных слабо проводящих диэлектриков, относительная диэлектрическая проницаемость и проводимость которых равны соответственно ε_{r1}, σ_1 (для углов $0 \le \varphi < \theta_0$) и ε_{r2}, σ_2 (для углов $\theta_0 < \varphi \le \pi$). Нижние поверхности полуцилиндра покрыты тонким слоем металла, и к ним приложено постоянное напряжение V_0. Диэлектрическая проницаемость вакуума известна и равна ε_0. Считайте диэлектрические проницаемости обоих диэлектриков очень большими, а их проводимости очень малыми, краевыми эффектами пренебрегите.



К задаче CN19-T2

1. Найдите распределение напряжённости электрического поля $E(\varphi)$ и его потенциала $V(\varphi)$ в среде.

2. Найдите полный заряд Q на границе между диэлектриками (т.е. при $\varphi = \theta_0$).

3. Найдите сопротивление и ёмкость R_1, C_1 и R_2, C_2 каждого из диэлектриков (т.е. областей $0 \le \varphi < \theta_0$ и $\theta_0 < \varphi \le \pi$ соответственно).

4. В момент времени $t = 0$ напряжение выключают. Считая дальнейшие процессы квазистатическими, найдите зависимость напряжения между нижними поверхностями полуцилиндра $V(t)$ от времени и нарисуйте эквивалентную схему процесса.

CN19-T3. С помощью сверхпроводящих гравиметров можно измерять микроскопические отклонения ускорения свободного падения от своего среднего значения. Измеряя распределение этих отклонений с высокой точностью в течение длительного времени, можно получать не только сведения о внутренней структуре Земли (например, о движениях мантии, распределении массы, приливах Земли, распределении грунтовых вод и минералов), но и сведения о внешних процессах (например, об океанических приливах или изменении климата). Сверхпроводящие гравиметры имеют высокую чувствительность (до 10^{-9} от ускорения свободного падения на земной поверхности) и очень стабильны, потому широко используются в науке при изучении планеты. С увеличением числа сверхпроводящих гравиметров, созданием наблюдательной сети и совместным использованием данных возникают новые возможности для развития науки о Земле и проведения более точных опытов по проверке закона всемирного тяготения. В этой задаче будут рассмотрены принципы работы сверхпроводящего гравиметра и изменения ускорения свободного падения под действием грунтовых вод.

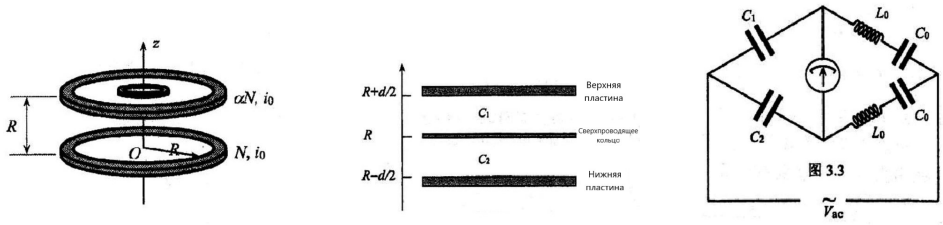
1. Землю можно считать однородным шаром радиуса 6370 км, ускорение свободного падения на поверхности которого равно $g_0 = 9.80$ м/с^2 (эффектами вращения Земли пренебрегите). Предположим, что под землёй на глубине 15 км образовалось шарообразное озеро 20 км в диаметре, заполненное водой. Найдите, на какую величину Δg изменится ускорение свободного падения на поверхности земли непосредственно над озером. Универсальная гравитационная постоянная равна $G = 6.67{\cdot}10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2, плотность воды $\rho_{\text{в.}} = 1.0{\cdot}10^3$ кг/м^3.

Основной частью сверхпроводящего гравиметра является сверхпроводящая сферическая оболочка, сделанная из ниобия Nb, подвешенная в магнитном поле. Для удобства дальнейших вычислений считайте её тонким сверхпроводящим кольцом, как показано на рисунке (а). Магнитное поле создаётся двумя тонкими коаксиальными сверхпроводящими неподвижными катушками, подобными катушкам Гельмгольца, с количествами витков αN и N. Перед началом работы гравиметра ток в кольце и катушках нулевой. Кольцо находится в плоскости нижней катушки ($z = 0$) и соосно последней. В начале работы к катушкам прикладывается напряжение, позволяющее медленно увеличивать ток в катушках до величины i_0, при котором сверхпроводящее кольцо поднимется и будет находиться в плоскости верхней катушки ($z = R$). Температура катушек и кольца поддерживается равной 4.2 К, поэтому они имеют нулевое сопротивление. После того, как кольцо приходит в равновесие, напряжение отключают, после чего ток в катушках и создаваемое им магнитное поле могут оставаться постоянными в течение долгого времени. Известно, что масса сверхпроводящего кольца m, его диаметр D ($D \ll 2R$), а его индуктивность L. Вблизи плоскости верхней

катушки, аксиальная и радиальная компоненты магнитного поля, создаваемого катушками, могут быть выражены как:

$$B_z = B_0 \left[1 - \beta \left(z - R\right)\right] B_r = \frac{1}{2}\beta B_0 r,$$

где B_0 – магнитное поле в центре верхней катушки, β – т.н. радиальный коэффициент, а r – расстояние о центральной оси.



(a) (b) (c)

К задаче CN19-T3

2.1. Найдите коэффициенты B_0 и β.

2.2. Найдите ток I_0, индуцированный в кольце в положении равновесия $z = R$.

2.3. Найдите ускорение свободного падения g в месте расположения гравиметра.

Примечание: катушки Гельмгольца представляют собой две одинаковые коаксиальные катушки, расстояние между которыми равно их радиусу, и используются для создания областей однородного магнитного поля.

Чтобы точно измерить малые изменения ускорения свободного падения, в гравиметре используется метод балансировки моста на основе переменного тока. Чтобы понять принцип его работы и произвести расчёты, сверхпроводящее кольцо можно считать тонкой плоской пластинкой с площадью поверхности A, помещённой между двумя алюминиевыми пластинами такого же размера и формы, закреплённых соответственно в $z = R + \frac{d}{2}$ и $z = R - \frac{d}{2}$, образующими таким образом два конденсатора, обозначенных C_1 и C_2 соответственно, как показано на рисунке (b). Они соединены в мост с двумя парами идентичных катушки L_0 и конденсатора C_0. Мост подключен к источнику переменного тока (его частота много больше характерных обратных времён изменения гравитационного поля), как показано на рисунке (c). Предположим, что в некоторый момент времени ускорение свободного падения в окрестности гравиметра равно g, сверхпроводящее кольцо находится в положении равновесия $z = R$, мост сбалансирован, а к C_1 и C_2 приложено одинаковое постоянное напряжение V_C. Когда ускорение свободного падения изменится на величину Δg, мост больше не будет сбалансирован. Однако, когда постоянное напряжение на C_1 увеличивают на ΔV, а на C_2 – уменьшают ΔV, мост балансируется снова.

3. Пренебрегая краевыми эффектами, найдите соотношение между Δg и ΔV.

CN19-T4. Автомобиль получает энергию за счёт сжигания смеси воздуха и бензина в цилиндрах его двигателя, причём выделяемая двигателем мощность прямо пропорциональна количеству воздуха, попадающего в цилиндры. Чтобы увеличить мощность, многие автомобили оснащают турбокомпрессорами, способными сжать воздух. Чтобы увеличить количество попадающего в цилиндры воздуха ещё больше, используют интеркулеры, позволяющие уменьшить его температуру. Рассмотрим типичный двигатель. Давление воздуха перед попаданием в турбокомпрессор равно атмосферному $p_0 = 1.01 \cdot 10^5$ Па, а его температура $T_0 = 15$ °C. При прохождении через него порция воздуха адиабатически сжимается до давления $p_1 = 1.45 \cdot 10^5$ Па. Затем при прохождении интеркулера порция воздуха изобарически охлаждается до исходной температуры T_0, после чего полностью заполняет цилиндр. Считайте воздух идеальным газом. Известны объём цилиндра $V_0 = 400$ см^3, молярная масса воздуха $M = 29.0$ г/моль и его показатель адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8.31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

1. Найдите массу воздуха m_1, попадающую в цилиндр. Во сколько раз R_1 мощность двигателя будет превышать таковую в отсутствие турбокомпрессора и интеркулера?

2. Найдите массу воздуха m_2, попадающую в цилиндр в отсутствие интеркулера. Во сколько раз R_2 мощность двигателя, снабжённого только турбокомпрессором, будет превышать таковую у двигателя без него?

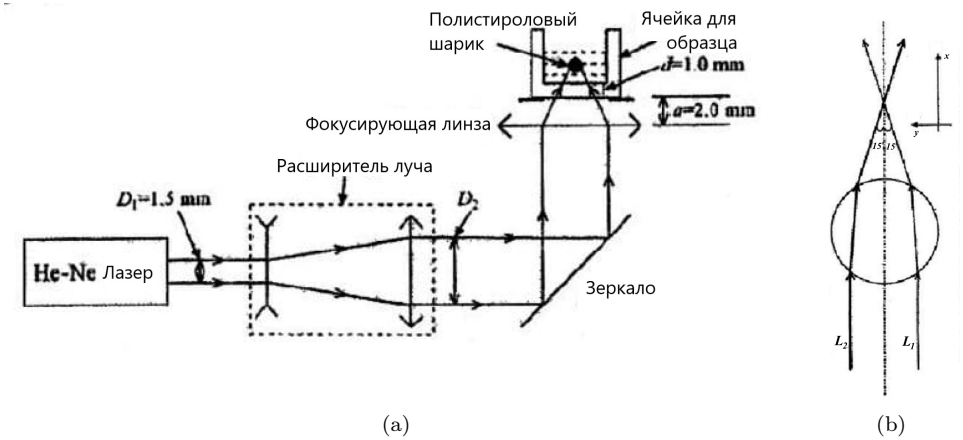
3. Для порции газа, проходящей через турбокомпрессор и интеркулер, найдите изменение её энтропии ΔS и работу W, совершённую над ней внешними силами.

CN19-T5. Часть Нобелевской премии 2018 года по физике была присуждена американскому учёному Артуру Эшкину за инновационную работу в создании оптических ловушек (т.н. оптического пинцета). Оптический пинцет использует сфокусированные лазерные лучи для захвата крошечных предметов. На рисунке (а) схематически показана экспериментальная установка для оптического пинцета. Частота гелий-неонового лазера равна $\lambda = 632.8$ нм, диаметр лазерного луча $D_1 = 1.5$ мм, его мощность $P = 30$ мВ. Чтобы улучшить захватывающую способность, можно добавить расширитель луча. После отражения от зеркала лазерный луч попадает на собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 4$ мм, и фокусируется в слое дистиллированной воды в ячейке для образца. Некоторое количество полистироловых шариков добавлено в воду в ячейке. Диаметр шариков $D_b = 2.0$ мкм, их плотность $\rho_b = 1.0 \cdot 10^3$ кг/м^3, коэффициент преломления стекла, из которого сделана стенка ячейки, $n_g = 1.46$, коэффициент преломления воды в ячейке $n_w = 1.33$, толщина стеклянной стенки ячейки $d = 1.00$ мм, расстояние между внешним краем стенки и поверхностью фокусирующей линзы $a = 2.00$ мм, температура воды $T = 300$ К, показатель преломления воздуха $n_0 = 1.00$, ускорение свободного падения $g = 9.80$ м/с^2,

константа Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Шарики могут быть захвачены пинцетом при прохождении точки фокусировки лазерного луча.

1. Найдите диаметр светового пятна D_{o1}, которое образует луч в фокальной плоскости в воздухе в отсутствие расширителя луча.

2. Чтобы улучшить захватывающую способность оптического пинцета, используют расширитель луча. Как показано на рисунке (a), расширитель луча состоит из рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $f_1 = -6.3$ мм и собирающей линзы с фокусным расстоянием $f_2 = 25.2$ мм. Считая, что расширяемый пучок состоит из параллельных лучей, найдите расстояние между линзами l и диаметр расширенного пучка D_2.



К задаче CN19-T5

3. Расширенный пучок фокусируется в слое дистиллированной воды в ячейке для образца, как показано на рисунке (a). В параксиальном приближении найдите, на каком расстоянии D_w от внутренней поверхности ячейки сфокусируется пучок и какого диаметра D_{o2} пятно он образует в фокальной плоскости.

4. На рисунке (b) показана модель поведения погружённых в воду полистироловых шариков под действием неоднородного лазерного пучка (упрощённо представленного в виде двух лучей с разной интенсивностью). Лучи L_1 и L_2 падают вдоль оси Ox и имеют мощности $P_1 = 1.0$ мВ и $P_2 = 2.0$ мВ соответственно. Угол, на который отклоняются лучи вследствие преломления, равен 15°, как показано на рисунке (b). Отражением от границы раздела сред и поглощением света пренебрегите. Найдите силу $\vec{F}_b$, действующую на шарик со стороны лучей, выразив её через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вдоль Ox и Oy соответственно и отношения η_x и η_y проекций силы на эти оси к силе притяжения, действующей на шарик.

5. Найдите среднеквадратическую скорость шариков v_p, находящихся в воде при температуре 300 К.

6. При рассмотрении оптических пинцетов можно также рассматривать модель оптического потенциального колодца, и потенциал $U(r)$ сферически симметричного колодца, создаваемого сфокусированным на шарике лазерным лучом, может быть описан как

$$\begin{cases} U_0\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right), \text{ если } r \le b; \\ 0, \text{ если } r > b; \end{cases}$$

где b – некоторая константа, r – расстояние от центра колодца, а $U_0 = 0.078$ эВ. Найдите значение максимальной скорости v_m при $r = 0$, при которой шарик ещё может быть заперт в потенциальном колодце.

7. Как известно, модули скоростей полистироловых шариков в воде подчиняются распределению Максвелла, которое даётся формулой

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

где m и v – масса и скорость соответственно, а T – их абсолютная температура. Для двух шариков массами m и $2m$ найдите вероятности быть запертыми в потенциальной яме P_m и P_{2m} соответственно и сравните их.

CN19-T6. Глядя на звёздное небо, люди дают свободу своему бесконечному воображению. С развитием науки и технологий понимание людьми Вселенной углубляется. Особенно в XXI веке, когда была приоткрыта завеса тайны над процессами осцилляций нейтрино, проведена непосредственная фиксация гравитационных волн и получены фотографии чёрной дыры, возрос широкий интерес общественности к изучению Вселенной. Но как люди используют ограниченные возможности оборудования для наблюдения и исследования необъятной Вселенной и в особенности такой её неотъемлемой части, как звёзд? Можно ли, имея в запасе лишь школьные знания по физике, количественно выяснить внешние и внутренние характеристики звёзд, такие как размер, массу, возраст, продолжительность жизни, состав и механизм генерации энергии? В данной задаче вы попытаетесь построить модель Солнца от простой к сложной в согласии с историческим контекстом. Т.к. мы не можем непосредственно наблюдать внутренности Солнца, модели должны быть проверены с разных точек зрения, в том числе такие характеристики, как возраст, радиус, поверхностная температура, мощность, нейтринный поток и т.д. должны соответствовать действительности.

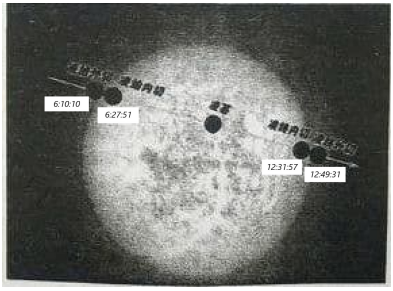
При решении задачи считайте известными следующие величины: радиус Земли 6370 км, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4), постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, элементарный заряд $e = 1.602 \cdot 10^{19}$ Кл, масса электрона $m_e = 0.51$ МэВ/c^2, масса протона $m_p = 938.3$ МэВ/c^2, масса ядра дейтерия $m_D = 1875.6$ МэВ/c^2, масса атома ^3He $m_{^3He} = 2808.4$ МэВ/c^2, масса атома ^4He $m_{^4He} = 3727.5$ МэВ/c^2.

В одном из древнейших китайских математико-астрономических текстов Чжоуби Суаньцзин, написанном более 2000 лет назад, описывается метод измерения отношения диаметра Солнца D к расстоянию до него $S_{\text{Сол-Зем}}$ (т.н. астрономической единице). Необходимо взять длинный прямой бамбуковый стержень и закрепить его, направив на Солнце. Внутренний диаметр стержня равен d. Необходимо подобрать стержень такой длины L, чтобы диск Солнца точно умещался в отверстие, если смотреть на него через стержень.

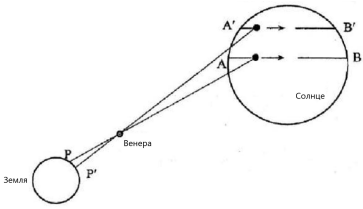
1.1. Найдите, как связан угловой диаметр солнечного диска $\Phi = \frac{D}{S_{\text{Сол-Зем}}}$ с величинами d и L.

1.2. Чтобы уменьшить ошибку измерений, нужно сделать L как можно больше. Какими ещё способами можно повысить точность полученного результата?

1.3. Если $d = 1$ цунь, а $L = 8$ кит. футов, то чему равен диаметр солнечного диска $\Phi = \frac{D}{S_{\text{Сол-Зем}}}$? (1 китайский фут = 10 цуней = $\frac{1}{3}$ м)



(a)



(b)

К задаче CN19-T6

С некоторой вероятностью Земля, Венера и Солнце в некоторый момент своего движения могут оказаться почти на одной прямой (так было, например, 6 июня 2012 года). При этом для земного наблюдателя Венера выглядит как маленькая чёрная точка, медленно перемещающаяся по солнечному диску. Такое событие называется транзитом Венеры. В 1716 году английский астроном Эдмунд Галлей предложил пронаблюдать транзит Венеры в разных точках планеты, чтобы измерить угловой размер Солнца расстояние между Солнцем и Землёй. Известно, что Земля и Венера обращаются вокруг Солнца в одном и том же направлении с периодами $T_{\text{Зем}} = 365.256$ сут. и $T_{\text{Вен}} = 224.701$ сут. соответственно. Угол между плоскостями их орбит считайте очень малым, вращением Земли пренебрегите.

2.1. Считая орбиты Венеры и Земли круговыми, найдите отношение расстояния от Солнца до Венеры к расстоянию от Солнца до Земли $r_{\text{Вен-Зем}} = \frac{S_{\text{Сол-Вен}}}{S_{\text{Сол-Зем}}}$.

2.2. 6 июня 2012 года из никоторой точки Земли были проведены наблюдения транзита Венеры по диску Солнца, как показано на рисунке (a). Найдите

отношение длины дуги D_p, по которой двигалась Венера в течение транзита, к расстоянию $S_{\text{Сол-Вен}}$ от Венеры до Солнца. Если расстояние в картинной плоскости между центром солнечного диска и прямой, вдоль которой движется Венера для земного наблюдателя, равно $h_p = \frac{5}{16}D$, то каков угловой диаметр Солнца Ф?

2.3. Чтобы измерить расстояние между Солнцем и Землёй, необходимо пронаблюдать транзит Венеры в разных точках Земной поверхности, как то показано на рисунке (b). Предположим, что два наблюдателя P и P' на поверхности земли, разделённые расстоянием H и находящиеся на одной долготе, одновременно фиксируют транзит Венеры. Для наблюдателя P Венера движется вдоль прямой AB, и транзит длится t_p. Для наблюдателя же P Венера движется вдоль прямой $A'B'$, транзит происходит за время t'_p. Выразите расстояние между Солнцем и Землёй $S_{\text{Сол-Зем}}$ через величины $r_{\text{Вен-Зем}}$, $T_{\text{Зем}}$, $T_{\text{Вен}}$, t_p, $t_{p'}$ и H.

2.4. Широты Пекина и Гонконга равны соответственно 39.5° и 22.5°. Транзит Венеры 6 июня 2012 года длился t_p = 6:21:57 в Пекине и $t_{p'}$ = 6:19:31 в Гонконге. Используя эти данные и результаты п. 2.3, вычислите расстояние $S_{\text{Сол-Зем}}$ от Земли до Солнца и диаметр Солнца D.

Согласно наблюдательным данным, полученным во время транзита Венеры в 1882 году, среднее расстояние между Солнцем и Землёй равно $S_{\text{Сол-Зем}} = 1.5 \cdot 10^8$ км, диаметр Солнца равен $D = 1.4 \cdot 10^6$ км, и количество энергии солнечного излучения, получаемого на Земле в единицу времени на единицу перпендикулярной излучению площади, равно $I = 1.37$ кВт/м^2.

3.1. Найдите полное количество солнечной энергии $W_{\text{Зем}}$, получаемое Землёй в единицу времени.

3.2. Человечество потребляет энергетический эквивалент 3 т угля в год на душу населения, причём 1 кг угля способен произвести 4 кВт · ч. Найдите отношение $E_{\text{чел.}}:E_{\text{Зем.}}$ энергии, потребляемой всеми 7 млрд людей в мире, к количеству солнечной энергии, получаемой Землёй за тот же период времени.

3.3. Найдите полное количество энергии $W_{\text{Сол}}$, излучаемой Солнцем в единицу времени.

3.4. Оцените температуру поверхности Солнца $T_{\text{пов}}$.

4.1. Найдите массу Солнца $M_{\text{Сол}}$ и его среднюю плотность ρ.

4.2. Предположим, что источником солнечной энергии являются химические реакции, и теплота, выделяемая в этих реакциях на единицу массы, такая же, как у угля, какое время $t_{\text{хим}}$ может существовать Солнце, излучая то же количество солнечной энергии, что и сейчас? Учитывая, что сейчас Солнцу уже порядка 5 млрд лет, во сколько раз более энергоэффективными должны быть идущие на нём реакции?

Согласно результатам спектрального анализа, основной составляющей Солнца является водород. Основные термоядерные реакции, в которых участвует водород, могут быть записаны как

$$p + p \to D + e^+ + \nu_e$$

$$D + p \to {}^3He + \gamma$$
$${}^3He + {}^3He \to {}^4He + p + p.$$

Образующиеся в этих термоядерных реакциях позитроны будут аннигилировать, нейтрино – улетать, а положительно заряженные ядра будут отталкивать друг друга. Если бы они не находились при очень большой температуре, их кинетической энергии не хватало бы для преодоления кулоновского потенциала и начала реакции. При достаточно высокой температуре атомы будут ионизованы, поэтому вещество на Солнце должно представлять собой плазму из электронов и ядер. В этой части задачи пренебрегите энергией, которую уносят с собой нейтрино, а также наличием непрореагировавшего водорода, улетающего с солнечным ветром.

5.1. Какое число $\frac{\Delta N_p}{\Delta t}$ ядер водорода – протонов – должно потребляться в реакциях на Солнце в единицу времени, чтобы поддерживать наблюдаемую мощность солнечного излучения?

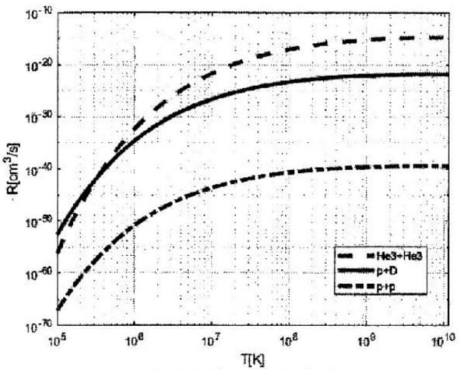
5.2. В настоящий момент Солнце на 71% по массе состоит из водорода. Какое число лет оно ещё может таким образом поддерживать своё существование? Вычислите вероятность P_{pp} протон-протонной реакции в единицу времени (т.е. отношение числа частиц, вступающих в реакцию в единицу времени, к полному числу частиц).

5.3. Нейтрино практически не поглощаются в процессе своего движения из недр Солнца на расстояния, сравнимые с размерами земной орбиты. Какое количество нейтрино $\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta S \Delta t}$ достигает земной поверхности в единицу времени на единицу перпендикулярной направлению их распространения площади?

(На самом деле, количество электронных нейтрино, достигающих Земли, составляет лишь 35% от вычисленного вами значения, однако совпадёт с ним при учёте двух других типов нейтрино. Это происходит потому, что некоторые нейтрино меняют свой тип в процессе движения, что называется осцилляциями нейтрино. За открытие и объяснение этого эффекта были даны Нобелевские премии по физике за 2002 и 2015 годы.)

5.4. Какую массу $\frac{\Delta M_{\text{Сол}}}{\Delta t}$ в единицу времени теряет Солнце в результате излучения?

6. Вероятность P термоядерной реакции зависит от температуры плазмы T, а также прямо пропорциональна её концентрации n (количества частиц в единице объёма). Таким образом, вероятность может быть записана в виде $P = nR(T)$, где $R(T)$ – т.н. скорость реакции. На рисунке (с) показана зависимость скорости реакции от температуры для трёх различных ядерных реакций. Оцените мини-



К задаче CN19-T6

мальную температуру T солнечного ядра (его радиус возьмите равным $\frac{1}{4}$ солнечного), при которой могут проходить необходимые ядерные реакции.

7. Найдите максимальную энергию $E_{\nu\ max}$, которую может уносить с собой в результате реакции нейтрино, и максимальную вызванную этим эффектом относительную ошибку результатов, полученных в п. 5.1–5.4 задачи.

Как видно из полученных результатов, Солнце медленно теряет свою массу, потому период и средний радиус орбиты Земли также медленно меняются.

8.1. Найдите, какую массу ΔM потеряет Солнце вследствие излучения за 100 млн лет.

8.2. Найдите вызванное этим изменение $T_2 - T_1$ периода обращения Земли.

2020

CN20-T1. В 2018 году в Китае начал работу большой нейтронный реактор, находящий большое практическое применение. В 1932 году Джеймс Чедвик впервые подтвердил существование нейтронов и измерил их массу, а в 1939 году Отто Ган и другие обнаружили, что бомбардировкой ядер урана нейтронами можно добиться начала цепной ядерной реакции. Чтобы такая реакция была управляемой, можно использовать столкновения для замедления испускаемых нейтронов. При решении задачи пренебрегайте релятивистскими эффектами. Чедвик использовал нейтроны массой m для бомбардировки неподвижных ядер-мишеней с массой m_1 (в частности, ядра водорода H массой m_H или ядра азота ^{14}N массой $14m_H$), чтобы пронаблюдать движение последних. Предполагая, что угол между результирующим импульсом ядра-мишени и начальным импульсом налетающего нейтрона равен α, выразите результирующие скорости ядра v_1 и нейтрона v через начальную скорость нейтрона v_0. По результатам эксперимента максимальная скорость ядер водорода составила $3.30 \cdot 10^7$ м/с, а ядер азота $4.70 \cdot 10^5$ м/с.

1. По этим данным найдите значения m и v_0.

В описанном выше эксперименте ядра азота также можно облучать пучками нейтронов. Предположим, что ядро азота вначале неподвижно, скорость налетающих нейтронов снова равна v_0 и столкновения максимизируют добавку к скорости ядра.

2. Найдите, после какого числа n таких столкновений кинетическая энергия ядра азота приблизительно сравняется с кинетической энергией налетающих нейтронов.

Предположим, что нейтроны после замедления находятся в состоянии теплового равновесия, и их скорости подчиняются распределению Максвелла: $f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$, где k_B — постоянная Больцмана, а T — температура системы.

3. Найдите кинетическую энергию E_p, соответствующую наиболее вероятной скорости нейтронов, и наиболее вероятную кинетическую энергию E_{kp}.

CN20-T2. Когда два проводящих шарика в электрическом поле находятся близко друг к другу, поле между ними сильно возрастает. Это явление будет подробно исследовано в данной задаче. Диэлектрическая проницаемость вакуума равна ε_0.

1. Предположим, что заряд Q находится на расстоянии a от центра проводящей сферы радиуса R_0 ($a > R_0$). Найдите положение и величину зеркального заряда.

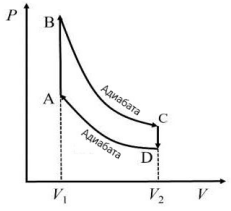
2. Пусть проводящая сфера находится в однородном электрическом поле напряжённостью E_0. Такое поле можно рассматривать как поле, создаваемое посередине между двумя удалёнными друг от друга точечными зарядами равной величины и противоположного знака $\pm Q$. Покажите, что индуцированное в проводящей сфере поле эквивалентно полю диполя, и найдите связь между соответствующим дипольным моментом p и напряжённостью E_0.

3. Пусть теперь два точечных заряда противоположного знака $\pm q$ разделены расстоянием Δl и образуют диполь, момент $q\Delta\vec{l}$ которого лежит в радиальном направлении проводящей сферы. Сфера имеет радиус R_0, расстояние от неё до диполя равно r ($r \gg \Delta l$). Найдите величину индуцированного на сфере дипольного момента p.

4. Во внешнем однородном электрическом поле напряжённостью E_0 находятся две проводящие сферы радиусом R_0 на расстоянии r друг от друга ($r > 2R_0$), а линия, соединяющая их центры, сонаправлена с напряжённостью. Выбрав систему координат так, чтобы эта линия лежала на оси Ox, а её середина совпадала с началом координат O, найдите величину потенциала $\varphi(x,y)$ в каждой точке плоскости, проходящей через ось Ox, и напряжённость поля в каждой точке оси Ox.

5. Покажите, что при дальнейшем приближении сфер друг к другу напряжённость поля в точке между ними будет стремиться к бесконечности.

CN20-T3. Квантовая тепловая машина — это тепловая машина, использующая в качестве рабочего тела вещество с квантовыми свойствами. Принцип работы такой машины описан в этой задаче на примере двухуровневой атомной системы. Средняя энергия двухуровневого атома определяется как $\langle E\rangle = p_0 \cdot E_0 + p_1 \cdot E_1$, где E_0, p_0 и E_1, p_1 представляют собой энергию и вероятность атома находиться в состоянии с такой энергией для основного и возбуждённого состояний соответственно. Для удобства полагаем $E_0 = 0$. Разность энергий двух состояний является регулируемой в ходе эксперимента величиной. Вероятность нахождения атома в состоянии с энергией E определяется согласно распределению Больцмана как $p \propto e^{-E/k_B T}$, где T – термодинамическая температура, k_B – константа Больцмана. В квазистатическом процессе изменение средней энергии равно $d\langle E\rangle = p_1 dE_1 + E_1 dp_1$, и тогда $p_1 dE_1$, вызванное изменением уровня энергии, соответствует работе dW, а $E_1 dp_1$, вызванное изменением вероятности, соответствует подведённой к си-



К задаче CN20-T3

стеме теплоте dQ.

1. Двухуровневая система находится в контакте и термостатом температурой T. Найдите вероятности p_0 и p_1 нахождения атома в основном и возбуждённом состояниях соответственно.

2. На рисунке показана $P-V$ диаграмма так называемого цикла Отто, где $A \to B$ $C \to D$ – изохорические, а $B \to C$ и $D \to A$ – адиабатические процессы. Изобразите на схематичной диаграмме, как при этом меняются величины E_1 и p_1, найдите подведённую/отведённую теплоту, изменение внутренней энергии и совершённую работу для каждого из процессов цикла.

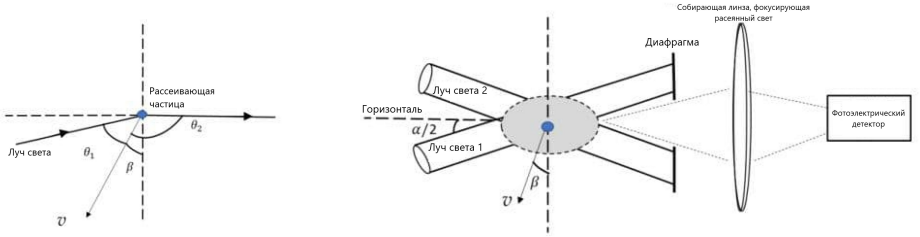
3. Аналогичным образом найдите подведённую/отведённую теплоту, изменение внутренней энергии и совершённую работу для каждого из процессов квантового цикла Карно. Если температуры нагревателя и холодильника в цикле Карно равны соответственно T_h и T_l и совпадают с максимальной и минимальной температурами, достигающимися в цикле Отто, сравните КПД этих двух циклов.

CN20-T4. В 1964 году учёные Е и Камминс пронаблюдали эффект Доплера у света, рассеянного на частицах в потоке воды. С тех пор лазерная доплеровская анемометрия стала широко использоваться. Чтобы получить рассеянный свет достаточной интенсивности, в жидкость добавляют рассеивающие частицы соответствующих размеров и концентрации. Рассеяние происходит при облучении лазером движущихся частиц и может дать информацию о скорости их движения (и скорости движения жидкости соответственно). Угол между скоростью частицы v и вертикалью равен β.

1. Как показано на рисунке (a), луч света частотой f рассеивается движущейся в жидкости частицей. Скорость распространения света в среде равна $\frac{c}{n}$ (где n – коэффициент преломления жидкости), а частицы движутся со скоростью v ($v \ll \frac{c}{n}$). Угол между направлением распространения падающего света и скоростью частицы равен θ_1, направлением распространения рассеянного света – θ_2. Найдите, как зависит изменение частоты Δf света при рассеянии от направления распространения рассеянного света. Если скорость частицы $v \sim 1$ м/с и частота света $f \sim 10^{14}$ Гц, можно ли использовать спектрометр с разрешением 5 МГц для обнаружения эффекта Доплера?

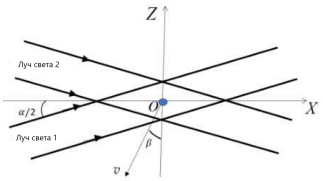
2. Как показано на рисунке (b), два нерасходящихся когерентных луча частоты f, направления распространения которых лежат в одной вертикальной плоскости, используются для облучения одной и той же частицы в жидкости, причём угол между каждым из лучей и горизонталью равен $\frac{\alpha}{2}$ (считайтеα достаточно малым). По достижении фотодетектора фазы рассеянного света равны φ_1 и φ_2 соответственно. Направления вектора напряжённости электрического поля лучей почти одинаковы, их амплитуда равна E_0. Величина тока детектора пропорциональна интенсивности попадающего в него света с коэффициентом пропорциональности k. Считая, что детектор на выходе рассчитан на переменный ток с частотами в диапазоне $10^2 - 10^7$ Гц, найдите выражение, которым этот ток задаётся. Для простоты считайте, что скорость частицы лежит в одной

плоскости с направлениями распространения падающих лучей.



К задаче CN20-T4

3. Предположим, что два нерасходящихся когерентных луча распространяются в плоскости xOz симметрично относительно оси Ox и достигают точки пересечения, как показано на рисунке (c). Найдите расстояние d между соседними максимумами получаемой интерференционной картины. Частица (скорость которой также лежит в плоскости xOz), рассеивает свет, перемещаясь вдоль интерференционной картины, в результате чего рассеянный свет имеет периодически меняющуюся с некоторой частотой f_D амплитуду. Найдите эту частоту.



К задаче CN20-T4

CN20-T5. Обширное пространство между звёздами заполнено т.н. межзвёздной средой. Под действием космических лучей молекулы межзвёздной среды могут лишиться части своих электронов и стать положительно заряженными ионами, в то время как электроны становятся свободными и превращаются в плазму. Пульсар – это нейтронная звезда, вращающаяся с большой скоростью и обладающая очень сильным магнитным полем. Его электромагнитное излучение при наблюдении с Земли представляет собой периодический сигнал. Излучение пульсаров может быть использовано для межзвёздной навигации и высокоточного измерения времени, поэтому необходимо знать точное время, за которое сигналы достигают Земли, и изучить фазовые сдвиги и дисперсию составляющего их излучения. Расстояние между Землёй и пульсаром равно d, и средняя концентрация электронов в межзвёздной среде равна n_e (характерный порядок этой величины 10^4 1/м^3). В межзвёздной среде также существует однородное магнитное поле индукции B (порядка 10^{-10} Тл), параллельное направлению распространения электромагнитных волн. Считайте известными массу электрона m_e, его заряд $-e$ ($e > 0$), диэлектрическую проницаемость вакуума ε_0 и скорость света в вакууме c.

1. Выберем направление распространения электромагнитного излучения в качестве положительного направления оси Oz, тогда для электромагнитной

волны с частотой f составляющие электрического поля могут быть записаны как

$$E_x = E_0 \cos(kz - 2\pi ft) E_y = E_0 \cos(kz - 2\pi ft \pm \frac{\pi}{2}),$$

где E_0 и k – амплитуда и волновое число этой волны соответственно. Для простоты считайте E_0 постоянной и пренебрегите влиянием магнитного поля этой же волны на электрон. Найдите радиус r_e кругового движения электрона в таком поле.

2. Распространяющийся в межзвёздной среде сигнал будет подвержен дисперсии, и скорость его распространения (т.е. групповая скорость v_g) пропорциональна производной частоты электромагнитной волны по её волновому числу и выражается формулой

$$v_g = 2\pi \frac{df}{dk}.$$

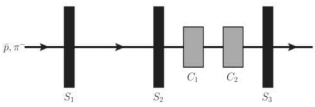
Найдите наименьшую частоту f_c электромагнитной волны, способной достичь Земли при движении через межзвёздную среду.

3. Считайте, что средняя концентрация электронов n_e в межзвёздной среде остаётся постоянной вдоль всего пути распространения электромагнитной волны. Насколько больше времени Δt понадобится волне частоты f, чтобы достичь Земли, при движении сквозь межзвёздную среду по сравнению с движением через вакуум?

4. Найдите, на какую величину $\Delta\Phi$ будет отличаться фаза пришедшей на Землю волны,, вектор напряжённости в которой вращается в одну сторону, по сравнению с волной, вектор напряжённости которой вращается в противоположную. Считайте, что $\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}} \ll f$, $\frac{eB}{2\pi m_e} \ll f$.

5. Предположим, что на промежутке длиной a концентрация электронов отличается от средней на Δn_e. Какой дополнительный фазовый сдвиг $\Delta\Phi$ вызовет эта флуктуация для прошедшей сквозь указанный промежуток волны?

CN20-T6. Существование античастиц впервые было предсказано теорией Дирака. В 1932 Андерсон открыл позитроны – античастицы электронов – изучая космические лучи. С тех пор были открыты и другие античастицы, например, антипротоны. Последние можно получить, бомбардируя мишень из неподвижных протонов высокоэнергетическим протонным пучком с энергией частиц 6.8 ГэВ. Происходящая при этом реакция записывается как



К задаче CN20-T6

$$p + p \to p + p + p + \bar{p} \to \pi^- + \dots.$$

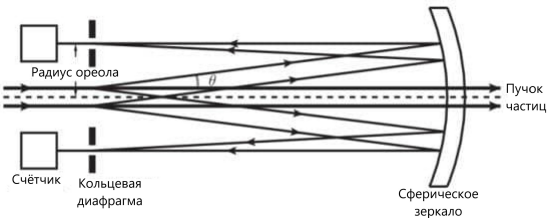
В результате аннигиляции протонов и антипротонов образуются π^--мезоны, поэтому в антипротонном луче всегда можно найти большое их количество. На рисунке (а) схематично показано устройство детектора антипротонов. Антипротоны и π^--мезоны пролетают по порядку через сцинтилляционные счётчики S_1,

S_2 и S_3. Расстояние между счётчиками S_1 и S_2 равно $l = 12$ м. Счётчики черенковского излучения C_1 и C_2 помещены между S_2 и S_3 и используются для определения скорости движения частиц посредством регистрации их черенковского излучения (электромагнитного излучения, возникающего, когда скорость движения заряженной частицы превышает скорость света в среде). C_1 регистрирует только более быстрые π^--мезоны, C_2 – только более медленные антипротоны. Счётчик S_3 используется в эксперименте для подтверждения правильности результатов S_1 и S_2. Считайте известными следующие величины: скорость света в вакууме $c = 2.998 \cdot 10^8$ м/с, масса протона $M_p = 938.2720$ МэВ/c^2, масса π^0-мезона $m_{\pi^0} = 134.9766$ МэВ/c^2, масса $\pi^\pm$-мезона $m_{\pi^\pm} = 139.5702$ МэВ/c^2.

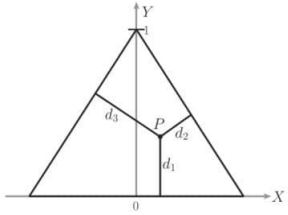
1. Если протоны и антипротон, образовавшиеся в результате описанной выше реакции, имеют практически одинаковую скорость, найдите время $t_{\bar{p}}$, которое необходимо антипротону для того, чтобы долететь от S_1 до S_2. Какое время t_{π^-} нужно π^--мезону, имеющему такую же кинетическую энергию, что и описанный выше антипротон, чтобы долететь от S_1 до S_2?

2. Частица распространяется в среде с коэффициентов преломления n со скоростью v ($v > \frac{c}{n}$). Найдите, чему равен угол θ между направлением движения частицы и направлением распространения черенковского излучения.

3. Дифференциальный счётчик черенковского излучения может фиксировать количество частиц, чьи скорости лежат в определённых диапазонах. Рисунок (b) представляет собой схематичный вид счётчика в разрезе (он осесимметричен относительно оси, показанной штриховой линией). Направляющая свет система состоит из сферического зеркала радиуса R и кольцевой диафрагмы с регулируемым радиусом. Когда угол между скоростью частицы и направлением распространения черенковского излучения мал, зеркало фокусирует его, образуя в фокальной плоскости имеющий радиус r кольцевой ореол излучения, попадающего в дальнейшем в счётчик. Найдите радиус r ореола, если создавшая его частица двигалась со скоростью v.



(b)



(c)

К задаче CN20-T6

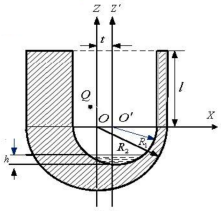
4. Когда протон сталкивается с антипротоном, происходит аннигиляция, уравнение которой записывается как

$$p + \bar{p} \to 3\pi^0.$$

Разность суммарных кинетических энергий продуктов реакции и изначальных частиц равна Q. Для простоты считайте кинетическую энергию протонов и антипротонов пренебрежимо малой, а тогда суммарная кинетическая энергия трёх π^0-мезонов – постоянная величина. Распределение кинетической энергии между этими тремя π^0-мезонами может быть представлено в виде т.н. диаграммы Далица. Как показано на рисунке (c), диаграмма Далица представляет собой равносторонний треугольник единичной высоты. Расстояния от точки P до каждой из трёх сторон равно отношению кинетической энергии соответственно каждого из трёх π^0-мезонов, т.е. $d_i = \frac{E_i}{Q}$, где индекс i принимает значения $i = 1{,}2{,}3$, каждое из которых соответствует одному из π^0-мезонов. Используйте систему координат, показанную на рисунке (c) (середина нижней стороны – начало координат, ось Oy перпендикулярна ей).

Найдите выражение, задающее границу области возможных положений точки P на диаграмме, если известны энергия реакции Q, масса π^0-мезона m_{π^0} и скорость света в вакууме c. Найдите аналогичное выражение отдельно для случая $m_{\pi^0} = 0$.

CN20-T7. В одном из своих сочинений Сунь Цзи описывает, как Конфуций наблюдал в храме Лу Хуан Гун довольно примечательное устройство, которое мы будем называть подвесной патрон. Принцип его работы таков, что будучи пустым он отклонён в сторону, после заполнения до некоторого уровня он приходит в вертикальное положение и опрокидывается в обратную сторону при дальнейшем заполнении. Вид патрона в разрезе показан на рисунке. Внешняя поверхность патрона симметрична относительно оси его вращения Z, а внутренняя – относительно оси Z'. Радиусы внутренней и внешней поверхностей равны $R_1 = R$ и $R_2 = \sqrt{3}R$ соответственно. Оба центра O и O' образуемых поверхностью полусфер находятся на одной горизонтальной оси X. Расстояние между осями Z и Z' составляет $t = \frac{3R}{10}$, длина цилиндрической части патрона равна $l = 2R$. Точки подвеса патрона расположены на прямой, пересекающей плоскость XOZ в точке Q, координаты которой равны $x_Q = -\frac{R}{10}$, $z_Q = \frac{2\sqrt{3}R}{11}$. Материал патрона однороден, и его плотность ρ_1 в три раза больше плотности воды ρ_2. При решении задачи пренебрегите трением.



К задаче CN20-T7

1. Найдите угол θ_0 между осью Z и вертикалью, когда патрон пуст и находится в состоянии равновесия.

2. Найдите момент инерции I пустого патрона относительно оси вращения, а также циклическую частоту ω его малых колебаний вблизи положения равновесия. Считайте известным, что момент инерции однородной сферы плотности ρ и радиуса R относительно оси, проходящей через её центр масс, равен $I_1 = \frac{8}{15}\rho R^5$, а момент инерции однородного цилиндра плотности ρ, радиуса R и длины L относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно основанию, равен $I_2 = \frac{1}{12}\pi\rho R^2 L\left(3R^2 + L^2\right)$.

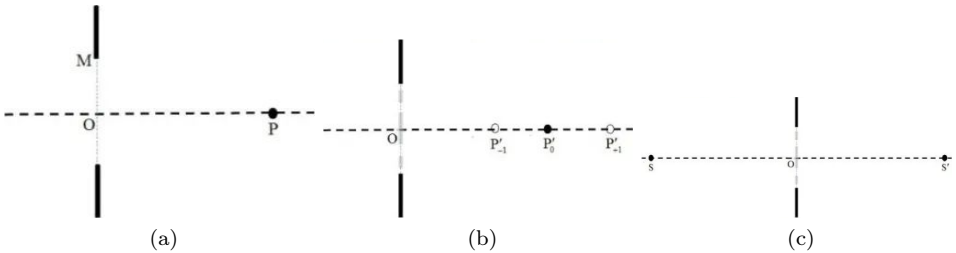
3. Пусть теперь патрон начинают медленно заполнять водой. Найдите рас-

стояние h от дна патрона до поверхности воды в тот момент, когда он примет вертикальное положение.

4. Определите, при каком положении $\left(x_{\text{ц.м.}}, z_{\text{ц.м.}}\right)$ центра масс происходит опрокидывание патрона.

2021

CN21-T1. На рисунке (a) показана непрозрачная перегородка, в которой проделано небольшое круглое отверстие радиусом $OM = 1.00$ мм. В качестве источника света используется водородно-неоновый лазер с длиной волны $\lambda = 632.8$ нм, параллельный пучок света которого падает на отверстие слева. Справа на оси симметрии отверстия находится точка P. Волну в этой точке можно рассматривать как комбинацию волн от полуволновых зон. Обозначим $r_0 = PO$, тогда сферы с центром в точке P радиусами $r_0 + \frac{\lambda}{2}$, $r_0 + 2\frac{\lambda}{2}$, $r_0 + 3\frac{\lambda}{2}$, ... разбивают отверстие на $N \in \mathbb{N}$ колец. Расстояние от точки P до края отверстия M равно $r_0 + N\frac{\lambda}{2}$, а кольцо с наименьшим радиусом представляет собой круг. Каждое такое кольцо называется полуволновой зоной, поскольку разность оптический путей от его краёв до точки P равна $\frac{\lambda}{2}$. Ясно, что количество зон N определяется положением точки P.



(a) (b) (c)

К задаче CN21-T1

1. Если $N = 2n + 1$, найдите расстояние r_0 до точки P_0 (P_0 – крайняя справа яркая точка, называемая главным фокусом) и расстояние r_1 до точки P_1 (P_1 – тоже яркая точка, располагающаяся левее P_0, называемая вторичным фокусом).

Пусть теперь $N = 4$, и в первой и третьей волновых зонах помещён прозрачный материал, при прохождении через который оптический путь света увеличивается на $\frac{\lambda}{2}$ (см. рисунок (b)).

2.1. Найдите расстояние r'_0 до главного фокуса P'_0 такой пластинки.

2.2. Найдите расстояние r'_{-1} до вторичного фокуса P'_{-1}, находящегося непосредственно слева от главного.

2.3. Найдите расстояние r'_{+1} до вторичного фокуса P'_{+1}, находящегося непосредственно справа от главного.

Зонную пластинку можно использовать не только для фокусировки света, но и для формирования изображения. Рассмотренный выше процесс фокусировки параллельного пучка эквивалентен ситуации, когда предмет находится

на бесконечности, а расстояние до изображения равно фокусному. Пусть теперь точечный источник света расположен слева от O на расстоянии $s = 3$ м в точке S на оси симметрии. Как показано на рисунке (c), его изображение обозначим S'.

3.1. Найдите OS', соответствующее главному фокусу зонной пластинки. Справедлива ли формула тонкой линзы?

3.2. Если пластинка формирует несколько изображений, на каком расстоянии s' от O формируется изображение, ближайшее к рассмотренному в предыдущем пункте? Чему равно фокусное расстояние f' соответствующего вторичного фокуса (формула тонкой линзы неприменима)?

3.3. Если предмет расположен слева от зонной пластинки на расстоянии $\frac{OP_0'}{2}$ от точки O, найдите расстояния s'' и s''' до главного и вторичного изображений, соответствующих фокусам, рассмотренным в предыдущем пункте (формула тонкой линзы также неприменима). Действительные они или мнимые?

CN21-T2. В июне 2021 года пилотируемый корабль «Шэньчжоу-12» был успешно состыкован с космической станцией «Тяньгун», для чего необходимо было решить проблему встречи объекта-преследователя («Шэньчжоу-12») и цели (космической станции) на околоземной орбите. В этой задаче рассматривается использование гомановской траектории для изучения того, как объект должен менять свои скорость и направление движения, чтобы встретиться с целью на орбите.

Как показано на рисунке (a), изначально цель A и объект c движутся по круговой орбите радиусом r_0 против часовой стрелки со скоростью v_0. Их положения в момент времени $t = 0$:

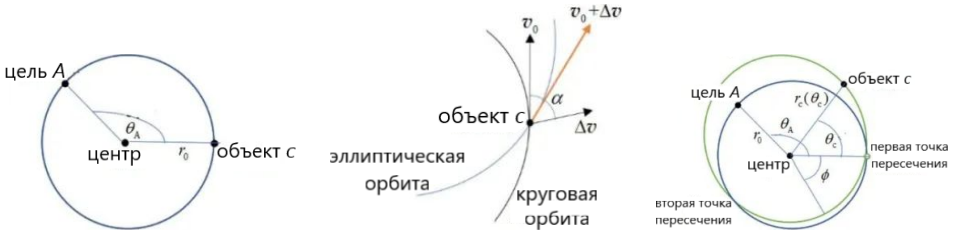
$$\theta_{A,i} = \theta_0,\ \theta_{c,i} = 0,\ r_{A,i} = r_{c,i} = r_0.$$

В этот момент включается двигатель объекта c, и его скорость мгновенно получает приращение $\Delta\vec{v}$, как показано на рисунке (b). Благодаря этому орбита c также мгновенно меняется с круговой радиусом r_0 на эллиптическую орбиту, показанную на рисунке (c). Угол между большой полуосью новой орбиты и полярной осью (проходящей через центр и начальное положение c) обозначим ϕ (ϕ отсчитывается по часовой стрелке), угол между радиус-вектором c и полярной осью обозначим θ_c (отсчитывается против часовой стрелки), а расстояние между центром и c – $r_c(\theta_c)$.

Известно, что эллиптическая орбита, большая полуось которой лежит на полярной оси, а начало координат которой представляет собой её правый фокус, задаётся в полярных координатах в виде:

$$r(\theta) = \frac{R}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

где R – фокальный параметр орбиты, а ε – её эксцентриситет.



К задаче CN21-T2

1. Если масса объекта m, его полная механическая энергия E и момент импульса L известны, выразите через эти величины и r_0, v_0 параметры орбиты R и ε.

2. Запишите уравнение орбиты $r_c(\theta_c)$ объекта после ускорения через r_0, эксцентриситет ε и ϕ.

3. Найдите отношение $\frac{T_c}{T_A}$ периодов обращения объекта и цели. Ответ выразите через ε и ϕ.

4. Определим два безразмерных параметра ускорения (см. рисунок (b)): безразмерное изменение скорости $\delta = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_0|}$ и угол α между $\vec{v}$ и $\Delta\vec{v}$ (отсчитывается по часовой стрелке). Выразите через δ и α величины ε и $\varepsilon\cos\phi$ для орбиты объекта c.

Рассмотрим ситуацию, когда объект c и цель A встречаются в первой точке пересечения их орбит (см. рисунок (c)). Пусть цель A проходит через эту точку n_A раз с момента времени $t = 0$, а объект c, не учитывая его начальное положение, – n_c раз. В момент времени $t = 0$:

$$\theta_{A,i} = \theta_0,\ \theta_{c,i} = 0.$$

5. Выразите n_A через n_c, θ_0, ε и ϕ.

6. Выразите n_A через δ и α и найдите при фиксированной δ два очевидных экстремума α_0 функции $n_A(\alpha)$ (экстремальность гарантирует, что даже если α немного отклонится α_0 из-за неидеального позиционирования объекта, решение всё равно будет примерно верное, что очень удобно при стыковке).

Выберите одно из найденных вами значений α_0.

7.1. δ имеет верхний предел $\delta_{\max}$ (т.е. при $\delta > \delta_{\max}$ объект c не встретится с целью A). Найдите $\delta_{\max}$.

7.2. Пусть $\theta_{A,i} = \theta_0$. Найдите соотношение между δ, θ_0, n_A и n_C. Найдите δ при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $n_A = 2$ и $n_c = 1$.

CN21-T3. Тёмная материя составляет почти четверть всей материи во Вселенной и может состоять из новых фундаментальных частиц. Учёные пытаются зарегистрировать взаимодействия между частицами тёмной материи и частицами, известными науке, и одним из важных типов экспериментов в данной

области является поиск взаимодействий тёмной материи с атомными ядрами. В таких экспериментах в качестве мишени используют какое-нибудь конкретное вещество, с ядрами атомов которого должны сталкиваться частицы тёмной материи при попадании в детектор. В ходе этого процесса изначально практически покоящиеся ядра атомов получают часть кинетической энергии частиц тёмной материи и движутся внутри мишени, создавая оптические и электрические сигналы. Детекторы обнаруживают эти сигналы и позволяют тем самым проводить наблюдения тёмной материи.

В качестве вещества мишени выбирается изотоп ксенона ^{132}Xe. Будем предполагать, что массы M частиц тёмной материи X и ядра ^{132}Xe в 132 раза превышают массу протона m_p, а в системе отсчёта центра масс частицы X и ядра ^{132}Xe рассеяние происходит изотропно (т.е. с одинаковой плотностью распределения вылетающих частиц по всем направлениям). Частица X входит в детектор вдоль оси z со скоростью $v_0 = 200$ / и сталкивается с неподвижным ядром-мишенью ^{132}Xe. Ответы пункта 1 приводите в лабораторной системе отсчёта (т.е. системе отсчёта, покоящейся относительно ядра ^{132}Xe до столкновения).

1.1. Найдите зависимость импульса $p(\theta)$ ядра ^{132}Xe от угла его вылета θ.

1.2. Найдите угловое распределение $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ вылетающий ядер ^{132}Xe (т.е. вероятностное распределение по углам вылета).

1.3. Найдите распределение $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E_\text{к}}$ по кинетической энергии вылетающих ядер ^{132}Xe.

Для представления размера взаимодействующих частиц обычно используют понятие сечения рассеяния, которое в некотором смысле представляет собой площадь поперечного сечения реакции, к примеру, площадь поперечного сечения столкновения двух твёрдых сфер радиусами r_1 и r_2 равна $\pi(r_1 + r_2)^2$.

Пусть теперь в детекторе находится 1.0 атомов ксенона, а сечение рассеяния столкновения частицы X с ядром ^{132}Xe составляет $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-38}$ см^2. Считайте, что плотность тёмной материи в окрестности Земли $\rho = 0.40\ m_p/\text{см}^3$, скорости всех её частиц X равны $v = 100$ км/с, постоянная Авогадро $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, а молярная масса протонов $\mu_p = 1.0$ г/моль.

2. Какое в среднем число столкновений N_C между частицами тёмной материи X и ядрами ^{132}Xe происходит за год?

Причиной возникновения регистрируемого детектором сигнала является большая кинетическая энергия, полученная ядром ^{132}Xe при столкновении. Сигнал может быть зарегистрирован только в том случае, когда кинетическая энергия превышает порог детектора, который в рассматриваемом эксперименте равен $E_{k\,\min} = 10$ кэВ. Масса протона $m_p = 0.94$ ГэВ/c^2, где c – скорость света в вакууме.

3. Какое в среднем число столкновений N_S между частицами тёмной материи X и ядрами ^{132}Xe наблюдается за год с учётом пороговой энергии детектора?

Скорость частиц тёмной материи в Млечном Пути подчиняется некоторому распределению $f(v)$, причём у их скоростей существует верхний предел v_max, т.е. при $v > v_\text{max}$, $f(v) = 0$.

4. Откуда возникает этот предел?

В лабораторной системе отсчёта на Земле верхний предел распределения скоростей частиц тёмной матери составляет $0.002c$. Кроме того, реальная масса частиц тёмной материи неизвестна.

5. При какой минимальной массе $m_{X\,\min}$ частиц тёмной материи описанный в задаче детектор ещё способен обнаружить сигналы?

CN21-T4. Электрические взаимодействия играют важную роль в живых организмах. Если поместить молекулу кислоты, к примеру, ДНК, в воду, то некоторые слабо связанные с ней атомы могут диссоциировать. Положительные ионы будут покидать молекулу, делая её тем самым отрицательно заряженной. Точно так же и клеточные мембраны в воде будут заряжаться отрицательно, а электростатическое отталкивание между ними предотвращает «слипание» макромолекул, мембран и клеток. Поскольку вещество в целом электрически нейтрально, то большое количество положительных ионов в растворе вызовет ослабление силы взаимодействия между мембранами с расстоянием. При решении задачи считайте, что температура всегда равна комнатной T.

Рассмотрим область вблизи поверхности с внешней стороны отрицательно заряженной клеточной мембраны (область, в которой плавают положительные ионы). Клеточную мембрану при этом можно рассматривать как бесконечную плоскость. Возьмём ось x перпендикулярно внешней поверхности мембраны с началом на ней. Диэлектрическая проницаемость раствора, окружающего мембрану, равна ε, а плотность поверхностного заряда на мембране равна $-\sigma$ ($\sigma > 0$). Система находится в тепловом равновесии с окружающей средой. Из-за электростатического взаимодействия плотность положительных ионов в растворе неоднородна, но можно считать, что каждая часть локально находится в равновесии. Поведение положительных ионов при этом аналогично поведению молекул в атмосфере с тем лишь исключением, что на положительные ионы действует электрическое поле, а на молекулы атмосферы – гравитационное. Примем концентрацию положительных ионов n_0 у самой поверхности мембраны за неопределённую постоянную. Заряд электрона $-e$, заряд положительного иона $+e$, постоянная Больцмана k. Силу тяжести и вязкость воды не учитывайте.

1.1. Запишите дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять потенциал электрического поля φ.

Подсказка: согласно распределению Больцмана вероятность того, что частица находится в состоянии с энергией E, пропорциональна $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, где T – абсолютная температура среды.

Поверхность клеточной мембраны можно считать проводящей, а потенциал на её поверхности выбирается равным нулю.

1.2. Запишите граничные условия, которым удовлетворяет потенциал φ на поверхности мембраны.

Для уравнения, полученного в пункте 1.1, при заданных граничных условиях в качестве анзаца возьмём логарифмическую функцию $\varphi(x) = A\ln(1 + Bx)$.

1.3. Определите n_0, A и B. Выразите $\varphi(x)$ и $n(x)$ (концентрация положительных ионов в точке x) через σ, ε, T, e и k.

1.4. Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

1.5. Найдите энергию электрического поля U_f и суммарную потенциальную энергию положительных ионов U_e в этом поле, приходящуюся на единицу площади мембраны.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда две клетки расположены близко друг к другу. Происходящее между двумя их мембранами может быть изучено с помощью следующей упрощённой модели. Рассмотрим две однородные отрицательно заряженные с поверхностной плотностью $-\sigma$ параллельные бесконечные пластины, расположенные на расстоянии $2D$ друг от друга. В качестве начала координат выберем середину между пластинами, ось x направим перпендикулярно им, а потенциал в начале координат примем равным нулю. За неопределённую постоянную вновь примем концентрацию положительных ионов n_0 при $x = 0$. В качестве анзаца в этот раз возьмём функцию $\varphi(x) = A \ln[\cos(Bx)]$.

2.1. Определите A и B. Выразите ответ через T, ε, e, k и n_0.

2.2. Выразите n_0 через D, σ, ε, T, e, k и θ (θ – решение трансцендентного уравнения, которое должно вам встретиться).

2.3. Найдите разность $\Delta n \equiv n(\pm D) - n_0$ между концентрациями положительных ионов у поверхности двух мембран и посередине между ними. Выразите ответ через σ, ε, T и k.

2.4. Покажите, что полученное $n(x)$ гарантирует электрическую нейтральность системы.

2.5. Найдите силу f, действующую на единицу площади заряженной плоскости (мембраны). Известно, что внутри и снаружи мембрана заполнена водой одинаковой плотности.

Подсказка: положительные ионы в воде ведут себя как идеальный газ и локально находятся в тепловом равновесии.

2.6. При неизменных прочих условиях в приближении мембран как бесконечных пластин исследуйте поведение f в двух предельных случаях – большого расстояния D и малого.

CN21-T5. Спиновый магнитный момент электрона равен

$$\vec{\mu} = \frac{-e}{m}\vec{S},$$

где $-e$ ($e > 0$) – заряд электрона, $\frac{-e}{m}$ – отношение заряда к массе, $\vec{S}$ – спин электрона, z-компонента которого S_z может принимать только два значения: $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, а h – постоянная Планка. Будем считать, что магнитный момент атома с хорошей точностью равен спиновому магнитному моменту его электронов.

Когда парамагнетик помещается во внешнее магнитное поле, происходит его намагничивание. Причина тому – изменение вероятности магнитных мо-

ментов его молекул быть направленными параллельно или антипараллельно полю. Степень намагниченности описывается магнитным моментом на единицу объёма $\vec{M}$, и $\vec{M} = \chi\vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость, $\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ – напряжённость магнитного поля, $\vec{B}$ – магнитная индукция, а μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. В привычном нам диапазоне температур T имеет место $\chi \ll 1$, $kT \gg \frac{e\hbar}{2m}B$ (k – постоянная Больцмана).

1.1. Предполагая, что магнитная индукция $\vec{B}$ однородна, а концентрация частиц парамагнетика равна n, выведите с помощью распределения Больцмана приближённое выражение для магнитной восприимчивости χ. Оно имеет вид $\chi = \frac{C}{T}$. Найдите C.

Подсказка: согласно распределению Больцмана вероятность нахождения частицы в состоянии с энергией E при температуре T пропорциональна $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$.

Ферромагнетики отличаются от парамагнетиков тем, что при температуре ниже точки Кюри они могут создавать довольно высокую намагниченность и поддерживать её в отсутствие внешнего поля. Такое явление называется спонтанной намагниченностью. При спонтанной намагниченности в веществе возникают так называемые домены, внутри которых магнитные моменты молекул сонаправлены друг с другом вследствие квантовых эффектов. Упрощённо же можно считать, что в них существует сильное эквивалентное магнитное поле – молекулярное поле Вейсса. Это поле примерно на три порядка больше поля, создаваемого спиновыми магнитными моментами на межатомном расстоянии.

Выше точки Кюри ферромагнетик превращается в парамагнетик, магнитная восприимчивость которого описывается законом Кюри–Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$

(где θ – температура Кюри), отличающимся от закона для обычного парамагнетика. Разница возникает из-за молекулярного поля H_m, которое можно записать в виде

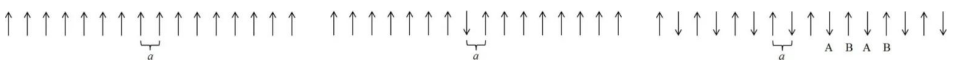
$$\vec{H}_m = \gamma\vec{M}.$$

Концентрация частиц в ферромагнетике n и температура Кюри θ известны.

1.2. Найдите выражение для γ. Выведите выражение для молекулярного поля H_m, когда все магнитные моменты сонаправлены.

В кристаллах ферромагнетика атомы располагаются в узлах кристаллической решётки. Магнитное поле, воспринимаемое каждым атомом, можно понимать как среднее молекулярное поле, создаваемое его соседями.

Рассмотрим одномерную систему спинов, показанную на рисунке (а), магнитные моменты всех частиц в которой сонаправлены. Температура Кюри этой системы равна θ. Считайте, что соотношение между H_m и θ, выведенное вами в пункте 1.2, сохраняется, количество узлов решётки равно N ($N \gg 1$), и в каждом узле находится один атом. При спонтанной намагниченности все спины сонаправлены, поскольку такое положение минимизирует энергию системы.



(a) (b) (c)

К задаче CN21-T5

2.1. Найдите, какой вклад H'_m в молекулярное поле вносит каждый спин в соседнем с ним узле решётки. Найдите магнитную энергию системы спинов E_N.

Предположим теперь, что спин в одном из внутренних узлов решётки перевернули, и он стал антипараллелен остальным, как показано на рисунке (b).

2.2. На какую величину ΔE увеличилась энергия системы спинов по сравнению с ситуацией, описанной на рисунке (a)?

Если соседние спины в кристаллической решётке вещества направлены противоположно, то такое вещество называется антиферромагнетиком. У антиферромагнетиков особая структура решётки – она состоит из чередующихся узлов двух типов A и B, как показано на рисунке (c). Направление молекулярного поля ближайших спинов в антиферромагнетике противоположно направлению самого спина, поэтому при расчётах учитывается также поле, создаваемое спинами в соседних узлах того же типа. Таким образом, молекулярное поле можно выразить в виде:

$$\vec{H}_{mA} = -\alpha_{AB}\vec{\mu}_B - \alpha_{AA}\vec{\mu}_A, \quad \vec{H}_{mB} = -\alpha_{BA}\vec{\mu}_A - \alpha_{BB}\vec{\mu}_B,$$

где $\vec{\mu}_A$ и $\vec{\mu}_B$ – спиновый магнитный момент атомов в узлах A и B соответственно. Если в узлах каждого из типов находится только по одному типу атомов, то $\alpha_{AA} = \alpha_{BB} = \alpha$, $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} = \beta$, $\beta > |\alpha|$.

3.1. Найдите магнитную энергию E_N антиферромагнетика с N ($N \gg 1$) узлами (по $\frac{N}{2}$ узлов типа A и типа B).

Температура Нееля – это температура, выше которой антиферромагнетик теряет свои свойства и превращается в парамагнетик. При этом намагниченность, создаваемая спинами, находящимися в узлах типа A и типа B, равна соответственно:

$$M_A = \frac{C}{2T}H_A, \quad M_B = \frac{C}{2T}H_B,$$

где коэффициент C совпадает с найденным в пункте 1.1.

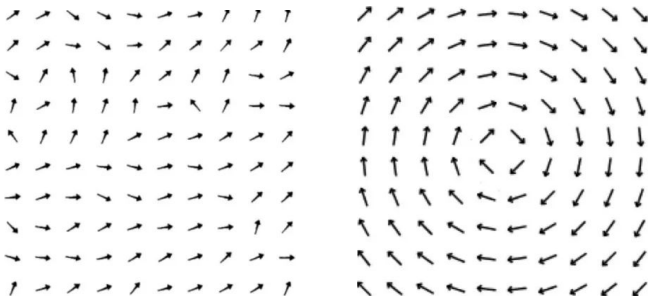
3.2. Найдите температуру Нееля T одномерного антиферромагнетика.

Рассмотрим теперь другую ситуацию. Пусть атомы расположены в узлах двумерной квадратной решётки на плоскости $x - y$. Постоянная решётки равна a, а магнитные моменты атомов могут лежать в произвольном направлении в этой плоскости. Стрелками на рисунке (d) показано распределение магнитных моментов в квадратной области плоскости размером L ($L \gg a$). Из-за молекулярного поля между ближайшими соседями в этой решётке возникает относительно сильное взаимодействие. Пусть угол между спином $\vec{S}_i$ в i-той точке

решётки и осью x составляет $\theta_i \in [0; 2\pi]$, тогда магнитная энергия системы записывается в виде:

$$E(\{\theta_i\}) = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j),$$

где J' и J (J',$J > 0$) – постоянные, а $\langle i,j \rangle$ обозначает все различные пары соседних узлов i и j (узел бесконечной квадратной решётки имеет 4 соседей). Конфигурация системы задаётся набором $\{\theta_i\}$. Если считать, что система находится в тепловом равновесии с окружающей средой, а её объём остаётся постоянным, то можно ввести свободную энергию Гельмгольца системы спинов в этот момент как $F = E - TS$, где E – внутренняя энергия системы, а S – её энтропия.



(d) (e)

К задаче CN21-T5

Одна из возможных конфигураций – вихрь – показана на рисунке (e). При обходе вихря вокруг центра по замкнутому контуру сумма разностей углов, задающих ориентацию магнитных моментов, в соседних точках $\langle i,j \rangle$ выбранного контура равна:

$$\sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j) = 2\pi l,$$

где l – натуральное число, задающее структуру вихря. На рисунке 5 показан случай $l = 1$. Для удобства в качестве замкнутого контура возьмём окружность радиуса r с центром в центре вихря.

4.1. Найдите среднее значение разности ориентационных углов $\langle \theta_i - \theta_j \rangle$ между двумя соседними узлами решётки на окружности.

Когда радиус окружности r достаточно большой, можно считать, что спины расположены последовательно в ряд концентрических окружностей с шагом радиуса a, а угол между соседними магнитными моментами на каждой из окружностей можно считать равным нулю. Таким же приближением можно воспользоваться и в области малого радиуса, поскольку её вклад в полную энергию мал.

4.2. Оцените энергию E_{vortex} вихря, показанного на рисунке 5.

Если центр вихря находится в другой точке, то можно считать, что система находится в другом состоянии. Пусть на квадратной области решётки размером L и постоянной решётки a находится один вихрь.

4.3. Оцените число возможных состояний Ω такой системы. Найдите энтропию системы $S \equiv k \ln \Omega$.

Если для системы существует температура, выше и ниже которой свойства системы качественно различаются, то такое явление называется фазовым переходом.

4.4. Найдите температуру T фазового перехода рассматриваемой системы. Опишите этот фазовый переход.

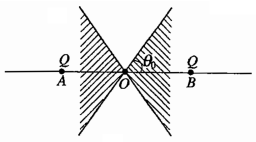
Ответы

CN84-T1. 1. $\mu \geq \tan \mu$
2. $d_{min} = l/(1 + \mu \cot \theta)$

CN84-T2. $T = \dfrac{[QB + m\omega]\, R\omega}{2\pi}$

CN84-T3. 1. С макроскопической точки зрения температура представляет собой меру нагретости тел.
С микроскопической точки зрения температура представляет собой меру теплового движения молекул тела, и его абсолютная температура пропорциональна средней кинетической энергии теплового движения его молекул.
2. Не обязательно. Дело в том, что для измерения температуры используется объём тела, законы изменения которого в зависимости от температуры для ртути и спирта могут быть несколько различны. Поэтому, если точка плавления и кипения воды откалиброваны на 0 ° и 100 ° соответственно, а шкала термометров поделена на 100 частей, измеряемые ими температуры могут не совпадать.
3. Для температур выше температуры плавления стекла и ниже температуры плавления ртути можно использовать газовый термометр, термометр сопротивления, термопару и т.д.
Такие высокие и низкие температура всё ещё можно выражать в градусах Цельсия, потому что температура в градусах Цельсия определяется как $t = T - 273.15$, где T – термодинамическая температура.
4. Для теплового излучения абсолютно чёрного тела справедливо, что длина волны с наивысшей интенсивностью обратно пропорциональная его абсолютной температуре. Солнце можно приближённо считать абсолютно чёрным телом, и температуру его поверхности можно определить, измерив длину волны с наивысшей интенсивностью в его спектре.

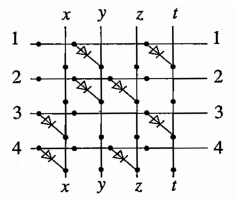
CN84-T5. 1. Частица будет находиться в устойчивом положении равновесия, если направление её движения лежит в заштрихованной области при $q > 0$ и вне её при $q < 0$, где $\theta_0 = \arccos 1/(\sqrt{3}) = 54.74°$.

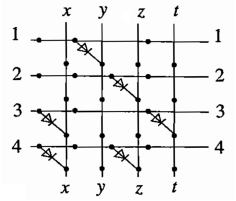


CN84-T5. 2. Частица совершает гармонические колебания с периодом

$$T = \begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{mr^3}{2\,|q|\,Q\,(3\cos^2\theta - 1)}}, & q > 0 \\ 2\pi\sqrt{\dfrac{mr^3}{2\,|q|\,Q\,(1 - 3\cos^2\theta)}}, & q < 0 \end{cases}$$

CN84-T6. 1.





2. **Ход разработки схемы:**

1. Когда к линии управления лампой не подключен ни один диод, управляемая ей лампа *горит*.

2. Несложно заметить, что когда $+$ диода подключен к n, а $-$ – к m, то это не вносит вклада в работу схемы независимо от потенциала n. Лампа, управляемая соответствующей линией, всё так же будет гореть, а значит, что $+$ *используемых диодов должен быть подключен к* m, *а* $-$ – *к* n.

3. Далее, несложно видеть, что подключение линии управления через диод к точке с большим потенциалом не вносит вклад в работу схемы, и соответствующая лампа D гаснет, только когда линия управления подключена *к точке с меньшим потенциалом*, что фактически эквивалентно закорачиванию D в помощью открывшегося диода.

4. Таким образом, при каждом из четырёх положений переключателей нужно обращать внимание на те два провода из x, y, z и t, напряжение на которых оказывается наименьшим. Тогда управляющая линии лампы, которая должна гореть при соответствующем положении переключателей, *не должна быть подключена к проводам с низким напряжением*. Это позволяет определить пары точек подключения mn, которые не должны быть соединены.

5. Проверьте полученную схему при других положениях переключателей. Если какой-то из диодов оказывается лишним, *уберите его*.

CN85-T1. 1. $0 < r\cos\beta - l\cos\alpha < \dfrac{3}{2}[l-r]$

2. $\alpha = \arccos\left[\dfrac{r}{l}\cos\beta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{l-r}{l}\right]$

CN85-T2. 1. $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{mV_1V_2}{pS^2\,(V_1+V_2)}}$

2. $\tau'/(\tau) = \sqrt{T/(T')} = 0.95$

CN85-T3.1. 1. $I_G = \pi D^2 k/(16r)$

2. $I_G = \pi D^2 k/(16r)$

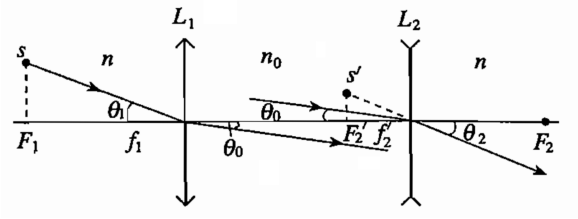
3. $I_G = \pi D^2 k/(8r)$

CN85-T3.2. 1. $C' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}C = 0.618C$

2. $C_\infty = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}C = 0.618C$

3. $C_{x\infty} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}C = 0.618C$

CN85-T4.1. 1.



2. $s'F_2' = 1$ см

CN85-T4.2. 1. Полоса будет светлой.

2. $\theta = \arcsin\dfrac{h}{d\sqrt{2meU}}$, где h – постоянная Планка.

CN85-T5. 1. $\omega = \sqrt{3Gm/(a^3)}$

2. $\omega' = \sqrt{(G\,(m_A + m_B + m_C))/a^3}$

CN86-T1.1. $t = \dfrac{\ln\dfrac{p_0}{p}}{8\ln\left(1+\dfrac{V}{V_0}\right)}$ мин $= 3.4$ мин

CN86-T1.2. 1. $a = \dfrac{2a_0}{A}\dfrac{m_e}{m_{\mu^-}} = \dfrac{5.11\cdot 10^{-13}}{A}$

2. $A > 94$

CN86-T2. 1. $v_B = \sqrt{gR/3}$
2. $l = h - R/4$
3. $t = L\sqrt{3}/(\sqrt{gR})$
Тело A упадёт с левой стороны платформы.

CN86-T3. 1. $I = V/r = 10$
2. $\langle P \rangle = 52.5$

CN86-T4. 1. $q_2 = Q/3$, +
2. $q_2' = 2Q/9$, +
3. $q_2'' = Q/(12)$, −

CN86-T5. $$\Delta\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{4}{3}, & \mu = \dfrac{1}{2} \\ \arctan\dfrac{2\mu+1}{2-\mu} + \arctan\dfrac{\mu+2}{1-2\mu} - \dfrac{\pi}{2}, & \mu < \dfrac{1}{2} \\ \arctan 2\mu + 12 - \mu + \arctan\mu - \arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}, & \mu > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

CN86-T6. 1. $a = f\lambda/(\Delta x) = 0.5$ мм
2. $d = D\Delta x/(2\lambda) = 4$

CN87-T1. 1. $\theta = \pi/2$
2. $\theta = \begin{cases} \arcsin l, & l \le 1 \text{ м} \\ \pi/2, & l > 1 \text{ м} \end{cases}$

CN87-T2.1. $T/E = E/(2Mc^2)$

CN87-T2.2. $T = N_A m_p c^2/(3R) \approx 3.7 \cdot 10^{12}$ K

CN87-T2.3. $l/d \approx 17$

CN87-T3. $E = -G\dfrac{mM}{2a}$, $S = \dfrac{b}{2}\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$, $T = \dfrac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{GM}}$

CN87-T4. Да, можно.
Необходимо измерить попарные сопротивления между любыми тремя точками узла. Два из них должны совпадать, а одно должно отличаться. Если оно не равно 1 Ω, то неисправным является резистор, подключенный к этим двум узлам. Если же оно равно 1 Ω, то неисправным является резистор, подключенный между другими двумя узлами.

CN87-T5. 1. $k = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)Mg}{2\pi^2 R}$
2. Резинка проскакивает через шар и падает на пол, поэтому $l = 2\pi a$

CN88-T1. 1. Центр масс C будет двигаться со скоростью $v_C = \dfrac{d_0}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, бруски будут колебаться относительно него, находясь в противофазе.

2. $f = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}, a = \dfrac{d_0}{2\sqrt{2}}, E_C = \dfrac{1}{4}kd_0^2$

CN88-T2.1. 1. $E_O = \dfrac{4\pi k Q_0}{S}$

2. $E_a = \dfrac{2}{1+\varepsilon}\dfrac{4\pi k Q_0}{S}$

3. $E_b = \dfrac{2}{\varepsilon+1}\dfrac{4\pi k Q_0}{S}$

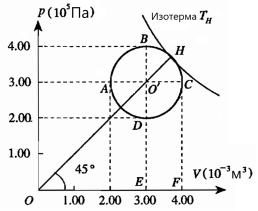
4. $Q_1 = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}Q_0$

5. $Q_2 = \dfrac{1}{\varepsilon+1}Q_0$

6. $Q_1 = -\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}Q_0$

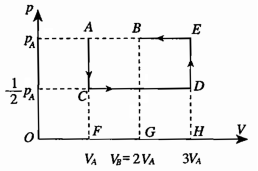
CN88-T2.2. $R_{ab} = R_0$

CN88-T3.1. 1.



2. $Q_{CD} = -1122$ Дж, $\Delta E_{CD} = -900$ Дж, $W_{CD} = 222$ Дж

CN88-T3.2. 1.



CN88-T4.1. $n = CE/(AE) = 1.33$

CN88-T4.2. $\Gamma = 3$ Воспринимаемое изображение будет лежать на прямой CE на расстоянии $OA' = 4R$ от точки O.

CN88-T5.1. $\dfrac{1}{\lambda_{n-2}} = \left[\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right] R,\ R = \dfrac{2^2}{\lambda_0} = 1.0972 \cdot 10^{7\ -1}$

CN88-T5.2. $R = GM_S/(c^2) = 1.5 \cdot 10^3$ км

CN88-T6. $x = 55$, $t = 1.5\Delta t$

CN89-T1. 1. $t = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

2. $v_C = l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

$OC = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

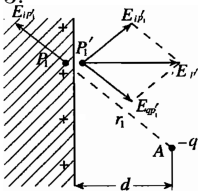
CN89-T2. 1. $m_{\text{Л}} = m_{\text{П}}$

2. $V_1 : V_2 = 3 : 1$

CN89-T3. 1. $E_{iP} = kq/(r^2)$

2. $E_{iP'} = kq/(r^2)$

3.



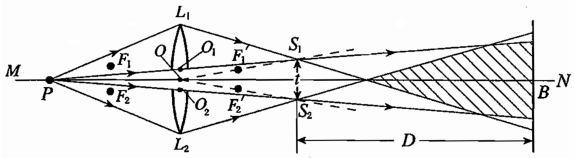
4. $F = -kq^2/(4d^2)$

5. Заряд должен распределиться по пластине равномерно.

CN89-T4. 1. $I_{AB} = 1$ А

2. $I_{CD} = 0.267$ А

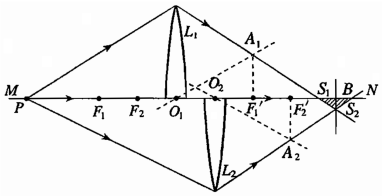
CN89-T5. 1.1.



1.2. $\Delta x = 2.75 \cdot 10^{-8}$ см

CN89-T5. 1.3. Δx будет расти.

2.1.

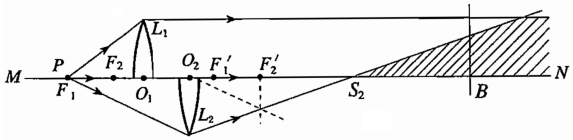


2.2. См. ответ к п. 2.1

2.3.



3.



CN89-T6. 1. $v_1/(v_2) = 7/(11)$

2. $N = 5,\ \dfrac{v_1}{v_2} \in \left\{5, \dfrac{25}{17}, \dfrac{25}{29}, \dfrac{13}{29}, \dfrac{1}{29}\right\}$

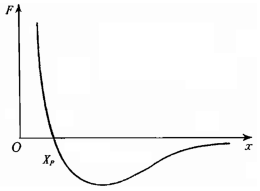
CN90-T1. $C_{AB} = \dfrac{29}{10}$ мкФ $= 2.9$ мкФ

CN90-T2. $U_M - U_N = -\pi D^2 b/(48)$

CN90-T3. $h = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 2\pi r^2 \rho m H}}{\pi r^2 \rho}$

CN90-T4. 1. $x_p = \left[1 + \sqrt{2}\right] l$

2.



CN90-T5. $\left[1 + \dfrac{m}{M}\right]^2 x^2 + y^2 = R^2$

CN90-T6. $b = 16.7$ см

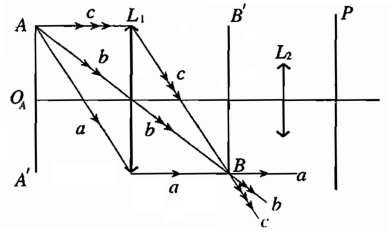
CN90-T7. $k_{max} = 21$,

$$v_{max} = \sqrt{\frac{49}{48}\frac{Fl}{m}}$$

CN90-T8.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} \omega & \leq & \sqrt{\dfrac{\mu_0 g}{\dfrac{m_A+m_B}{m_A}x - \dfrac{m_B}{m_A}l}} \\ x & > & \dfrac{m_B}{m_A+m_B}l \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lcl} \omega & \leq & \sqrt{\dfrac{\mu_0 g}{\dfrac{m_B}{m_A}l - \dfrac{m_A+m_B}{m_A}x}} \\ x & < & \dfrac{m_B}{m_A+m_B}l \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lcl} \omega & \in & \mathbb{R}_+ \\ x & = & \dfrac{m_B}{m_A+m_B}l \end{array}\right. \end{array}\right.$$

CN90-T9. 1.



2. Да. Линзу L необходимо поместить справа от L_1 на расстоянии не более $2f_1$, её минимальный диаметр должен составлять D, а оптимальное фокусное расстояние $f = 2f_1f_2/(f_1+f_2)$

CN91-T1. 1. Воздух возле разрядной иглы ионизируется под действием электрического поля, вследствие чего большое количество быстрых электронов попадает на частицы порошков a и b, заряжая их отрицательно. Вследствие хорошей проводимости частиц порошка a, их отрицательный заряд быстро сменяется на положительный при контакте с барабаном C. Так как C также заряжен положительно, на частицы порошка a действует отталкивающая сила, поэтому они падаю в лоток F. Частицы же порошка b, обладая изолирующими свойствами, остаются после контакта с барабаном C отрицательно заряженными, потому притягиваются к его поверхности и вращаются с ним, пока под действием силы тяжести не упадут в лоток E.

CN91-T1. 2. Частицы порошка a попадают в лоток F, частицы порошка b – в E.

3. Скребок D необходим, так как достаточно мелкие частицы порошка b не могут упасть в лоток E под действием силы тяжести.

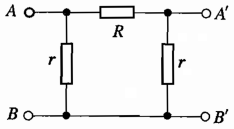
4. Если заземлить не барабан C, а разрядную иглу G, то сепаратор всё равно будет работать, однако тогда барабан будет иметь очень большое напряжение относительно земли, что недопустимо с практической точки зрения, так как будет представлять значительную опасность для оператора сепаратора.

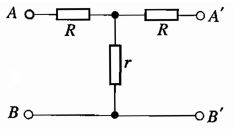
Примечание: даже если электроны не будут попадать на частицы порошка, разделение всё равно будет происходить, так как поляризационные свойства частиц порошка b позволят ему притягиваться к барабану C и вращаться вместе с ним.

CN91-T2. $E_0 = \dfrac{2}{5}E_c = 300$ эВ

CN91-T3. $T_2 = \dfrac{2nR\,(T_1 - T_0) + W}{nR\,(T_1 - T_0) + W}T_1$

CN91-T4. 1.





CN91-T5. $\dfrac{H}{h} \in \left[\dfrac{m+M}{M}; \dfrac{3}{2} + \dfrac{5m}{4M}\right] = [1.4; 2]$

CN91-T6. $M_1 = M\dfrac{RT/(\mu) - p_s V}{RT/(\mu) - p_s/(\rho_f)} = 0.84$ кг

CN91-T7. $\mu = 10/(93) = 0.11$

CN91-T8. 1. $v_0 = k\,(\mu_A + \mu_B)\sqrt{\dfrac{2g\,(L-l)}{\mu_B - \mu_A}}$, $k \in \mathbb{N}$

2. $v_0' = \left[k\,(\mu_A + \mu_B) + \sqrt{\mu_A \mu_B}\right]\sqrt{\dfrac{2g\,(L-l)}{\mu_B - \mu_A}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$

3. Нет, такого значения v_0 не существует.

CN92-T1. $L_{max} = 4h = 200$, $\theta_0 = \pi/3$

CN92-T2. $T_2 = 327\ \ = 54$ °C

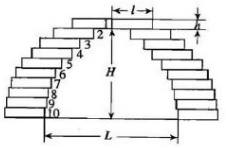
CN92-T3.
$$\begin{cases} Q_0\left[1+\dfrac{gt^2}{2\,(p-1)\,L}\right],\ 0<t\le\sqrt{\dfrac{2L'}{g}}, \\ Q_0\left[1+\dfrac{L'}{(p-1)\,L}\right],\ \sqrt{\dfrac{2L'}{g}}<t\le\sqrt{\dfrac{2L}{g}}, \\ Q_0\left[1+\dfrac{L'}{(p-1)\,L}-\dfrac{gt^2}{2\,(p-1)\,L}\right],\ \sqrt{\dfrac{2L}{g}}<t\le\sqrt{\dfrac{2\,(L+L')}{g}}, \\ Q_0,\ t>\sqrt{\dfrac{2\,(L+L')}{g}}, \end{cases}$$
где $Q_0=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 L^2 V_0}{D}$, где $\varepsilon\varepsilon_0$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха.

CN92-T4.
1. $b=5$ мм
2. $u^*=1170$ мм
3. $b'=30$ мм, изображение стало *мнимым*.

CN92-T5.
1. $N=2^n=8$, $U=\left\{\dfrac{k}{3\cdot 2^{n-1}}\ :k\in\overline{(0,2^n-1)}\right\}$
2. $U_\infty=2/3$

CN92-T6.
1. $a=2g\sqrt{z/(4z+k)}$
2. $z\in\left[0;\mu^2k/4\right]$
3. $z\in\mathbb{R}_+$
4. $z\in[0;k/(36)]\cup[k/4;+\infty)$

CN93-T1.
1.



$$\frac{L}{H}=\frac{4}{N-1}\sum\nolimits_{n=1}^{N/2-1}\frac{1}{n}=1.258$$

CN93-T2.
$$t=\frac{(U_b-v_0BL)\left(m+cB^2L^2\right)}{BLmg}$$

CN93-T3.
$$Q_0=\frac{Q}{8}\left[1+\left(4+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\frac{a}{r}\right]$$

CN93-T4.
$F=10$ см

CN93-T5. 1. $L_0 = \dfrac{14}{13}\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ см $= 2.01$ см
2. $A_1 = 14/(13)$ см $= 1.08$ см
3. $A_2 = 2.00$ см

CN93-T6. $\omega_1 = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}\dfrac{g}{L}}$, $\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}-1 = 0.414$ либо
$\omega_2 = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}\dfrac{g}{L}}$, $\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}+1 = 2.414$

CN93-T7. 1. $\Delta E = -8.203 \cdot 10^5$ Дж
2. $\Delta E' = -9349$ Дж
3. $\Delta\rho = 0.236$ кг/м^3

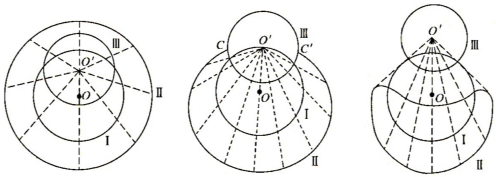
CN94-T1. 1. $L_1 = 12.3$ см
2. $d_1 = 4.45$ м

CN94-T2. $A_0 = 8.15 \cdot 10^4$ Дж

CN94-T4. 1. $v_{min} = 2mg/(kab) = 2.5$ м/с, $\alpha_{min} = 45^\circ$
2. $AO = 36$ см

CN94-T5. 2. $U_a = U_{min} + \dfrac{2\pi I_0}{\omega C}k$, $k \in \mathbb{N} \cap \{k \mid U_1 - U_0 \le U_a \le U_1 + U_0\}$

CN94-T6. 1.



$\mu > \tan\varphi$ $\mu = \tan\varphi$ $\mu < \tan\varphi$

Граница области в полярных координатах задаётся уравнением $(r-L)^2 + \dfrac{m^2g^2}{k^2}\sin^2\varphi + 2\dfrac{mg}{k}(r-L)\sin\varphi\cos\theta - \mu^2\dfrac{m^2g^2}{k^2}\cos^2\varphi = 0$, где угол θ отсчитывается от направления вверх по наклонной плоскости. При $\mu \ge \tan\varphi$ необходимо учитывать также область, в которой верёвка не натянута (III на рисунке).

CN95-T1. $F = \dfrac{W}{c}\left[1 - \dfrac{f}{\sqrt{f^2 + \left(\dfrac{D}{2}\right)^2}}\right] = 2.1 \cdot 10^{-10}$ Н

CN95-T2. 1. $Q = 2C_0\varepsilon^2/7$
2. $I = \varepsilon/(2R)$

CN95-T3. $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)/4$

CN95-T4. $L > \dfrac{2v_0}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

CN95-T5. При $a \in (0; 0.5]$ $x < 0$, при $a \in (0.5; 1)$ $x > 0$.

CN95-T6. 1. $k_0 = \pi^4 mg/(256h) = 0.19$ Н/м
2. $v = \dfrac{4}{\pi}\sqrt{2gH} = 8.0$ м/с

CN96-T1. 1. $W = \dfrac{m'(\rho' - \rho)\omega^2 l(4d + 3l)}{8\rho'} = 5.5 \cdot 10^{-7}$ Дж
2. $W' = \dfrac{m'(\rho - \rho'')\omega^2 l(4d + l)}{8\rho''} = 3.3 \cdot 10^{-7}$ Дж

CN96-T2. $B_0 = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}}$

CN96-T3. 1. $E_{1\to 2} = 3/4E$
2. $|\Delta\lambda|/(\lambda_0) = 3E/(8mc^2) = 5.4 \cdot 10^{-9} = 0.00000054\%$

CN96-T4. $Q = 10.68$ Дж

CN96-T5. $d = 2\sqrt{f_a f_b}$, $u = \dfrac{2f_a\sqrt{f_b}}{\sqrt{f_b} - \sqrt{f_a}}$

CN96-T6. $I = 2\varepsilon/(2R + nr)$

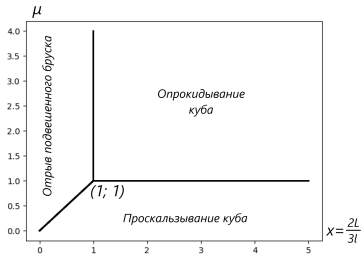
CN96-T7. $t = 0.26$ с

CN97-T1. 1.

$$\frac{m}{m_H} = \frac{\dfrac{m_N}{m_H} - \sqrt{\dfrac{E_H}{E_N}\dfrac{m_N}{m_H}}}{\sqrt{\dfrac{E_H}{E_N}\dfrac{m_N}{m_H}} - 1} = 1.03$$

CN97-T1. 2. ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}2_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

CN97-T2. 1. 1. $\mu < 1$, $\mu < x$ – первым начинается проскальзывание лежащего на доске куба. 2. $\mu > 1$, $x > 1$ – первым начинается опрокидывание куба. 3. $x < 1$, $x < \mu$ – первым начинается отрыв подвешенного бруска от земли.
2.



CN97-T4. 1. $U_{EA} = 0.695$ В
2. $I_0 = 40.5$ мА,
$U_{EG} = 0.52$ В

CN97-T5. 1. $N = \left\lfloor \dfrac{x_0 + a}{2a} \right\rfloor$
2. $t_{\cdot} = N\pi\sqrt{m/(2k)}$

CN97-T5. 3. $x_N = (-1)^N(x_0 - 2Na)$
4. $W = 4kNa(x_0 - Na)$

CN97-T6. 1. Гонщик должен выбрать внешнюю полосу независимо от его изначальной скорости v_d.
2. 1. Гонщик должен выбрать внешнюю полосу, если его изначальная скорость $\sqrt{\mu g R_0} < v_d < \dfrac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}$ 2. Гонщик должен выбрать внутреннюю полосу, если его изначальная скорость $v_d > \dfrac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}$ 3. Движение по каждой из полос займёт у гонщика одно и то же время, если его изначальная скорость $v_d = \dfrac{\sqrt{\mu g R_0} + \sqrt{\mu g R_1}}{\pi - 2}$

CN97-T7. 1. $\Delta q_1 = 5050q_1/3$, $\Delta q_{100} = 10100q_1/3$
2. $U_{max} = 634414\pi k d q_1/(L^2)$

CN98-T1. $F = \dfrac{1}{2}\dfrac{l\,(\mu_1 + \mu_2)}{l - (\mu_1 - \mu_2)\,h} mg$, $h \le \dfrac{1}{2\mu_1}$

CN98-T2. $W = RT_1/4$

CN98-T3. $PO_1 = \dfrac{f(2f+d)}{f+d}$, причём формирование изображения при произвольном положении объекта возможно лишь при $d < f$

CN98-T5. Угол i отсчитывается от прямой SD по часовой стрелке.

$$\left[\begin{array}{lll} v_1 = & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{2\pi R}{T} & (i_1 = 0), \\ v_2 = & \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\dfrac{2\pi R}{T} & (i_2 = \dfrac{\pi}{8}), \\ v_3 = & \dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{10}}{\sin\dfrac{\pi}{5}}\dfrac{2\pi R}{T} & (i_3 = 0), \\ v_4 = & \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}\dfrac{2\pi R}{T} & (i_4 = -\dfrac{\pi}{8}), \\ v_5 = & \sin\dfrac{5\pi}{12}\dfrac{2\pi R}{T} & (i_5 = -\dfrac{\pi}{12}). \end{array}\right.$$

CN98-T6. 1. $28.00^\circ < \theta_1 < 65.56^\circ$

2. $f = \dfrac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} mg$, при $f > 0$ сила направлена влево, при $f < 0$ – сила направлена вправо.

CN99-T1. После открытия вентиля вода в верхнем сосуде начнём испаряться, образующийся пар будет перетекать из верхнего сосуда в нижний и конденсироваться там; процесс будет продолжаться до тех пор, пока вся вода не окажется в нижнем сосуде – это и будет конечное состояние системы.

CN99-T2. На основе приведённых данных можно сделать вывод, что радиус орбиты Луны увеличивается со временем; скорость этого увеличения можно оценить как $\bar{v} = 0.42$ м/год

CN99-T3. Пучок частиц будет двигаться вдоль оси z со скоростью $v_{\|} = v_0\sqrt{1-(B/B_0)\sin{\alpha_0}^2}$, радиус «трубки» равен $r = \dfrac{mv_0\sin\alpha_0}{q\sqrt{BB_0}}$ и достигает в точках M минимального значения $r_M = \dfrac{mv_0\sin\alpha_0}{q\sqrt{B_0B_M}}$
Когда угол вылета частиц меньше критического значения $\alpha_{0L} = \sqrt{B_0/B_M}$, частицы будут пролетать точку M и покидать область магнитного поля.
Когда угол вылета частиц меньше критического, проекция скоростей частиц на ось Oz будет обнуляться при приближении к точкам M, в результате чего частицы будут «заперты» в магнитном поле, совершая колебания, симметричные относительно плоскости PP'.
При $\alpha_0 = \pi/2$ частицы будут вращаться в этой плоскости по окружностям радиуса $r_0 = mv_0/qB_0$

CN99-T4. Если $\mu_1 = 0$, то $AB \le \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$
Если $\mu_1 \ne 0$ и $\dfrac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} > \dfrac{l_2^2}{l_1^2}$,
то $AB \le \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}\left(\mu_1 l_1 + \sqrt{l_2^2 + \mu_1^2 l_2^2 - l_1^2}\right)$
Если $\mu_1 \ne 0$ и $\dfrac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} < \dfrac{l_2^2}{l_1^2}$,
то $AB \le \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\left(\mu_2 l_2 + \sqrt{l_1^2 + \mu_2^2 l_1^2 - l_2^2}\right)$
Если $\mu_1 \ne 0$ и $\dfrac{1+\mu_2^2}{1+\mu_1^2} = \dfrac{l_2^2}{l_1^2}$, то $AB \le \dfrac{\mu_1+\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}} l_1$

CN99-T5. $E_{k3} \ge 24E_P$

CN99-T6. 1. $\theta_1 = R_2/(R_1)$
2. $N = \dfrac{\arcsin\dfrac{1}{n} - \arcsin\dfrac{R_1}{nR_2}}{2(R_1 - R_2)}L$

CN99-T7. 1. $\nu = \nu_0/(1+gL/c^2) \approx \nu_0\left(1 - gL/(c^2)\right)$
2. $T_1 = T_0\left(1 + aL/(c^2)\right)$
3. Ускорения ящика должно быть направлено от источника к приёмнику и равно $a = g$

CN00-T1. 1. $l_1/(l_2) = l_3/(l_4)$
2. $G_P = \dfrac{1}{2l_P}\left[G_1 l_1 + G_3 l_1 + G_4 l_2 + G_5(l_1 - l_2)\right]$

CN00-T2. $$\tau(r) = \frac{v\left[\dfrac{2RT}{m_e N_A r} - \dfrac{GM_S}{r^2}\right]}{v^2 - \dfrac{RT}{m_e N_A}}$$

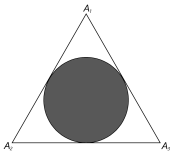
CN00-T3. 1. $R_3 = \dfrac{250r}{648}$

2. $R_n = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{5}{6}\right]^n r$

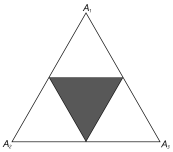
3. $s = \dfrac{\ln(6/5)}{\ln 2} = 0.263$

CN00-T4. 1. Система из двух плоских зеркал не может соответствовать описанию, данному в условии задачи. 2. Система из плоского зеркала и тонкой линзы может соответствовать описанию, если линза является собирающей, и расстояние D между ней и зеркалом равно её фокусному расстоянию f. 3. Система из двух тонких линз может соответствовать описанию, если обе линзы являются собирающими, их фокусные расстояния f_1 и f_2 равны, и расстояние D' между ними равно удвоенному фокусному, т.е. $D' = 2f_1 = 2f_2$.

CN00-T5. 1.



2.



CN01-T1. $$\mu_{min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$$

CN01-T2. 1. $v = 30$ м/с

2. $q = 6 \cdot 10^{-9}$ Кл

CN01-T3. 1. $n = 1/e$

2. $e = n'/n$ Фокусировка невозможна при $n' > n$, так как $e < 1$.

CN01-T4. Составляющая скоростей частиц вдоль оси цилиндра не изменится, пучок частиц сфокусируется в точке, лежащей на расстоянии $d = mv/(qKL)$

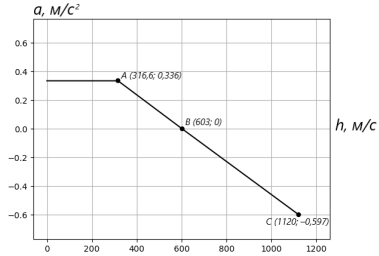
CN01-T5. 2. $M_{\text{б.м.}} = 1.4 \cdot 10^{11} M_S$
3. $M_{\text{гал.}} = 5.6 \cdot 10^{11} M_S$
4. $M_{\text{т.м.}} = 4.2 \cdot 10^{11} M_S$

CN01-T6. $0.548 \text{ м} = \dfrac{kl_0^2}{2\mu Mg} - d \le D \le L - d = 0.674 \text{ м},$

где $d = l_0 \left[1 - \cos\varphi_1 - \dfrac{\mu Mg}{2kl_0}\varphi_1^2\right],$

$\varphi_1 = 0.897$ – корень уравнения $\dfrac{\mu Mg}{kl_0}\varphi_1 = \sin\varphi_1.$

CN01-T7. 1. $H = 1120$ м
2. При $0 \le h_1 \le 316.6$ м ускорение воздушного шара будет оставаться постоянным и равным $a_0 = 0.336$ м/с^2, после чего будет с хорошей точностью линейно уменьшаться с высотой, достигая $a_2 = 0$ на высоте $h = 603$ м и $a_3 = -0.597$ м/с^2 в наивысшей точке.
3.



CN02-T1. 1. $\rho = \rho_0 \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = 5.26\rho$

2. $p_x = h/(\lambda)$, где h – постоянная Планка.
Т.к. $\Delta p_x = 0$, то из соотношения неопределённости Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \ge h$ следует, что координата электрона x не определена.

CN02-T2. 1. $n' = \dfrac{n_0 n}{n - \dfrac{R'}{R}(n - n_0)}$

CN02-T2. 2. При $n_0 < n$ этому условию удовлетворяют $\left[\dfrac{n_0 R'}{nR}\right]^2$ % падающих на пузырёк лучей;
при $n_0 > n$ этому условию удовлетворяют $\left[\dfrac{n_0 R'}{nR - nR' + n_0 R'}\right]^2$ % падающих на пузырёк лучей.

CN02-T3. 1. Экстремальные значения периода Ио наблюдаются, когда прямая, проходящая через Юпитер и Землю, будет касательной к орбите последней, причём наибольшему периоду соответствует движение Земли от Юпитера, наименьшему – движение к Юпитеру; влиянием движения Юпитера и Ио по сравнению с влиянием движения Земли можно пренебречь.
2. $c = 3.1 \cdot 10^8$ м/с

CN02-T4. Непосредственно после попадания пули скорость бруска A будет равна $v = 0.71$ м/с, он будет двигаться с ускорением $a = -3.27$ м/с^2, брусок B будет свободно падать вниз, нить не будет натянута.
Через $t_1 = 0.086$ с брусок A будет двигаться со скоростью $v_A = 0.14$ м/с, а брусок B – со скоростью $v_B = 0.86$ м/с. В этот момент нить снова натянется, к этому моменту бруски пройдут $H_1 = 0.037$ м.
После этого бруски будут двигаться с одинаковыми скоростями, равными сначала $v' = 0.41$ м/с, и ускорением $a' = -0.31$ м/с^2. Ещё через $t_2 = 1.31$ с бруски остановятся, пройдя к этому моменту ещё $H_2 = 0.27$ м.
Всего бруски пройдут $H = 0.31$ м.
Сразу после попадания пули скорость бруска A составит $v = \dfrac{mv_0\,(\cos\varphi - \mu\sin\varphi)}{m + m_A}$, если $45° < \varphi < \arctan\mu^{-1} = 78.7°$; и $v = 0$, если $78.7° \leq \varphi < 90°$.

CN02-T6. 1. 1) $E = 0$ и $B = 0$; 2) $E = 0$ и $B_x = 0$, $B_y = 0$, B_z произвольная ненулевая – магнитное поле направлено параллельно оси Oz; 3) E_x, E_y произвольные ненулевые, $E_z = 0$ – электрическое поле перпендикулярно оси Oz, B_z произвольная ненулевая, $B_x = -\dfrac{E_y}{v_1}$, $B_y = \dfrac{E_x}{v_1}$ – магнитное поле перпендикулярно электрическому и направлено под углом $\gamma_B = \arcsin\dfrac{E}{v_1 B}$ к оси Oz.

CN02-T6. 2. Ускорение $a_1 = 0$ означает, что равнодействующая сил, действующих на протон, равна нулю, поэтому возможны три случая: 1) полей нет; 2) электрического поля нет, а магнитное сонаправлено скорости протона, поэтому сила Лоренца равна нулю; 3) так как уравновешивающая его действие сила Лоренца может быть направлена только перпендикулярно скорости протона, электрическое поле есть и перпендикулярно оси Oz, магнитное поле есть.

3. 1) $E = 0$, $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = -\dfrac{ma_2}{v_1 q}$ – магнитное поле направлено противоположно оси Oz; 2) E_x произвольная ненулевая, $E_y = 0$, $E_z = 0$ – электрическое поле направлено параллельно оси Ox, $B_x = 0$, $B_y = \dfrac{E_x}{v_1}$, $B_z = -\dfrac{ma_2}{v_1 q}$ – магнитное поле перпендикулярно оси Ox.

CN03-T1. $R > \sqrt{25b^2 + 50ab - 23a^2} + a$

CN03-T2. $\Delta E = \dfrac{Gm_E m}{2a} \dfrac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$

CN03-T3. 1. $\Omega_0 = \dfrac{4MR}{l^4 B^2}$, $I_0 = \dfrac{2M}{l^2 B}$
2. $\Omega - 1 \leftrightarrow I - A$, $\Omega - 2 \leftrightarrow I - B$, $\Omega - 6 \leftrightarrow I - C$

CN03-T4. $\Delta t = 0.080 \dfrac{2\pi m}{qB_0}$, $(x; y) = \left(-0.968 \dfrac{mv_0}{qB_0}; -4.25 \dfrac{mv_0}{qB_0}\right)$

CN03-T5. 1. $D' = Db/a$
2. $D_0 = \sqrt{1.22 \cdot 2\lambda a} = 0.54 \cdot 10^{-3}$

CN03-T6. 1. $E_k = 1.74 \cdot 10^{-9}$ Дж
2. $m_1 = 46.4 \cdot 10^{-27}$ кг

CN04-T1. 1. $x \le R$
2. При $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_3 = 20°$ луч сможет распространяться внутри оптоволокна; при $\alpha_2 = 25°$ луч не сможет в него проникнуть.

CN04-T3. $W = 6.00 \cdot 10^{-2}$ Дж

CN04-T4. $Q = 15CE^2/(16)$

CN04-T5. $y = 0.354$ см

CN04-T6. 1.

При $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{\omega_0}\right)$

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{1}{2}v_0 t + \dfrac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0 t - l \\ x_b = \dfrac{1}{2}v_0 - t\dfrac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0 t \\ x_c = \dfrac{1}{2}v_0 t + \dfrac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0 t \\ x_d = \dfrac{1}{2}v_0 t - \dfrac{v_0}{2\omega_0}\sin\omega_0 t + l \end{cases}$$

При $t \in \left(\dfrac{\pi}{\omega_0}; +\infty\right)$

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{\pi v_0}{2\omega_0} - l \\ x_b = \dfrac{\pi v_0}{2\omega_0} \\ x_c = v_0 t - \dfrac{\pi v_0}{2\omega_0} \\ x_c = v_0 t - \dfrac{\pi v_0}{2\omega_0} + l \end{cases}$$

где $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$. Точка, в которой первый раз сталкиваются b и c, принимается за $x = 0$.

2. Бруски будут двигаться вправо со средней скоростью $v_0/2$.

В моменты времени $4n\pi v_0/(\omega_2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ бруски b и c будут сталкиваться (тогда $v_a = v_b = v_0$ и $v_c = v_d = 0$) и обмениваться скоростями.

В моменты времени $((2n-1)2\pi v_0)/\omega_2$, $n \in \mathbb{Z}_+$ бруски b и c будут соприкасаться (тогда $v_b = v_c = 0$, $v_a = v_d = v_0$), однако не будут взаимодействовать друг в другом. Здесь $\omega_2 = \sqrt{2k_2/m}$.

CN05-T1. 1. Свет частоты 1 пройдёт через пластинку быстрее при условии $\sin i > \dfrac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$, свет частоты 2 пройдёт через пластинку быстрее при условии $\sin i < \dfrac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$, свет обеих частот пройдёт через пластинку за одинаковое время при $\sin i = \dfrac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$

2.1. Свет частоты 2 пройдёт через пластинку быстрее при любых значениях угла i.

2.2. Свет частоты 1 пройдёт через пластинку быстрее при $79.4° < i < 90°$, свет частоты 1 пройдёт через пластинку быстрее при $0° < i < 79.4°$, свет обеих частот пройдёт через пластинку за одинаковое время при $i = 79.4°$

CN05-T2. $W_\mu = \dfrac{4\mu M g^2}{k}(m - 2\mu M) = 4.97$ Дж, $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}} = 2.22$ с

CN05-T3. $Q_A - Q_B = \dfrac{k}{2}(1-\alpha^2)\left[\dfrac{nRT_1}{p_0 S + mg}\right]^2$

CN05-T4. $\eta = 74\%$

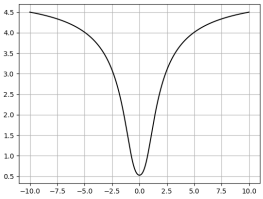
CN05-T5. 1. $\lambda_0 = \dfrac{2hc\left(m_0c^2 + \Delta E\right)}{\Delta E\left(2m_0c^2 + \Delta E\right)}$

2. $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{2u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$

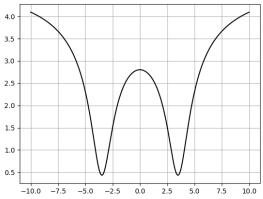
CN05-T6. 1. $\omega/(\omega_0) = 1/2$

2. $P_{\text{Д.}} = \dfrac{\pi h\rho_0\left(a_2 - a_1\right)R_0^2 I^2}{2\left[\rho_0\left(a_2 - a_1\right) + 2\pi hR_0\right]^2}$

CN05-T7. 1.



$D < \frac{R}{\sqrt{2}}$



$D > \frac{R}{\sqrt{2}}$

2. При $D < R/(\sqrt{2})$ возможен только уход частицы на бесконечность; при $D > R/(\sqrt{2})$ возможен как уход частицы на бесконечность, так и ангармонические колебания частицы в пространстве между кольцами.

CN06-T1. $L = 1.44 \cdot 10^8$ м

CN06-T2. 1. $\alpha = 90°$

2. $(3\cos\theta - 2)\left[\cos\theta + \left(2 + \sqrt{3}\right)\sin\theta\right] + 1 = 0 \implies \theta = 54.9°$

CN06-T3. Воздушная масса будет совершать гармонические колебания вокруг положения $z = 0$ с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{T_{e\ 0}}\left[\frac{\Delta T_e}{\Delta z} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\right]} = 1.1 \cdot 10^{-2}\ 1/\text{с}$$

CN06-T4. 1. $y_1 = -0.3d$, $y_2 = 0.9d$

2. Самая быстрая частица, пролетевшая через клапаны, оставляет след с координатой $y' = -0.138d$, самая медленная частица, пролетевшая через клапаны, оставляет след с координатой $y' = -0.138d$

CN06-T5. 1. $v_0 = dqB/(2m\cos\alpha)$, $t_0 = \pi m/(qB)$

2. $v_0 = \dfrac{2qB^2d - mE\left(4\cos\alpha^2 + \pi^2\sin\alpha^2\right)}{4mB\cos\alpha}$,

$x = d$, $y = -\dfrac{\pi mE}{\sqrt{2}qB^2}$, $z = -d + \dfrac{\pi^2 mE}{2qB^2}$

CN06-T6. $E = 7m_0c^2 = 1.05 \cdot 10^{-9}$ Дж

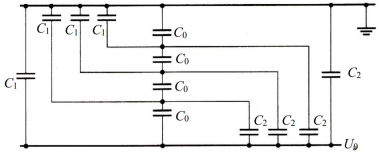
CN07-T1. $t = \sqrt{3}l/(4v_0)$

CN07-T2. $u_0 = 40.7$ км/с или $u_0 = 46.4$ км/с в зависимости от направления вращения корабля вокруг Солнца.

CN07-T3. $\Delta Q = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} H^2 + \dfrac{5}{4} mgH$

CN07-T4. 1. $R_1 = R_2/2$, $U_e = E_k R_2/(4\sqrt{2})$

2.



3. $U_{0max} = 369$ кВ

CN07-T5. 1. $m \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \dfrac{kqQ}{gd^2}$

2. Равновесие устойчиво при $y(m) > d/(\sqrt{2})$ и неустойчиво при $0 < y(m) \le d/(\sqrt{2})$

3. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\left(d^2 + y_1^2\right) y_1}{\left(2y_1^2 - d^2\right) g}}$

4. $\left[\begin{array}{l} y_3 < y_2 \\ y_3 > y_2, \quad m_2 g y_2 + \dfrac{kqQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}} > m_2 g y_3 + \dfrac{kqQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}}. \end{array} \right.$

CN07-T6. 1. $s' = \dfrac{(4s - n_g s + 4R)\, R}{2n_g s - 4s + n_g R - 4R}$

2. $v' = \dfrac{n_g^2 R^2 v}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2}$, $n_g = 2$

CN08-T1. 1. $v_p \ge v \sin\theta$

2. $L_r < \dfrac{d}{1 - \left(\dfrac{v_p}{v}\right)^2} \left[\cos\theta - \sqrt{\left(\dfrac{v_p}{v}\right)^2 - \sin^2\theta} \right]$

3. $L_r < \dfrac{1 + \dfrac{v_r}{v}}{1 - \left(\dfrac{v_p}{v}\right)^2} \left[\cos\theta - \sqrt{\left(\dfrac{v_p}{v}\right)^2 - \sin^2\theta} \right] d$

CN08-T2. 1.1. $N_1 = 3$

1.2.1. $H = \sqrt{(c\tau)^2 - (R\sin\theta)^2} - R(1-\cos\theta)$

1.2.2. $\Delta H = -\dfrac{R(R+H)\sin\theta\Delta\theta}{H + (1-\cos\theta)R}$

1.3. $\Delta H = \dfrac{c^2\tau\Delta\tau}{H + R(1-\cos\theta)}$

2.1. $H = 2.8\cdot 10^4$ км

2.2. $\Delta H = \mp 25$ м

2.3. $\Delta H = \pm 3.0$ м

3. $N_2 = 4$

4.1. $T - t = \dfrac{1}{2}\dfrac{gR^2}{c^2(R+h)}T = 7.3$ мкс

4.2. $t - T = \dfrac{gR}{c^2}\dfrac{h}{R+h}T = 46$ мкс

CN08-T3. 1. $C_{min} = 23.99$ юань

2. $C'_{min} = 2.52$ юань, $\Delta C_{min} = 21.47$ юань

CN08-T4. 1. $-e/(2C) < V_{AB} < e/(2C)$

2. $C = e/(2V_{AB)} = 8.0\cdot 10^{-16}$ Ф

CN08-T5. 1. $d_{min} = 1.33R$, $d_{max} = 1.79R$

2. $\theta = 83.6°$, $\varphi = 83.6°$ и $\varphi' = 0°$, где φ и φ' – углы между осью z и направлениями из точки O к концам дуги.

CN08-T6. $M = \theta_S^2 c^2 d/(8G) = 2.07\cdot 10^{30}$ кг

CN08-T7.1. 1. $E^+ = 2mk^2e^4/(\hbar^2) = 54.4$ эВ

2. $r_0 = 4\hbar^2/(7mke^2) = 0.0302$ нм, $E_0 = -49mk^2e^4/(16\hbar^2) = -83.4$ эВ, $E^+ = 17mk^2e^4/(16\hbar^2) = 29.0$ эВ

CN08-T7.2. 1. Частицы летят снизу вверх, их заряд положительный.

2. $N = 1.04\cdot 10^{-9}$

3. $F = 0.107$, $Q = 8.04\cdot 10^{-2}$

CN09-T1.1. $y = C - \dfrac{2\pi^2}{mg}(x-a)^2$

CN09-T1.2. $R_{AB} = \dfrac{7}{12}R$

CN09-T1.3. $d = 30$ мкм

CN09-T1.4. $U_0 = \dfrac{kT}{e}\ln\left(\dfrac{I_{SC}}{I_S} + 1\right)$, где I_S – ток обратного насыщения $p-n$ перехода.

CN09-T2. $\beta = \alpha^{(k-1)/2}$

CN09-T3. $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} d$

CN09-T4. $\dfrac{Q_0 - Q_0'}{Q_0} = \dfrac{T_2\,(T_0 - T_1)}{T_1\,(T_0 - T_2)}$

CN09-T5. $j_x = \dfrac{ne^2\tau E}{m\,(1+\omega^2\tau^2)}$,
$j_y = \dfrac{n\omega e^2\tau^2 E}{m\,(1+\omega^2\tau^2)}$

CN09-T6. 2. При $m = 1$ $\lambda_x = \dfrac{1}{\sqrt{\omega/(2\pi c) - (2d)^{-2}}}$
3. В полярных координатах огибающую левых концов пластин задаёт выражение $R = L\left[1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi c}{\omega d}\right)^2}\right]\left[1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi c}{\omega d}\right)^2}\cos\theta\right]$, где R – расстояние от оси Oy, θ – угол между направлением и осью Ox.

CN09-T7. 1. $\tau = 4\pi^2 c^3 \varepsilon_0^2 m^2 r_0^3/(e^4) = 1.56 \cdot 10^{-11}$ с, где $r_0 = e^2/(8\pi\varepsilon_0 E)$ – радиус атома водорода.
2. $P_0 = \gamma^4 Ie/(3n\varepsilon_0 R) = 2.17 \cdot 10^4$ Вт, где $R = E/(ecB)$ – радиус кривизны движения ультрарелятивистского электрона под действием магнитного поля.
3. $\Delta T = R/(c\gamma^3) = 9.51 \cdot 10^{-20}$ с

CN10-T1.1. $R' = \dfrac{4\pi^2 kR}{4\pi^2 k - M\omega^2}$

CN10-T1.2. $f' \in \left[\dfrac{fV}{V+u}; \dfrac{fV}{V-u}\right]$

CN10-T1.3. $T = T_0\left(1 - \dfrac{Mg}{p_0 A}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$

CN10-T1.4. $v_1 = 1.7 \cdot 10^6$ м/с, $v_1 = 2.8 \cdot 10^8$ м/с, $U = 8.4 \cdot 10^5$ В

CN10-T2. 1. $\mu_2 = 0.5$
2. $I = 10$ А

CN10-T3. 1. $\theta_1 = \pi/6$
2. $\theta_1 = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6}\right) = 78.2°$

CN10-T4. $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

CN10-T5. $E_1 = \dfrac{9}{70} mL \dfrac{1 - \dfrac{T_1}{T_a} + \dfrac{T_1}{T_a} \ln \dfrac{T_1}{T_a}}{1 - \dfrac{T_1}{T_a}} = 1.5 \cdot 10^{14}$ Дж

CN10-T6. 1. $E_{k\ max} = C_0 U^2 / (1 - e^2)$

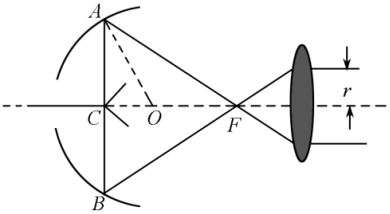
2. $I = \dfrac{C_0 U^2}{d} \sqrt{\dfrac{1 + e}{1 - e} \dfrac{C_0}{2m}}$

CN10-T7. 1. $I_{ba} = I_{cd} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \dfrac{Bl^2 \omega}{R} (\cos\theta - \sin\theta)$

$I_{ad} = I_{bc} = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \dfrac{Bl^2 \omega}{R} (\cos\theta - \sin\theta)$

2. $M = B^2 l^4 \omega / (2R)$

CN10-T8. 1.



2. $x = R \sin\left(\dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{f}{r}\right)$

CN11-T1. 1. $N = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) mg - \left(16 + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\right) kR = 1.6mg - 0.15kR$

2. $N = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) mg = 1.6mg$

CN11-T2. $l = l_1 - \dfrac{l_1 + I_2 - L + \dfrac{M + m_1 + m_2}{m_1} l_3}{1 + \sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}} \sqrt{\dfrac{M(m_1 + m_2)}{(M + m_2) m_1}}}$, $\Delta l_2 = \dfrac{l_1 + l_2 - L + \dfrac{M + m_1 + m_2}{m_1} l_3}{\dfrac{m_1 + m_2}{m_1} + \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}} \sqrt{\dfrac{(M + m_2)(m_1 + m_2)}{M m_1}}}$

CN11-T3. 1. $\Delta v_{\text{A}} = \left(\sqrt{\dfrac{6}{5}} - 1\right) R_{\text{e}} \sqrt{\dfrac{g}{r_{\text{A}}}} = 735$ м/с,

$\Delta v_{\text{B}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \sqrt{\dfrac{8}{15}}\right) R_{\text{e}} \sqrt{\dfrac{g}{r_A}} = 664$ м/с

2. $\Delta t_m = 1.50 \cdot 10^4$ с, $\Delta \varphi_{Am} = 981^\circ$

CN11-T4. 1. $T_1 = T_0 \dfrac{p_1}{p_0} \left\{ -\dfrac{7}{2} \dfrac{RT_0}{\mu v_0^2} \dfrac{p_1}{p_0} + \dfrac{1}{2} \sqrt{4 + \left(28 + \dfrac{8W}{p_0 S v_0}\right) \dfrac{RT_0}{\mu v_0^2} + \left(\dfrac{7RT_0}{\mu v_0^2} \dfrac{p_1}{p_0}\right)^2} \right\}$

2. $v_2 = v_0 \left[-\dfrac{7}{2} \dfrac{p_2}{p_0} \dfrac{RT_0}{\mu v_0^2} + \dfrac{1}{2} \sqrt{4 + 28 \dfrac{RT_0}{\mu v_0^2} + \left(\dfrac{7p_2}{p_0} \dfrac{RT_0}{\mu v_0^2}\right)^2} \right]$

CN11-T5. 1. $\alpha \geq 2\Theta$

2. $\Theta \leq \alpha \leq 90^\circ - \Theta$

CN11-T6. $\sqrt{\dfrac{k_e}{k_m}} = 2f \dfrac{C_2 a_1}{C_1} \sqrt{\dfrac{\pi a_2}{h}}$

CN11-T7. $L = B^2 l^2/(2k)$, $C = m/(B^2 l^2)$

CN11-T8. 1. $\nu = \dfrac{\nu_0}{1 + \dfrac{v_0}{c}}$, $v_1 - v_0 = -\dfrac{h\nu_0}{mc\left(1 + \dfrac{v_0}{c}\right)}$

2. $a \approx -h\nu_0/(mc\tau)$

3. $B = \dfrac{h\nu_0}{\mu} \dfrac{\sqrt{v_0^2 + 2az} - v_0}{c + v_0}$

4. $z = mv_0^2 c\tau/(2h\nu_{0)} = 0.38$ м

CN12-T1. $t_n = \left(n + \dfrac{3}{2}\right) \dfrac{\pi}{2} \sqrt{\dfrac{l}{g}}$, $n \in \mathbb{N}$

CN12-T2. 2. $x = a/(\sqrt{3})$, $F = 2\left(\sqrt{3} + 1\right) \mu mg$

CN12-T3. 1. $\mu \leq \dfrac{h}{\pi\left(2h + \pi R\right)}$

2. $R \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\pi} h$

3. $\mu \leq R/h$

CN12-T4. 1. Начальные скорости шаров перпендикулярны линии, соединяющей их центры, направлены противоположно друг другу и равны $v_{A0} = 4\sqrt{k_e Q^2/(30ma)}$ и $v_{B0} = \sqrt{k_e Q^2/(30ma)}$
2. $R_{min} = 12a/5$

CN12-T5. $f = \dfrac{4k_m^2\pi^2 a^4 q^2}{mR^5} I^2 + k_e \dfrac{q^2(1+2\sqrt{2})}{4R^2} - \dfrac{2k_m \pi a^2 q^2 B_0}{mR^2} I$

CN12-T6. 1. $T_d \geq 1.45 T_0$
2. $T_d = 1.25 T_0$

CN12-T7. 1.1. $\alpha = 0.0375$ рад
1.2. $f = 8.25$ см
2. $R = 47.74$ см

CN12-T8. $1\ \mathrm{L_{au}} = \left(\dfrac{\hbar^2}{m_e k_e e^2}\right)$ м, $1\ \mathrm{T_{au}} = \left(\dfrac{\hbar^3}{m_e k_e^2 e^4}\right)$ с, $1\ \mathrm{E_{au}} = \left(\dfrac{m_e k_e^2 e^4}{\hbar^2}\right)$ Дж

CN13-T1. $p = 3m\sqrt{2gh}$

CN13-T2. $\theta = \arccos\dfrac{2}{3}$

CN13-T3. 1. $W_L = \dfrac{1}{2}\alpha(\alpha+2)m\omega_e^2 R_e^2$
2. $W_{min} = \dfrac{GM_e m}{R_e} + \dfrac{1}{2}m\omega_e^2 R_e^2 - \dfrac{3}{2}m\left(GM_e\omega_e\right)^{2/3}$
3. $\alpha_0 = \dfrac{R_e}{2}\left[-3 + \left(1 + \dfrac{8GM_e}{\omega_e^2 R_e^3}\right)^{1/2}\right]$
4. Если $L > L_0$, то сила направлена вниз и равна $F_{base} = -\dfrac{GM_e m_p}{(\alpha+1)R_e^2} + \dfrac{1}{2}(\alpha+2)m_p\omega_e^2 R_e^2$; если $L = L_0$, то $F_{base} = 0$; если $\alpha_m R_e < L < L_0$, то сила направлена вверх и равна $F_{base} = \dfrac{GM_e m_p}{(\alpha+1)R_e^2} - \dfrac{1}{2}(\alpha+2)m_p\omega_e^2 R_e^2$

CN13-T4. $r = \left(\dfrac{N(N+1)ER}{2kQ\left(NR+R_E\right)} + \dfrac{1}{r_0}\right)^{-1}$

CN13-T5. 1. Кольцо совершает вертикальные колебания, $z(t) = \dfrac{\left(mg + 2\pi\alpha B_0 r_0^2 I_0\right) L}{4\pi^2\alpha^2 B_0^2 r_0^4}\left[\cos\left(\dfrac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}t\right) - 1\right]$

2. $I(t) = \left(\dfrac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2} + I_0\right)\cos\left(\dfrac{2\pi\alpha B_0 r_0^2}{\sqrt{mL}}t\right) - \dfrac{mg}{2\pi\alpha B_0 r_0^2}$

CN13-T6. $T_t' = 366.7$ K, $T_b' = 333.3$ K

CN13-T7. 1. $(y_1,z_1) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}d, \dfrac{\sqrt{2}}{8}d\right)$,

$(y_2,z_2) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}d, \dfrac{\sqrt{2}}{8}d\right)$

2. $d = \sqrt{2}\lambda D/a$

CN13-T8. 1. $T = \dfrac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2}$

2. $d_n = L\left(\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{2(n-1)}$

3. n-ным хлопкам Чжана и Вана соответствуют моменты времени t_{2n-1} и t_{2n} соответственно, причём $t_n = \left(\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{n-1}\dfrac{L}{2v}$

CN14-T1. 1. $\omega_B = 4\sqrt{\dfrac{13kqQ}{23mL^3}}$

2. малые колебания возможны, $T = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{23}{19}\dfrac{mL^3}{kqQ}}$

CN14-T2. Если бомба разделяется над водой, то

$$x = \pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2 - g^2L^2) - (d - \frac{L}{2\sqrt{3}})^2},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9v^4\left(d - \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^2}{L^2(3v_0^2v^2 - g^2L^2)}},\ \sin\alpha = \pm\frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0\sqrt{1 - \frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}.$$

Условия возможности пуска:

$$0 < \frac{gL}{\sqrt{3}v_0v} \le 1,\ \left|\frac{(2\sqrt{3}d - L)v}{4Lv_0\sqrt{1 - \frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}}\right| \le 1,\ d > 0.$$

Если бомба разделяется над землёй, то

$$x = \pm\sqrt{\frac{4L^2}{9v^4}(3v_0^2v^2 - g^2L^2) - (d + \frac{L}{2\sqrt{3}})^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{(2\sqrt{3}d + L)v}{4Lv_0\sqrt{1 - \frac{g^2L^2}{3v_0^2v^2}}} \le 1.$$

CN14-T3. 1. $P' = \frac{1}{2}\cdot 0.85^{-5/3}P_0,\ T' = 0.85^{2/3}T_0.$

2. $T'' = \frac{3\cdot 0.85^{-2/3} + 5}{13}T_0,\ P'' = \frac{9\cdot 0.85^{-2/3} + 15}{35.1}P_0.$

3. $T''' = 0.90^{6/13}\cdot\frac{3\cdot 0.85^{-2/3} + 5}{13}T_0,$

$P''' = 0.90^{19/13}\cdot\frac{9\cdot 0.85^{-2/3} + 15}{35.1}P_0.$

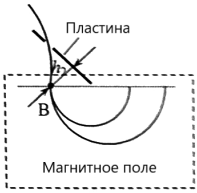
CN14-T4. $d_1 \approx 175$ нм, $d_2 \approx 171$ нм, $N \approx 20.64$

CN14-T5. 1. $E = qV[l - (h_1 + h_2)\cot\theta]/(2d\sin 2\theta),\ H = Ed\sin^2\theta/(qV).$

2. $4Ed\sin^2\theta\cos(2\theta)/(qV) - h_1,\ E = qVl/(2d\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)).$

3. $d = \frac{l_{max}\sin^2\theta}{2\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{18}l_{max}.$

4. $m = qB^2R^2l_{max}\sin^2\theta/(Vl)$



CN14-T6.

1. $a = 0.219$ мкм.
2. $B_{c2} = 23.85$ Тл.
3. $\rho = \Phi_0 B_a/(\eta)$.
4. Возможное решение — использование неидеальных сверхпроводников второго рода, полученных путём внесения в сверхпроводник дефектов, таких как вакансии, дислокации, межузельные атомы и т. д. Когда вихревые линии магнитного потока попадают в эти дефекты, возникает эффект пиннинга магнитного потока, затрудняющий движение вихревых линий.

CN14-T7.

1. $\omega_0 = \dfrac{m_1}{m+m_1}\dfrac{u_1}{l}$, $\omega_s = \dfrac{m_1}{m+m_1}\dfrac{u_1}{l} - \dfrac{2kn\pi}{m}$
2. $W_f = m\big(gT - v_0 - \dfrac{m_1}{m+m_1}u\big)^2 + \dfrac{k^2}{m}\big(uT - s\big)^2 + m\big(\dfrac{m_1}{m+m_1}u_1 - \dfrac{2kn\pi l}{m}\big)^2 - mv_0^2 - 2m\big(\dfrac{m_1}{m+m_1}u_1\big)^2$

CN14-T8.

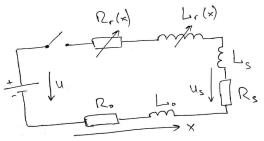
1. $E_k \approx 2\cdot 10^3$ эВ, $P = 4\cdot 10^{11}$ атм.
2. фотон γ, $E_{kx} = 5.5$ МэВ, $p_x = 5.5$ МэВ/с, нельзя найти такую систему отсчёта.
3. $E_{kD} < 0.01$ МэВ ≈ 0, $0 < E_{ke} < 0.42$ МэВ, $0 < E_{k\nu} < 0.42$ МэВ
4. $E = \dfrac{E_0}{1 + \dfrac{E_0}{mc^2}(1-\cos\phi)}$, $\phi = 6.7\times 10^{-11}$ рад

CN15-T1.

1. $\Delta x_A = \dfrac{mgb}{(a+b)k_1}$, $\Delta x_B = \dfrac{mga}{(a+b)k_2}$, $\Delta x_C = \dfrac{mg}{k_3}$.
2. $\omega = \sqrt{\dfrac{(a+b)^2 k_1 k_2 k_3}{m[a^2k_1k_3 + b^2k_2k_3 + (a+b)^2k_1k_2]}}$.
3. $a = \dfrac{k_2}{k_1}b$, $\omega_{max} = \sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}}$.

CN15-T2.

1. $U = L(x)\dfrac{dI}{dt} + IL_r'v_S + IR(x)$, где $R(x) = R_0 + R_r'x + R_s$, $L(s) = L_0 + L_r' + L_s$



2. $a_s = \dfrac{L_r' I^2}{2(m_s + m_a)}$
3. $I = 3.0\cdot 10^6$ А, $\tau = 3.3\cdot 10^{-4}$ с

CN15-T3. 1. $v_1 = -v_e \ln \dfrac{M}{M_i}$

2. $v_1 = \dfrac{1-(M/M_i)^{2v_e/c}}{1+(M/M_i)^{2v_e/c}}$

3. $\left(\ln \dfrac{M}{M_i}\right)_{rel.} - \left(\ln \dfrac{M}{M_i}\right)_{cl.} = -\dfrac{c}{2v_e}\ln\left(\dfrac{1+v_1/c}{1-v_1/c}\right) - \left(-\dfrac{v_1}{v_e}\right) = \mathcal{O}\left(\left(\dfrac{v_1}{c}\right)^3\right)$

CN15-T4. 1.1. $\ddot{y} + \dfrac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2} y = 0$

1.2. $t = \dfrac{2\pi L}{3\cos\theta}\sqrt{\dfrac{c\rho}{2I}}$

CN15-T5. 2. $Q = \dfrac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta\,(R_1+R_2)}{\rho g\,(R_1-R_2)}$

3. $z = R\left(\sqrt{\dfrac{Q\rho g\,(R_1-R_2)}{2\pi\alpha^2\cos^2\theta\,(R_1+R_2)}} - 1\right)$

CN15-T6. $t_\cdot \approx 706$ дней,
$t_\cdot \approx 73$ дня

CN15-T7. 1. $R = t/(2\Delta t)$

2. $L = 2\left(\sqrt{k^3} - k(\sqrt{k}-1)\dfrac{E_S}{E_1}\right)S$, где $k = \dfrac{E_S S + E_1 D_1}{E_S S}$.

3. $L = (E_S S + E_1 D_1)\left(\dfrac{\sqrt{k}}{E_S} + \dfrac{1-\sqrt{k}}{E_1} + \dfrac{2\left(1-\sqrt{k'}\right)}{E_2} + \dfrac{2\sqrt{k'}}{E_3}\right)$,

где $k = \dfrac{E_S S + E_1 D_1}{E_S S + E_1 D_1 - E_2 D_2}$.

CN15-T8. 1. $y = \dfrac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x^2 + \dfrac{x}{\tan\theta_0}$

2. $y_{a\,max} = \dfrac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$

3. $\theta_0 = \arctan\left(\dfrac{2n_0^2\tilde{x}}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2\tilde{x}^2} + \sqrt{\left(\dfrac{2n_0^2\tilde{x}}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2\tilde{x}^2}\right)^2 + \dfrac{\alpha^2\tilde{x}^2}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2\tilde{x}^2}}\right)$,

где $\tilde{x} = x_0 - vt$

4. $v \in \left(0,\ \dfrac{2n\left(t_a\sqrt{g y_a} - \sqrt{2}y_a\right)}{\alpha\left(g t_a^2 - 2y_a\right)}\right)$

CN16-T1. 1. $E = \eta_1 (m_c + m_t) g (h_c - \mu l) - m_t g \dfrac{h_c + \mu l}{\eta_2}$

2. $m_c = \left(\dfrac{1}{\eta_1 \eta_2} \dfrac{h_c + \mu l}{h_c - \mu l} - 1 \right) m_t$

3. $P = \eta_1 (m_c + m_t) g v \left(\dfrac{h_c}{l} - \mu \right)$

CN16-T2. 1. $x = \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{l_2}{6 (2l_1 + l_2)} \right] l_2$, $\omega_0 = \dfrac{2p}{m (2l_1 + l_2)}$

2. $\alpha_1 = -\dfrac{2g [\sin\theta_1 + 3\cos\theta_2 \sin\Delta\theta] + 3l_1\omega_1^2 \sin[2\Delta\theta] + 4l_2\omega_2^2 \sin\Delta\theta}{2l_1 [1 + 3\sin^2\Delta\theta]}$,

$\alpha_2 = \dfrac{12g\cos\theta_1 \sin\Delta\theta + 12l_1\omega_1^2 \sin\Delta\theta + 3l_2\omega_2^2 \sin[2\Delta\theta]}{2l_2 [1 + 3\sin^2\Delta\theta]}$,

где $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$.

CN16-T3. 1. $T(h) = \dfrac{\mu G M_m}{nR (R_m + h)}$

2. $v(t_l) = \sqrt{\dfrac{G M_m m_t}{k\rho_0 R_m^2}} \tanh \left[\sqrt{\dfrac{k\rho_0 G M_m}{R_m^2 m_t}} t_l \right]$

CN16-T4. 1. $\nu = 3.61 \cdot 10^{14}$ Гц, $I = 1.77 \cdot 10^{10}$ В/м^2

2. $m = 8.09 \cdot 10^{-17}$ кг, $J = 3.24 \cdot 10^{-31}$ кг $\cdot$ м^2

3. $M = 3.02 \cdot 10^{-20}$ Н $\cdot$ м

4. $f = 2.39 \cdot 10^2$ об./с

5. $f(t) = \dfrac{I\sigma_{abs}}{32\pi^3\eta R^3\nu} \left(1 - e^{20\pi\eta R t/m}\right)$

6. $f_n = \dfrac{I\sigma_{abs}}{32\pi^3\eta R^3\nu} \dfrac{1 - e^{-20\pi\eta R T_1/m}}{e^{20\pi\eta R T_2/m} - e^{-20\pi n R T_1/m}} \left(1 - e^{-20\pi n\eta R (T_1+T_2)/m}\right)$,

$f_{n\to\infty} = \dfrac{I\sigma_{abs}}{32\pi^3\eta R^3\nu} \dfrac{1 - e^{-20\pi\eta R T_1/m}}{e^{20\pi\eta R T_2/m} - e^{-20\pi n R T_1/m}}$

CN16-T5. 1. $P = (c_A - \mu_R c_B) v^3 + \mu_R m g v$

Если $c_A \le \mu_R c_B$ или $\mu_R c_B > c_A \ge \dfrac{2\mu_R c_B}{3} \left[1 - \dfrac{\mu_R}{(3\mu_S - 2\mu_R)} \right]$, то

$P_{\max} = c_A \mu_S \sqrt{(\mu_S - \mu_R)} \left(\dfrac{mg}{c_B (\mu_S - \mu_R) + c_A} \right)^{3/2}$

Если $c_A < \dfrac{2\mu_R c_B}{3} \left[1 - \dfrac{\mu_R}{(3\mu_S - 2\mu_R)} \right]$, то $P_{max} = \dfrac{2\sqrt{3} (mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{(\mu_R c_B - c_A)}}$

CN16-T5. 2. Введём для удобства $a = c_B^2\mu_S^2 - \dfrac{m^2}{r^2} - c_A^2$; $\varepsilon = 1$, когда передняя часть дефлектора наклонена вниз, $\varepsilon = -1$ иначе. Тогда:
если $a = 0$, $\varepsilon = 1$, то $v_{max} = \infty$,
если $a = 0$, $\varepsilon = -1$, то $v_{max} = \sqrt{\dfrac{mg}{2c_B}}$,
если $a > 0$, $\varepsilon = 1$, то $v_{max} = \infty$,
если $a > 0$, $\varepsilon = -1$, то $v_{max} = \sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{c_B\mu_S + \sqrt{m^2/r^2 + c_A^2}}}$,
если $a < 0$, $\varepsilon = \pm 1$, то $v_{max} = \sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{-\varepsilon c_B\mu_S + \sqrt{m^2/r^2 + c_A^2}}}$
В любом случае скорость v_{max} будет больше при $\varepsilon = 1$, то есть когда передняя часть дефлектора наклонена вниз.

CN16-T6. 1. $P = \dfrac{Mg}{4nslR} + P_{low}$
2. $v = v_0 - \dfrac{2\pi B^2 D^2 r_d^3}{3M\rho_d}$
3.
$a = \dfrac{3\pi\mu_0 r_d^4 \varepsilon^2}{200\left(\rho_d D\right)^2 M}\left[\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 3\ln A\right]$,
где $A = \frac{(2D+r_d)^3}{r_d^3} \frac{\left(D+\sqrt{D^2+r_d^2}\right)^2}{\left(D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2}\right)^2} \frac{2D+\sqrt{4D^2+r_d^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_d)^2}}$

CN16-T7. 1.1. $D - R = R\left(\dfrac{1}{2}A\cos 2\theta\right)\sin\omega x$
1.2. $\dfrac{X^2}{\left[R\left(1 + \dfrac{1}{2}A\sin\omega x\right)\right]^2} + \dfrac{Y^2}{\left[R\left(1 - \dfrac{1}{2}A\sin\omega x\right)\right]^2} = 1$
1.3. Амплитуда максимальна при $\omega = ((2k+1)\,\pi)/4$, $\varphi = (2k+1)\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и минимальна при $\omega = k\pi/2$, $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $f_1 = \dfrac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}\left(GM\right)^{5/3}$, $f_2 = \dfrac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}\left(GM\right)^{5/3}$

CN16-T8. 1. $E_{n=1}^{\mathrm{Ps}} = -6.804$ эВ
2.1. $v_0 = \dfrac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c = 5.996 \cdot 10^5$ м/с,
$E_1 = 0.5115$ МэВ, $E_2 = 0.5105$ МэВ
2.2. $\Delta E = -3.402$ эВ

CN16-T8. 3. $E_1 = \dfrac{m_{Ps}c^2}{2\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\dfrac{1-(v_0/c)^2}{1-(v_0/c)\cos\theta_1}$,

$E_1 = \dfrac{m_{Ps}c^2}{2\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\dfrac{1-2(v_0/c)\cos\theta_1+(v_0/c)^2}{1-(v_0/c)\cos\theta_1}$,

$\sin\theta_2 = \dfrac{1-(v_0/c)^2}{1-2(v_0/c)\cos\theta_1+(v_0/c)^2}\sin\theta_1$,

$E_1 = E_2 = 0.05901$ МэВ, $\theta_2 = 5\pi/3$

CN17-T1. 1. $v_a = \left[1+\dfrac{m_b}{m_a}cos\left(\sqrt{\dfrac{(m_a+m_b)k_0}{m_am_b}}t\right)\right]\dfrac{m_a}{m_a+m_b}v_0$,

$v_b = \left[1-cos\left(\sqrt{\dfrac{(m_a+m_b)k_0}{m_am_b}}t\right)\right]\dfrac{m_a}{m_a+m_b}v_0$

2. $q = L_0\sqrt{\dfrac{k_0}{k}(L_0-l_0)}$,

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\dfrac{3L_0-2l_0}{L_0}\right)\left(\dfrac{m_a+m_b}{m_am_b}\right)k_0}$

CN17-T2. 1. $r_0 = \left(\dfrac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

2. $T_1 = \sqrt{\dfrac{(M+m)(M+m-\Delta M)^2}{(M+m-2\Delta M)^3}}T_0$

3. $\Delta M \geq (M+m)/2$, $M > m$

CN17-T3. 1. Механическая энергия в точке A равна: $U_A = mgh_1$, на участке $A'-B$ равна: $U_{A'} = mg\dfrac{l+d}{l}(h_1-d) = U_B$, на участке $B'-C$ равна: $U_{B'} = mg\dfrac{(l+d)^3}{l^3}(h_1-d)+mgd = mgh_2 = U_C$, её изменение равно: $U_C - U_A = mg\left[\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^3 - 1\right](h_1-d)$

2.1. $h_{n+1} = \lambda(h_n-d)-\mu$, где $\lambda = \dfrac{1-k_1}{1+k_2}\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^3$ и $\mu = \dfrac{k_1}{1+k_2}\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2 h_0 + \dfrac{k_2}{1+k_2}h_0'$.

CN17-T3. 2.2. $h_{n+1} = \lambda^n(h_1 - d) + d - \mu\dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$,
$h_{n+1} - h_n = \lambda^{n-1}[(\lambda - 1)(h_1 - d) - \mu]$

CN17-T4. 1. $J = ml^2/6$
2. $\theta = \theta_0 \cos\sqrt{6BI/m}t$,
$\dot\theta = -\theta_0\sqrt{6BI/m}\sin\sqrt{6BI/m}t$,
$\ddot\theta = -\theta_0 6BI/m\cos\sqrt{6BI/m}t$
3. $\dot\theta(t) = \theta_0\sqrt{6BI/m}$, $t \geq t_0$,
$V_{PQ} = -Bl^2\theta_0\sqrt{6BI/m}\sin\left[\theta_0\sqrt{6BI/m}(t - t_0)\right]$
4. $\alpha = R\theta_0/(Bl^2\sin^2\theta_1)\sqrt{mI/(6B)}$,
$\alpha_m = R/(Bl^2)\sqrt{mI/(6B)}\theta_0$

CN17-T5. 1. $R = \sqrt{3}mv/(qB)$
2.1. $s_{z=0}^{max} = mv^2/(qE)$
2.2. $S_{total} = \left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\dfrac{5mv^2}{qE}$

CN17-T6. 1. $a = 2.79 \cdot 10^{-3}$ м
2. $F = 7.87 \cdot 10^{-2}$ Н

CN17-T7. 1.1. $\lambda' = \lambda_0\left(1 + \dfrac{GM}{R^2}\dfrac{L}{c^2}\right)$
1.2. $\lambda'' = \lambda_0\left(1 + a\dfrac{L}{c^2}\right)$
1.3. $a = GM/(R^2)$
2. $v = 7.39 \cdot 10^{-7}$ м/с

CN17-T8. 1. $d = 256$ нм, $\lambda = 1168$ нм
2. $E = 2\left[\dfrac{(\rho' d' + \rho d)\, g}{\varepsilon_0}\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}\right]^{1/2}$
3. $\alpha = 1.62 \cdot 10^{-3}$ рад

CN18-T1. 1. $v_M = \sqrt{\dfrac{10m^2(R+r)g(1-\cos\theta_1)\cos^2\theta_1}{[7(M+m) - 5m\cos^2\theta_1](M+m)}}$,
$a_M(\theta_1) = -\dfrac{5mg\sin\theta_1\left[14(M+m) - 21(M+m)\cos\theta_1 + 5m\cos^3\theta_1\right]}{\left[7(M+m) - 5m\cos^2\theta_1\right]^2}$

CN18-T1. 2. $\frac{2}{7}g\sin\theta_2 - \mu g\cos\theta_2 + a_M(\theta_2)\left(\frac{2}{7}\cos\theta_2 + \mu\sin\theta_2\right) + \frac{\mu(M+m)^2 v_M^2(\theta_2)}{(R+r)m^2\cos^2\theta_2} = 0$

3. $v_C' = \sqrt{(R+r)g\cos\theta_3}$

CN18-T2. 1. $U_{min} = \sqrt{2md^2g/(\varepsilon_0 S)}$

2.

$$T = \frac{d}{U}\sqrt{\frac{md}{\varepsilon_0 S}}\left\{\ln\left[\frac{\left(3\varepsilon_0 SU^2 - 2mgd^2\right) + 2U\sqrt{2\varepsilon_0 S\left(\varepsilon_0 SU^2 - mgd^2\right)}}{\varepsilon_0 SU^2 - 2mgd^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \ln\left[\frac{\left(3\varepsilon_0 SU^2 + 2mgd^2\right) + 2U\sqrt{2\varepsilon_0 S\left(\varepsilon_0 SU^2 + mgd^2\right)}}{\varepsilon_0 SU^2 + 2mgd^2}\right]\right.$$

CN18-T3. 1. Для подвешенной части нити слева от блока: $-T_1 + \lambda Lg = \lambda L\frac{dv}{dt}$; для подвешенной части нити справа от блока: $T_2 - \lambda v^2 - \lambda Lg = \lambda L\frac{dv}{dt}$; для части нити, лежащей на блоке: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} + \mu T - \lambda Rg(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) = \lambda R\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mu\frac{v^2}{R}\right)$

2. $v_{max} = R\omega$

CN18-T4. 1.1. $A(x) = A_0 \dfrac{\sqrt{e^{-2\gamma x} + e^{-4\gamma L + 2\gamma x} - 2e^{-2\gamma L}\cos\left(2\dfrac{\omega}{u}x - 2\dfrac{\omega L}{u}\right)}}{\sqrt{1 + e^{-4\gamma L} - 2e^{-2\gamma L}\cos\left(2\dfrac{\omega L}{u}\right)}}$

1.2. $y(x,t) = -\dfrac{A_0}{\sin\left(\dfrac{\omega L}{u}\right)}\sin\left(\dfrac{\omega x}{u} - \dfrac{\omega L}{u}\right)\cos\omega t$, для узлов $x_n = L - n\pi\dfrac{u}{\omega}$, $0 \le n < \dfrac{L\omega}{\pi u}$, для пучностей $x_a = L - \pi\dfrac{u}{2\omega} - l\pi\dfrac{u}{\omega}$, $0 < l < \dfrac{L\omega}{\pi u}$.

2. Если $\varphi_0 = 0$, то: $y(x,t) = \dfrac{A_0}{\cos\left(\dfrac{\omega L}{2u}\right)}\cos\left(\dfrac{\omega L}{2u} - \dfrac{\omega x}{u}\right)\cos\omega t, \omega = \dfrac{(2n_1+1)\pi u}{L}, n_1 \in \mathbb{Z}_+$;

если $\varphi_0 = \pi$, то: $y(x,t) = \dfrac{A_0}{\sin\left(\dfrac{\omega L}{2u}\right)}\sin\left(\dfrac{\omega L}{2u} - \dfrac{\omega x}{u}\right)\cos\omega t, \omega = \dfrac{2n_2\pi u}{L}, n_2 \in \mathbb{N}$

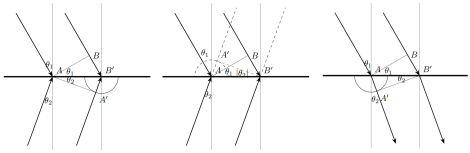
CN18-T5. 1. $N_{leak} = n\sqrt{\dfrac{kT}{2\pi m}}$

2. $\bar{E}_k = 2kT$

3. $T(t) = T_0\left(1 + \dfrac{S}{6V}\sqrt{\dfrac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-2}$

4. $u(t) \approx \dfrac{6N_0}{7M}\sqrt{\dfrac{\pi m k T_0}{2}}\left[1 - \left(1 + \dfrac{S}{6V}\sqrt{\dfrac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-7}\right]$

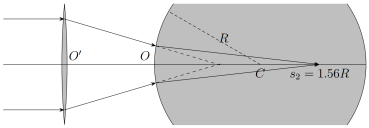
CN18-T6. 1.



CN18-T6. 2. $\dfrac{n_1}{s_1}+\dfrac{n_2}{s_2}=\dfrac{n_2-n_1}{R}$, $\Gamma=-\dfrac{s_2 n_1}{s_1 n_2}$

3.

Случай	n_2	d	s_2
1	1.5	$0.35R$	$1.10R$
2	1.5	$0.85R$	$0.74R$
3	-1.5	$0.35R$	$0.92R$
4	-1.5	$0.85R$	$1.56R$



CN18-T7. 1. $\vec{v}=\dfrac{\vec{p}}{m}$

2. $\vec{p}=\dfrac{\vec{p}}{m}+\alpha\hat{p}$, где $\hat{p}$ – единичный вектор в направлении импульса.

3. $v=\sqrt{\alpha^2+2K/m}$

4. $R=\dfrac{-m\alpha+\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}}{qB}$,

$T=\dfrac{2\pi\left(-m\alpha+\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}\right)}{qB\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2K}{m}}}$,

$L=\dfrac{2m^2\alpha^2+2mK-2m\alpha\sqrt{m^2\alpha^2+2mK}}{qB}$

5. $a_x=\dfrac{qE}{m}+\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\sin^2\theta}{v-\alpha}$, $a_y=-\dfrac{qE}{m}\dfrac{\alpha\cos\theta\sin\theta}{v-\alpha}$

CN18-T8. 1. $\eta=2v/(c+v)$

2. $\eta'=0$

3. $\eta=2v/(c+v)$

CN19-T1. 1. $\alpha=\dfrac{15g}{637R_0}$

2. $\alpha=\dfrac{9555\sqrt{3}g}{773768R_0}$, $F_f=\dfrac{89907\sqrt{3}}{773768}mg$, $F_N=\dfrac{7735679}{773768}mg$

CN19-T2. 1. При $0 \le \varphi < \theta_0$:

$$E_1 = \frac{V_0}{\left[\theta_0 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)\right] r},\ V_\varphi = \frac{(\theta_0 - \varphi) + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)}{\theta_0 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)};$$

при $\theta_0 < \varphi \le \pi$:

$$E_2 = \frac{V_0}{\left[\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)\right] r},\ V_\varphi = \frac{\pi - \varphi}{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)}$$

2. $$Q = \frac{\varepsilon_0 \left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) l \ln \dfrac{b}{a}}{\left[\theta_0 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)\right]} V_0$$

3. $$R_1 = \frac{\theta_0}{\sigma_1 l \ln \dfrac{b}{a}},\ C_1 = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 l}{\theta_0} \ln \frac{b}{a},$$

$$R_2 = \frac{(\pi - \theta_0)}{\sigma_2 l \ln \dfrac{b}{a}},\ C_2 = \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 l}{(\pi - \theta_0)} \ln \frac{b}{a}$$

4. $$V(t) = \frac{\theta_0 V_0}{\left[\theta_0 + \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(\pi - \theta_0)\right]} e^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} t} + \frac{(\pi - \theta_0)\, V_0}{\left[\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\theta_0 + (\pi - \theta_0)\right]} e^{-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} t}$$

CN19-T3. 1. $\Delta g = 5.60 \cdot 10^{-3}$ м/с^2 $= 5.71 \cdot 10^{-4} g_0$

2.1. $$B_0 = \frac{\mu_0 N i_0}{2R}\left[\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right],\ \beta = \frac{3}{2R\left(2\sqrt{2}\alpha + 1\right)}$$

2.2. $$I_0 = -\frac{\mu_0 N i_0 \pi D^2}{8RL}\left[\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$$

2.3. $$g = \frac{3\pi^2 D^4 \mu_0^2 N^2 i_0^2}{1024 L m R^3}\left(2\sqrt{2}\alpha + 1\right)$$

3. $$\Delta g = \frac{8\varepsilon_0 A}{md^2} V_C \Delta V$$

CN19-T4. 1. $m_1 = 0.703 \cdot 10^{-3}$ кг, $R_1 = 1.43$

2. $m_1 = 0.632 \cdot 10^{-3}$ кг, $R_1 = 1.30$

3. $\Delta S = -0.07284$ Дж/К, $W = 22.10$ Дж

CN19-T5.

1. $D_{01} = 4.12$ мкм
2. $l = 18.9$ мм, $D_2 = 6.0$ мм
3. $D_w = 1.97$ мм, $D_{02} = 1.05$ мкм
4. $\vec{F}_b = 0.45 \cdot 10^{-12}\vec{i} + 1.15 \cdot 10^{-12}\vec{j}$ Н, $\eta_x = 10.9$, $\eta_y = 28.0$
5. $v_p = 1.72 \cdot 10^{-3}$ м/с
6. $v_m = 2.44 \cdot 10^{-3}$ м/с
7. Вероятности совпадают, $P_m = P_{2m} = \int\limits_0^{\sqrt{U_0/(k_B T)}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx$

CN19-T6.

1.1. $\Phi = d/L$

1.3. $\Phi = 1/(80)$ (Для сравнения, его истинное значение близко к $\Phi = 1/(109)$.)

2.1. $r_- = 0.72$

2.2. $\frac{D_p}{S_-} = \left(\frac{r_-}{1-r_-}\right) \cdot 2\pi t_p \cdot \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\right] = 1/135$, $\Phi = 1/105$

2.3.
$S = \frac{\frac{2rH}{(1-r)}}{\sqrt{\Phi^2 - \left(\frac{r}{1-r}\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T}\right)t_p\right)^2} - \sqrt{\Phi^2 - \left(\frac{r}{1-r}\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T}\right)t_{p'}\right)^2}}$

2.4. $S_- = 1.6 \cdot 10^8$ км, $D = 1.5 \cdot 10^6$ км

3.1. $W = 1.76 \cdot 10^{17}$ Вт

3.2. $E : E = 1 : 1.6 \cdot 10^4$

3.3. $W = 3.87 \cdot 10^{26}$ Вт

3.4. $T = 5.8 \cdot 10^3$ К

4.1. $M = 2.0 \cdot 10^{30}$ кг, $\rho = 1.4 \cdot 10^3$ кг/м^3

4.2. Солнце может существовать $t = 2400$ лет и должно быть энергоэффективнее примерно в $2 \cdot 10^6$ раз.

5.1. $\frac{\Delta N_p}{\Delta t} = 3.62 \cdot 10^{38}$ 1/с

5.2. $P_{pp} = 4.2 \cdot 10^{-19}$ 1/с

5.3. $\frac{\Delta N_{\nu_e}}{\Delta S \Delta t} = 6.4 \cdot 10^{14}$ ед./(с $\cdot$ м^2)

5.4. $\frac{\Delta M}{\Delta t} = 1.3 \cdot 10^{17}$ кг/год

6. $T = 0.8 \cdot 10^7$ К

7. Максимальная энергия, уносимая нейтрино, $E_{\nu\ max} = 0.49$ МэВ, этому соответствует относительная ошибка результатов 3.7%.

8.1. $\Delta M = 1.3 \cdot 10^{25}$ кг

8.2. $T_2 - T_1 = 1.3 \cdot 10^{-5} T_1$

CN20-T1. 1. $v_1 = \dfrac{2m\cos\alpha}{m+m_1}v_0$, $v = \dfrac{\sqrt{m^2+m_1^2-2mm_1\cos 2\alpha}}{m+m_1}v_0$,
$m = 1.16m_H$, $v_0 = 3.07\cdot 10^7$ м/с
2. $n = 2$
3. $E_p = k_BT$, $E_{kp} = k_BT/2$

CN20-T2. 1. Величина зеркального заряда $Q' = Q\dfrac{R_0}{a}$, индуцируются заряд Q' в центре сферы и заряд $-Q'$ на расстоянии $b = \dfrac{R_0^2}{a}$ от центра сферы.
2. Заряды в центре сферы взаимно уничтожаются, а при $a \to +\infty$ два других заряда приближаются к центру настолько, что образуют точечный диполь $p = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R_0^3$.
3. $p = \dfrac{R_0^3}{r^3}q\Delta l$
4. $\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+r/2-b_n)\,p_n}{4\pi\varepsilon_0\left[(x+r/2-b_n)+y^2\right]^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-r/2+b_n)\,p_n}{4\pi\varepsilon_0\left[(x-r/2+b_n)+y^2\right]^{3/2}}$,
$E(x,y=0) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{p_n}{2\pi\varepsilon_0\left|x+r/2-b_n\right|^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{p_n}{2\pi\varepsilon_0\left|x-r/2+b_n\right|^3} + E_0$, где p_n и b_n задаются рекурсивными соотношениями: $r_n = r - b_n$, $b_{n+1} = R_0^2/r_n$, $p_{n+1} = p_nR_0^3/r_n^3$ и $r_1 = r$, $b_1 = 0$, $p_1 = 4\pi\varepsilon_0E_0R_0^3$.

CN20-T3. 1. $p_0 = \dfrac{1}{1+e^{-E_1/(k_BT)}}$, $p_1 = \dfrac{1}{1+e^{E_1/(k_BT)}}$
2. В $A \to B$: $Q_1 = \Delta_1\langle E\rangle = E_B(p_B - p_A), W_1 = 0$;
в $B \to C$: $W_2 = -\Delta_2\langle E\rangle = (E_B - E_C)p_B, Q_2 = 0$;
в $C \to D$: $Q_3 = -\Delta_3\langle E\rangle = E_D(p_B - p_A), W_3 = 0$;
в $D \to A$: $W_4 = -\Delta_4\langle E\rangle = (E_D - E_A)p_A, Q_4 = 0$.

CN20-T3. 3. В $A \to B$: $Q_1 = \dfrac{E_\text{A}}{1+e^{-E_A/(k_BT_h)}} - \dfrac{E_\text{B}}{1+e^{-E_B/(k_BT_h)}} + k_\text{B}T_h \ln\dfrac{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}}$,

$\Delta E_1 = -\dfrac{E_\text{A}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}} + \dfrac{E_\text{B}}{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}$,

$W_1 = E_\text{A} - E_\text{B} + k_\text{B}T_h \ln\dfrac{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}}$;

в $B \to C$: $Q_2 = 0$,

$W_2 = -\Delta E_2 = -\dfrac{E_\text{C}}{1+e^{E_C/(k_BT_h)}} + \dfrac{E_\text{B}}{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}$;

в $C \to D$: $Q_3 = \dfrac{\frac{T_l}{T_h}E_\text{A}}{1+e^{-E_A/(k_BT_h)}} - \dfrac{\frac{T_l}{T_h}E_\text{B}}{1+e^{-E_B/(k_BT_h)}} + k_\text{B}T_l \ln\dfrac{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}}$,

$\Delta E_3 = \dfrac{1}{1+e^{E_D/(k_BT_l)}}E_\text{D} - \dfrac{1}{1+e^{E_C/(k_BT_l)}}E_\text{C}$,

$W_3 = E_C - E_D + k_\text{B}T_l \ln\dfrac{1+e^{E_B/(k_BT_h)}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}}$;

в $D \to A$: $Q_4 = 0$,

$W_4 = -\Delta E_4 = -\dfrac{E_\text{A}}{1+e^{E_A/(k_BT_h)}} + \dfrac{E_\text{D}}{1+e^{E_D/(k_BT_h)}}$

$\eta_\text{Отто} = 1 - \dfrac{T_C}{T_h} < \eta_\text{Карно}$

CN20-T4. 1. $\Delta f = \dfrac{fvn}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$ Для характерных величин в задаче получим $\Delta f < 0.7$ МГц, поэтому спектрометр использовать нельзя.

2. $i(t) = kE_0^2 \cos(2\pi\Delta f_D t + \varphi_1 - \varphi_2)$, где $f_D = \dfrac{2fvn}{c}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\beta$.

3. $d = \dfrac{c}{2fn\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $f_D = \dfrac{2fvn}{c}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\beta$

CN20-T5. 1. $r_e = \dfrac{eE_0}{2\pi m_e f\left(2\pi f \mp \dfrac{eB}{m_e}\right)}$

2. $f_c = \dfrac{e}{4\pi}\left(\sqrt{\dfrac{B^2}{m_e^2} + \dfrac{4n_e}{\varepsilon_0 m_e}} \pm \dfrac{B}{m_e}\right)$

3. $\Delta t = \dfrac{1}{2f^2 c}\dfrac{e^2 n_e d}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e}\left(1 \pm \dfrac{eB}{2\pi m_e}\right)$

4. $\Delta\Phi = \dfrac{e^3 B d n_e}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c f^2}$

5. $\Delta\Phi = \dfrac{\pi f_p^2}{nc\,(f \mp f_B)}\dfrac{\Delta n_e}{n_e}a$, где $f_p = \dfrac{e}{2\pi}\sqrt{\dfrac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$ и $f_B = \dfrac{eB}{2\pi m_e}$.

CN20-T6. 1. $t_{\bar{p}} = 45.8$, $t_{\pi^-} = 40$

2. $\theta = \arccos\dfrac{c}{nv}$

3. $r = \dfrac{R}{2}\sqrt{\left(\dfrac{nv}{c}\right)^2 - 1}$

4. Выражение, задающее границу возможных положений точки P, может быть записано в виде $2(3K+1)y^3 - 6(3K+1)x^2 y + (12K^2-1)y^2 + 3(2K+1)^2 x^2 - 2(4K+1)Ky \le 0$, где $K \equiv \dfrac{m_{\pi^0}c^2}{Q}$.

При $m_{\pi^0} = 0$ оно примет вид $(y - \dfrac{1}{2})(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x) \le 0$

CN20-T7. 1. $\theta_0 = 40.5333°$

2. $I = 12.306\pi\rho_1 R^5$, $\omega = 0.122624\sqrt{\dfrac{g}{R0}}$

3. $h = 1.23526R$

4. $x_{..} = -x_Q, z_{..} = z_Q$

CN21-T1. 1. $r_0 = 1580$, $r_1 = 527$

2.1. $r_0' = 395$

3.1. $OS' = 445$, формула тонкой линзы справедлива.

3.2. $s' = 137$, $f' = 132$

3.3. $s'' = -396$, $s''' = 393$, знак «$-$» означает, что изображение мнимое.

CN21-T2.

1. $R=\dfrac{L^2}{m^2r_0v_0^2},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m^3r_0^2v_0^4}}$

2. $r_c(\theta_c)=\dfrac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon\cos(\theta_c+\phi)}$

3. $\dfrac{T_c}{T_A}=\left(\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}$

4. $\varepsilon=\delta\sqrt{1+3\cos^2\alpha+2\delta\cos\alpha\,(1+\cos^2\alpha)+\delta^2\cos^2\alpha},$
$\varepsilon\cos\phi=\delta\cos\alpha(2+\delta\cos\alpha)$

5. $n_A=\dfrac{\theta_0}{2\pi}+n_c\left(\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}$

6. $n_A=\dfrac{\theta_0}{2\pi}+n_c\left[\dfrac{1+\delta\cos\alpha(2+\delta\cos\alpha)}{1-\delta^2\left[1+3\cos^2\alpha+2\delta\cos\alpha\,(1+\cos^2\alpha)+\delta^2\cos^2\alpha\right]}\right]^{3/2},$
$0,\quad \alpha_0=\pi$

7.1. $\delta_{\max}=\begin{cases}\sqrt{2}-1, & \alpha_0=0\\ \sqrt{2}+1, & \alpha_0=\pi\end{cases}$

7.2. $\delta^2+2\delta+\left(\dfrac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{3/2}-1=0,$

$\delta=-1+\sqrt{2-\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2/3}}\approx 0.145,\quad \alpha_0=0,$

$\delta^2-2\delta+\left(\dfrac{2\pi n_c}{2\pi n_A-\theta_0}\right)^{3/2}-1=0,$

$\delta=1+\sqrt{2-\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2/3}}\approx 2.145,\quad \alpha_0=\pi$

CN21-T3.

1.1. $p(\theta)=\begin{cases}Mv_0\cos\theta, & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$

1.2. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cos\theta, & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$

CN21-T3.

1.3. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E_\mathrm{k}} = \dfrac{2}{Mv_0^2}, \quad 0 \le E_\mathrm{k} \le \dfrac{Mv_0^2}{2}$

2. $N_C \approx 87$

3. $N_S \approx 56$

4. Предел вызван тем, что при слишком больших скоростях частицы тёмной материи покидают область гравитационного влияния Млечного Пути.

5. $m_{X\,\min} \approx 14\ /c^2$

CN21-T4.

1.1. $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{en_0}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{e\varphi}{kT}\right)$

1.2. $\varphi(x)|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$

1.3. $A = \dfrac{2kT}{e}, \quad B = \dfrac{\sigma e}{2\varepsilon kT}, \quad n_0 = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT},$

$\varphi(x) = \dfrac{2kT}{e}\ln\left(1 + \dfrac{\sigma e x}{2\varepsilon kT}\right),$

$n(x) = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{\sigma e x}{2\varepsilon kT}\right)^2}$

1.4. Действительно, заряд положительных ионов, приходящийся на единицу площади мембраны, равен:

$e\int\limits_0^{+\infty} n(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sigma^2 e}{2\varepsilon kT}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{\sigma e x}{2\varepsilon kT}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sigma\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = \sigma$

1.5. $U_f = \dfrac{\sigma kT}{e}, \quad U_e = \dfrac{2\sigma kT}{e}$

2.1. $A = \dfrac{2kT}{e}, \quad B = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{2\varepsilon kT}}$

2.2. $n_0 = \dfrac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}$, где θ – решение уравнения: $\theta\tan\theta = \dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

2.3. $\Delta n = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$

2.4. $\int\limits_{-D}^{D} en(x)\,\mathrm{d}x = en_0\int\limits_{-D}^{D}\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(Bx)} = \dfrac{2e}{B}\dfrac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}\tan\theta = \dfrac{2e}{B}\dfrac{2\varepsilon kT\theta}{e^2D^2}\dfrac{\sigma eD}{2\varepsilon kT} = 2\sigma$

CN21-T4. 2.5. $f = \dfrac{2\varepsilon k^2 T^2 \theta^2}{e^2 D^2}$

2.6. При малых расстояниях $\dfrac{\sigma e D}{2\varepsilon k T} \ll 1$: $f \propto \dfrac{1}{D}$,
при больших расстояниях $\dfrac{\sigma e D}{2\varepsilon k T} \gg 1$: $f \propto \dfrac{1}{D^2}$

CN21-T5. 1.1. $\chi = \dfrac{\mu_0 n m_0^2}{kT}, \quad C = \dfrac{\mu_0 n}{k}\left(\dfrac{e\hbar}{2m}\right)^2$

1.2. $\gamma = \dfrac{\theta}{C}, \quad H_m = k\theta/(\mu_0 m_0)$

2.1. $H'_m = \dfrac{k\theta}{\mu_0 m_0}, \quad E_N = -\dfrac{1}{2}(N-1)k\theta$

2.2. $\Delta E = 2k\theta$

3.1. $E_N = -\dfrac{1}{2} N \mu_0 m_0^2 (\beta - \alpha)$

3.2. $T = \dfrac{\mu_0 m_0^2}{k}(\beta - \alpha)$

4.1. $\langle \theta_i - \theta_j \rangle = \dfrac{la}{r}$

4.2. $E_{\text{vortex}} = \pi J l^2 \ln \dfrac{L}{a}$

4.3. $\Omega = \dfrac{L^2}{a^2}, \quad S = 2k \ln \dfrac{L}{a}$

4.4. $T = \dfrac{\pi J l^2}{2k}$ При $T < \dfrac{\pi J l^2}{2k}$ свободная энергия системы стремится к $+\infty$ с ростом L, поэтому образование вихрей энергетически невыгодно. При $T > \dfrac{\pi J l^2}{2k}$ свободная энергия системы стремится к $-\infty$ с ростом L, поэтому в системе возникает тенденция к образованию вихрей.