



# Республиканская физическая олимпиада 2024 год (III этап)

## Теоретический тур

### *Решения задач 9 класс (для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты их решений, конечно же, не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы физически обоснованы и приводят к правильным ответам, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших  
талантливых школьников!***

### Задание 9-1. Прогрессивная динамика

В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них не соблюдены.

**1.1** На материальную точку массой  $m = 23,2$  кг действуют двенадцать сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна  $F_1 = 10$  Н и направлена вдоль оси  $Ox$ . Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей на  $\Delta F = 10$  Н и повернута на угол  $\alpha = 30^\circ$  (см. Рис. 1). Найдите ускорение  $\vec{a}_1$  материальной точки.

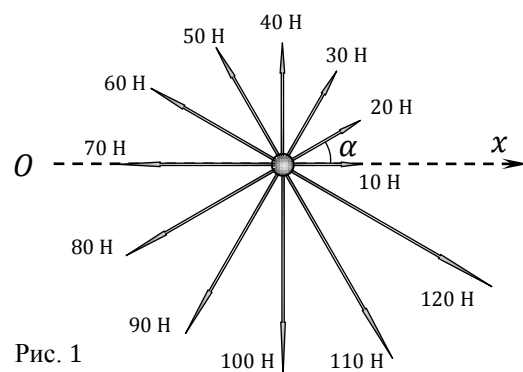


Рис. 1

**1.2** Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой  $m$  (Рис. 2) действует система из  $n$  сил ( $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_{n-1}; \vec{F}_n$ ), расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  друг от друга. Известно, что модуль  $F_{i+1}$  каждой следующей силы больше модуля  $F_i$  предыдущей на  $\Delta F$ . Найдите ускорение  $\vec{a}_2$  материальной точки.

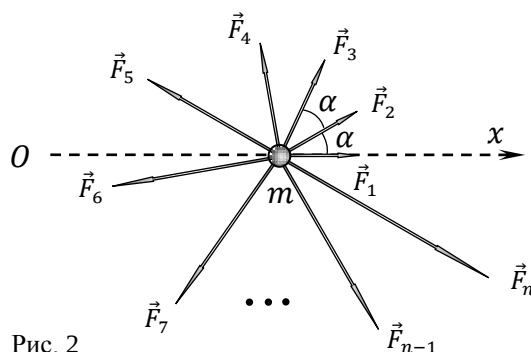


Рис. 2

**1.3** Используя общее выражение, полученное для  $\vec{a}_2$  в предыдущем пункте, вычислите ускорение  $\vec{a}_1$  для первого пункта задачи.

Решение:

### Задание 9-1. Прогрессивная динамика

**1.1** Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой силы на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если заметить, что в данной системе разность противоположных по направлению сил (70 Н и 10 Н, 80 Н и 20 Н и т.д.) попарно остается постоянной и равной  $F_0 = 60$  Н.

Это обстоятельство позволяет упростить систему до шести симметричных сил с модулем  $F_0$  (Рис. 01), сумма которых будет направлена вдоль оси симметрии  $AB$  и равна

$$F = 2F_0(\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ). \quad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение  $\vec{a}_1$  материальной точки будет также направлено вдоль прямой  $AB$  (под углом  $\beta = 105^\circ$  к оси  $Ox$ ) и равно

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{2F_0(\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ)}{m}. \quad (2)$$

Расчет по (2) с точностью до двух значащих цифр дает

$$a_1 = \frac{2 \cdot 60 \cdot (\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ)}{23,2} \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{9,992336134\}^1 = 10 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) \quad (3)$$

Интересно, что значение (3) для  $a_1$  «совпало» со значением  $g$ , используемом на централизованном тестировании (☺), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = g_{\text{цт}} = 10 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

**1.2** По определению равнодействующая  $\vec{F}$  равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n. \quad (4)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы  $F_n$  справедлива формула

$$F_n = F_1 + (n-1)\Delta F. \quad (5)$$

Кроме того, при арифметической прогрессии для любых соседних членов  $F_{i+1}$  и  $F_i$  выполняется равенство

$$F_{i+1} - F_i = \Delta F = \text{const}. \quad (6)$$

Для практического использования свойства (6) на векторной диаграмме выполним три шага (Рис. 02). Шаг первый: поменяем направление каждого вектора  $\vec{F}_i$  на противоположное (т.е. умножим каждый вектор на  $(-1)$ , при этом он поворачивается на  $180^\circ$ ).

Шаг второй: повернём обращенную систему сил как целое на угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  против часовой стрелки (См. Рис. 02).

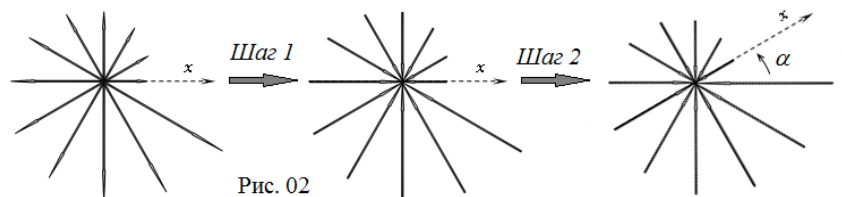


Рис. 02

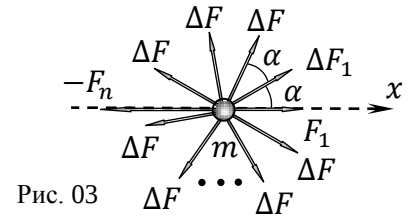
<sup>1</sup> — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Шаг третий: наложим полученную после двух шагов систему сил на исходную систему сил так, чтобы их центры совпали. При этом вектор  $(-\vec{F}_1)$  попадет на вектор  $\vec{F}_2$ , вектор  $(-\vec{F}_2)$  попадет на вектор  $\vec{F}_3$  и т.д., а вот вектор  $(-\vec{F}_n)$  попадет на начальный вектор  $\vec{F}_1$ .

Из (6) следует, что после суммирования наложенных векторов получится система из  $(n-1)$  равных по модулю векторов  $\Delta F$ , повернутых на угол  $\alpha$  друг относительно друга, и вектор  $(F_1 - F_n)$ , параллельный оси  $Ox$  (Рис. 03). Вектор  $(F_1 - F_n)$  можно представить как

$$F_1 - F_n = F_1 - (F_1 + (n-1)\Delta F) = -(n-1)\Delta F = -n\Delta F + \Delta F. \quad (7)$$

По правилу многоугольника теперь сумма  $n$  одинаковых по модулю векторов  $\Delta F$ , повернутых на угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  друг относительно друга, равна нулю. Следовательно, согласно (7), после наложения двух систем «останется» только вектор  $-n\Delta F$ , направленный против оси  $Ox$ .



Изобразим на векторной диаграмме (Рис. 04) все сказанное: отложим вектор  $\vec{F}$ , далее  $(-\vec{F})$  после первого шага, далее  $\vec{F}^*$  после второго шага. Их сумма (третий шаг) должна давать вектор  $(-n\Delta F)$ , отмеченный пунктиром.

По правилу сложения векторов получаем равнобедренный векторный треугольник (см. Рис. 04), из которого можем записать

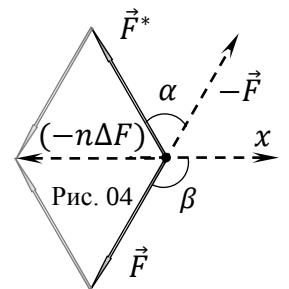
$$n\Delta F = 2F \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow F = \frac{n\Delta F}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (8)$$

где  $F$  – модуль равнодействующей силы.

Интересно, что модуль  $F$  равнодействующей не зависит от  $F_1$ , а определяется только разностью  $\Delta F$  арифметической прогрессии и количеством  $n$  ее членов. Это и понятно, по тому же правилу многоугольника векторная сумма всех членов  $F_1$  равна нулю.

Напомним, что для задания вектора  $\vec{F}$  помимо модуля (8) необходимо также обязательно определить и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол  $\beta$ , образованный искомым вектором  $\vec{F}$  с осью  $Ox$ , (см. Рис. 04).



Из равнобедренного треугольника сил, учитывая, что  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  и углы при основании равны, найдем

$$\beta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{n+2}{2n}\pi. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) полностью задают искомым вектор  $\vec{F}$ , приложенный к материальной точке (где  $n \geq 2$ ).

Для модуля ускорения  $a_2$  материальной точки окончательно получаем

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{n\Delta F}{2m \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \quad (10)$$

причем вектор  $\vec{a}_2$  будет направлен под углом

$$\beta = \frac{n+2}{2n}\pi \quad (11)$$

к оси  $Ox$  ( $n \geq 2$ ).

**1.3** Для вычислений с использованием (10) и (11) из условия задачи найдем необходимые параметры:  $n = 12$ ;  $\Delta F = 10 \text{ Н}$ . После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{12 \cdot 10}{2 \cdot 23,2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{9,992336134\} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right), \quad (12)$$

$$\beta = \frac{12+2}{2 \cdot 12} \pi = \frac{7}{12} \pi = 105^\circ. \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) с (2) и (3), не только испытываешь чувство удовлетворения (физика – наука точная!), но и понимаешь, насколько труднее получить общее решение по сравнению с частным, отдельным случаем. Но это всегда гораздо престижнее... ☺

### Задание 9-2. Двойное скольжение

*Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:* трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

**1.1 «Шарик и параллелепипед»** Небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к вертикальной стенке в точке  $O$  (Рис. 1), свисает с параллелепипеда размерами  $a \times b$  (в плоскости рисунка), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Параллелепипед начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_1$  шарика в процессе его скольжения по вертикальной стенке параллелепипеда. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от параллелепипеда.

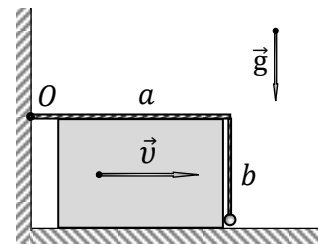


Рис. 1

**1.2 «Шарик и наклонная плоскость»** Усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к стене, который лежит на наклонной плоскости (Рис. 2), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Наклонную плоскость начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_2$  шарика в процессе его скольжения по наклонной плоскости. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , ее длина  $l$ .

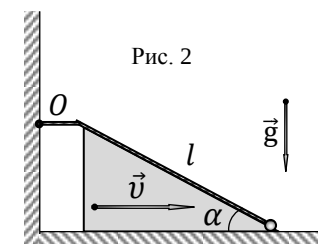


Рис. 2

**1.3 «Шарик и полусфера»** Еще более усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик на легкой нерастяжимой нити, который лежит на полусфере (Рис. 3), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Полусферу начинают двигать вправо с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Найдите скорость  $\vec{u}_3(x)$  шарика в процессе его скольжения по полусфере в момент времени, когда полусфера сместилась на расстояние  $x$  ( $x < R$ ). Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от полусферы. Радиус полусферы  $R$ .

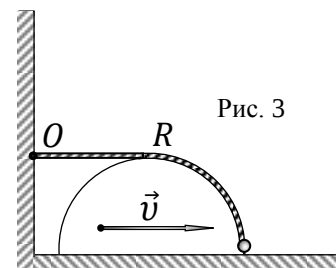


Рис. 3

Решение:

### Задание 9-2. «Двойное скольжение»

**1.1 «Шарик и параллелепипед»** Поскольку движение параллелепипеда равномерное и прямолинейное, то логично предположить, что шарик также будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}_1$  под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту.

В таком случае для нахождения скорости нет необходимости рассматривать малые промежутки времени  $\Delta t$ , а можно выбрать любой удобный конечный промежуток времени  $t$ .

Воспользуемся этим соображением и рассмотрим систему через промежуток времени  $t$ , когда параллелепипед сместился вправо на длину вертикальной стороны  $b$  (Рис. 01)

$$b = vt. \quad (1)$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по вертикальной стенке параллелепипеда до его вершины  $B$  (см. Рис. 01).

Следовательно, его перемещение  $AB$  (по модулю) составило гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника

$$AB = \sqrt{2}b. \quad (2)$$

Соответственно, искомая скорость  $\vec{u}_1$  шарика будет направлена вдоль гипотенузы  $AB$  (под углом  $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  к горизонту) и равна по модулю

$$u_1 = \frac{AB}{t} = \frac{\sqrt{2}b}{b/v} = v\sqrt{2} = \sqrt{2}v. \quad (3)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок  $AB$ , также направленный под углом  $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  к горизонту, длиной

$$AB = b\sqrt{2} = \sqrt{2}b. \quad (4)$$

Как следует из (4), сторона  $a$  параллелепипеда не влияет на решение данной задачи – она может быть любой. Эта сторона параллелепипеда играет существенную роль только при рассмотрении дальнейшего движения системы. ☺

**1.2 «Шарик и наклонная плоскость»** Применяя те же общие рассуждения, что и в предыдущем пункте, делаем вывод, что и в этом случае шарик будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{u}_2$  под некоторым углом  $\beta$  к горизонту.

Соответственно, рассмотрим систему через промежуток времени  $t$ , когда наклонная плоскость сместилась вправо на свою длину  $l$  (Рис. 02)

$$l = vt. \quad (5)$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по наклонной плоскости до ее вершины  $D$  (см. Рис. 02).

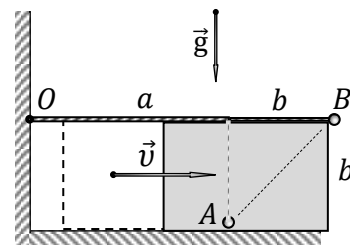


Рис. 01

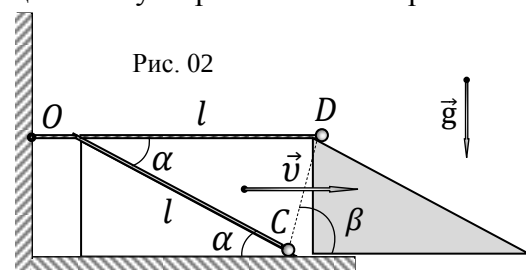


Рис. 02

Следовательно, его перемещение  $CD$  (по модулю) составило основание равнобедренного треугольника с углом  $\alpha$  при вершине

$$CD = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (6)$$

Соответственно, искомая скорость  $\vec{u}_2$  шарика будет направлена вдоль основания  $CD$  равнобедренного треугольника под углом  $\beta$  к горизонту

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}. \quad (7)$$

Модуль  $u_2$  скорости  $\vec{u}_2$  при этом будет

$$u_2 = \frac{CD}{t} = \frac{2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{l/v} = 2v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок  $CD$ , направленный под углом  $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  к горизонту, длиной

$$CD = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (9)$$

Интересно, что при  $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  из (8) и (9) получаем формулы (3) и (4) из предыдущего пункта, поскольку вертикальную стенку параллелепипеда можно считать «наклонной плоскостью» с прямым углом. Физика рулит! ☺

**1.3 «Шарик и полусфера»** Движение полусферы равномерное, следовательно, через промежуток времени  $t$  она пройдет по плоскости расстояние (Рис. 03)

$$x = vt. \quad (10)$$

В силу нерастяжимости нити шарик пройдет по полусфере такое же расстояние  $x$  и окажется в точке  $E$  (см. Рис. 03), причем длина дуги  $EF$  будет равна

$$\widetilde{EF} = x = vt = \varphi R. \quad (11)$$

Из (11) находим угол  $\varphi$

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{vt}{R}. \quad (12)$$

Проведем касательную к полусфере в точке нахождения шарика в данный момент времени (см. Рис. 03). Она будет образовывать с горизонтом угол  $\gamma$ , который равен

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (13)$$

Для мгновенного движения шарика маленький участок полусферы можно считать прямым участком движущейся наклонной плоскости, составляющей такой же угол  $\gamma$  с горизонтом. А это значит, что можно воспользоваться формулами (7) и (8) из предыдущего пункта задачи для наклонной плоскости, в которые вместо угла  $\alpha$  подставить угол  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ .

Следовательно, модуль мгновенной скорости шарика  $u_3$  будет равен

$$u_3(\varphi) = 2v \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2v \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2}\right) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14)$$

или

$$u_3(x) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2R}\right), \quad (15)$$

или

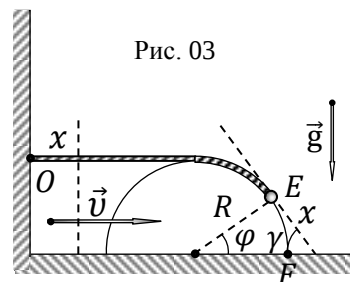


Рис. 03

$$u_3(t) = 2v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{vt}{2R}\right). \quad (16)$$

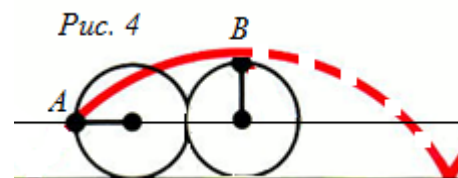
Скорость  $\vec{u}_3$  в данный момент будет направлена под углом к горизонту

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2R} = \frac{\pi}{4} + \frac{vt}{2R}. \quad (17)$$

В частности, в момент начала движения ( $\varphi = 0$ ) угол  $\delta = \frac{\pi}{4}$ , при этом шарик находится у практически вертикальной стенки полусферы, т.е. как в первом пункте задачи (с параллелепипедом). И там, действительно, угол был 45 градусов.

В данном пункте (это несложно обосновать), траекторией движения шарика будет участок  $AB$  циклоиды (Рис. 4), т.е. кривой, которую описывает в пространстве точка на ободе кольца, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности.

Существенными параметрами циклоиды являются высота арки циклоиды ( $h = 2R$ ) и расстояние ( $S = 2\pi R$ ) между точками касания поверхности качения.



### Задание 9-3. Конечная бесконечность

**1.1 «Шаг за шагом ...»** Рассмотрим линейную электрическую цепь из резисторов  $R$  и  $2R$ , составленную из одинаковых повторяющихся звеньев (Рис. 1).

Интересно, что сопротивление  $R_\infty^*$  такой цепи будет конечным даже при бесконечном числе звеньев ( $n \rightarrow \infty$ ).

Пусть  $R_n$  – сопротивление конечной линейной цепи при  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ) звеньях. Назовем *относительной погрешностью оценки*  $R_\infty^*$  величину  $\varepsilon_n = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n}$ , выраженную в процентах.

Найдите сопротивления одного звена  $R_1$  данной цепи, её двух звеньев  $R_2$ , а также относительную погрешность  $\varepsilon_1$  оценки  $R_\infty^*$ . Далее проделайте такую же процедуру с  $R_2$  и  $R_3$ , найдите  $\varepsilon_2$ . Продолжайте данную процедуру шаг за шагом до тех пор, пока относительная погрешность  $\varepsilon_n$  оценки  $R_\infty^*$  не станет меньше одного процента ( $\varepsilon_n < 1,0\%$ ). При каком значении  $n$  это произошло? Чему равно  $R_n$ ?

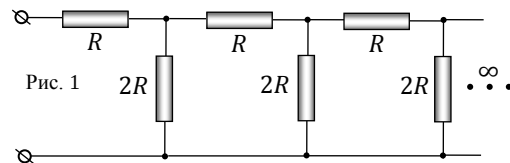


Рис. 1

**1.2 «Линейная бесконечность»** Найдите точное значение сопротивления  $R_\infty^*$  всей бесконечной линейной цепочки (Рис. 1).

**1.3 «Плоская бесконечность»** Из резисторов  $R$  и  $2R$  на плоскости собрана бесконечная электрическая цепь  $AZ$  (Рис. 2), некоторые части которой стерты (затонированы). Известно, что данная цепь обладает следующим свойством: сопротивление  $R_{AB}$  первого звена цепи равно сопротивлению  $R_{AC}$  её двух первых звеньев, которое, в свою очередь, равно сопротивлению  $R_{AD}$  первых трех звеньев цепи и т.д. (до бесконечности). Восстановите стертые (затонированные) участки цепи на рисунке. Найдите сопротивление  $R_\infty^{**} = R_{AZ}$  восстановленной вами бесконечной плоской цепи.

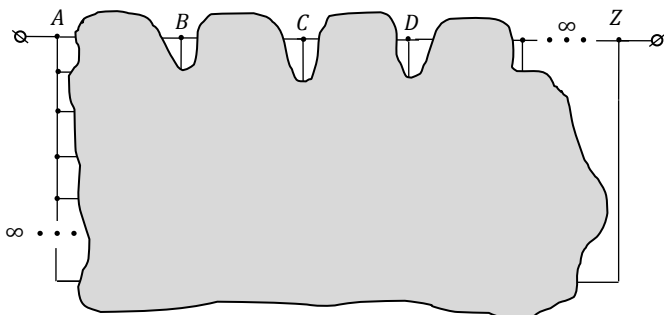


Рис. 2

Решение:

### Задание 9-3. «Конечная бесконечность»

**1.1 «Шаг за шагом ...»** Для реализации первого шага предложенного алгоритма найдем сопротивления одного звена  $R_1$  (Рис. 01, а)) и двух звеньев  $R_2$  (Рис. 01, б))

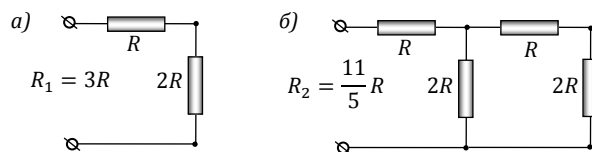


Рис. 01

$$R_1 = R + 2R = 3R, \quad (1)$$

$$R_2 = R + \frac{2R \cdot R_1}{2R + R_1} = R + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \left(1 + \frac{6}{5}\right)R = \frac{11}{5}R = 2\frac{1}{5}R. \quad (2)$$

Тогда для первого шага ( $n = 1$ ) в рамках предложенной схемы оценки  $R_\infty^*$  относительная погрешность равна

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1} = \frac{3 - \frac{11}{5}}{3} = \frac{4}{15} = 27\%. \quad (3)$$

Поскольку  $\varepsilon_1$  существенно больше одного процента  $\varepsilon_1 \gg 1\%$ , то продолжим процедуру далее.

Для второго шага ( $n = 2$ ) вычислим сопротивление трех звеньев цепи (Рис. 02) с учетом того, что сопротивление двух звеньев  $R_2$  мы уже знаем

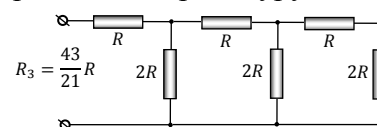


Рис. 02

$$R_3 = R + \frac{2R \cdot R_2}{2R + R_2} = R + \frac{2R \cdot \frac{11R}{5}}{2R + \frac{11R}{5}} = \left(1 + \frac{22}{21}\right)R = \frac{43}{21}R = 2\frac{1}{21}R, \quad (4)$$

Следовательно

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_2} = \frac{\frac{11}{5} - \frac{43}{21}}{\frac{11}{5}} = \frac{16}{231} = 6,9\%. \quad (5)$$

Хотя тенденция и наметилась, но продолжаем процедуру далее, поскольку  $\varepsilon_2 > 1\%$ .

Для третьего ( $n = 3$ ) шага вычислим сопротивление  $R_4$  четырех звеньев цепи с учетом (4) (Рис. 03) и правил вычисления батарей резисторов

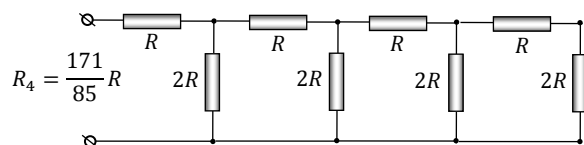


Рис. 03

$$R_4 = R + \frac{2R \cdot R_3}{2R + R_3} = R + \frac{2R \cdot \frac{43R}{21}}{2R + \frac{43R}{21}} = \left(1 + \frac{86}{85}\right)R = \frac{171}{85}R = 2\frac{1}{85}R. \quad (6)$$

Тогда

$$\varepsilon_3 = \frac{R_3 - R_4}{R_3} = \frac{\frac{43}{21} - \frac{171}{85}}{\frac{43}{21}} = \frac{64}{3655} = 1,8\%, \quad (7)$$

т.е. осталось совсем немного, поскольку погрешность оценки близка к одному проценту.

На четвертом шаге ( $n = 4$ ) нам потребуется также вычислить  $R_5$  (с учетом (6))

$$R_5 = R + \frac{2R \cdot R_4}{2R + R_4} = R + \frac{2R \cdot \frac{171R}{85}}{2R + \frac{171R}{85}} = \left(1 + \frac{342}{341}\right)R = \frac{683}{341}R = 2\frac{1}{341}R. \quad (8)$$

Соответственно, для  $\varepsilon_4$  получим

$$\varepsilon_4 = \frac{R_4 - R_5}{R_4} = \frac{\frac{171}{85} - \frac{683}{341}}{\frac{171}{85}} = \frac{256}{58311} = 0,44 \% . \quad (9)$$

Это победа! Таким образом, уже на четвертом шаге ( $n = 4$ ) мы получили оценку  $R_\infty^*$  с неплохой точностью (менее одного процента!)

$$R_\infty^* \approx R_n = R_4 = \frac{171}{85} R = 2 \frac{1}{85} R = 2,012 R . \quad (10)$$

Интересно, что на следующем (пятом) шаге (от школьников не требуется!) погрешность составит совсем малую величину (сотые доли процента!)

$$\varepsilon_5 = \frac{R_5 - R_6}{R_5} = \frac{\frac{683}{341} - \frac{2730}{1364}}{\frac{683}{341}} = \frac{1}{1366} = 0,073 \% ,$$

так что результат  $R_5 = \frac{683}{341} R = 2 \frac{1}{341} R = 2,00293 R$  уже предельно близок к точному значению  $R_\infty^*$ .

Анализируя полученные результаты  $R_n$ , делаем «осторожное предположение», что все они монотонно стремятся к значению  $R_\infty^* = 2R$ , поскольку по мере роста  $n$  целая часть дроби перестала меняться, а дробная часть продолжала уменьшаться. ☺

**1.2 «Линейная бесконечность»** Для прямого расчета  $R_\infty^* = R_\infty$  используется метод «отбрасывания одного звена» или, как шутят олимпиадники, «метод песчинки». (Если от кучи песка отнять песчинку, то все равно останется куча. Если от бесконечности отнять единицу, то останется бесконечность. ☺)

Отсечем от схемы первое звено по линии  $AB$  (Рис. 04, а)). Электрическая цепь правее линии  $AB$  по-прежнему содержит бесконечное число повторяющихся звеньев («принцип песчинки»), т.е. её сопротивление будет равно  $R_\infty$ . Следовательно, схему можно перерисовать так, как показано на Рис. 04, б). Тогда по правилам расчета электрических сопротивлений получаем

$$R_\infty = R + \frac{2R \cdot R_\infty}{2R + R_\infty} . \quad (11)$$

Из (11) после преобразований получаем квадратное уравнение относительно  $R_\infty$

$$R_\infty^2 - R_\infty R - 2R^2 = 0 , \quad (12)$$

решения которого имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\infty 1} &= \frac{R + \sqrt{9R^2}}{2} = 2R \\ R_{\infty 2} &= \frac{R - \sqrt{9R^2}}{2} = -R \end{aligned} . \quad (13)$$

Второй (отрицательный) корень отбрасываем, поскольку он не имеет физического смысла – сопротивление по определению положительно. Таким образом, сопротивление данной бесконечной цепочки действительно конечно и равно

$$R_\infty^* = 2R . \quad (14)$$

Если вдуматься, то ничего удивительного здесь нет, поскольку последовательное соединение большого числа резисторов увеличивает сопротивление цепи (до бесконечности), а параллельное – уменьшает (до нуля). Вот и получилась у них «боевая ничья». ☺

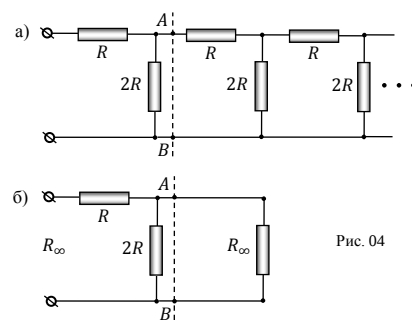


Рис. 04

**1.3 «Плоская бесконечность»** При параллельном соединении двух одинаковых резисторов их общее сопротивление уменьшается в два раза, а при последовательном – увеличивается в такое же количество раз.

Удачно комбинируя такие соединения, можно собрать схему с указанными в условии свойствами, т.е. получить «постоянное» сопротивление плоской бесконечной цепи при добавлении следующего звена.

Один из возможных вариантов представлен на Рис. 05.

Понятно, что сопротивление такой бесконечной цепи на плоскости просто равно сопротивлению ее первого звена

$$R_{\infty}^{**} = R_{AZ} = R_{AB} = R. \quad (15)$$

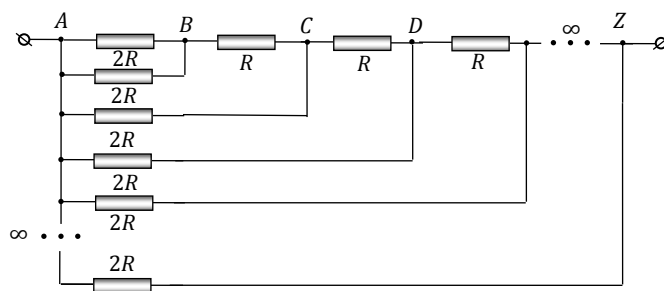


Рис. 05



# Республиканская физическая олимпиада 2024 год (III этап)

## Теоретический тур

### *Решения задач 10 класс (для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

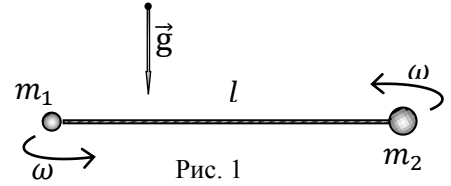


***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших  
талантливых школьников!***

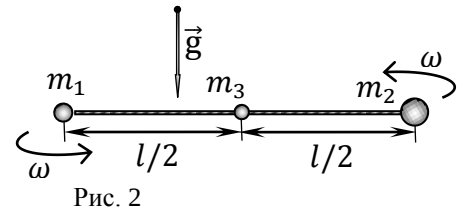
**Задание 10-1. «Лихо закручено»**

*Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:* трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

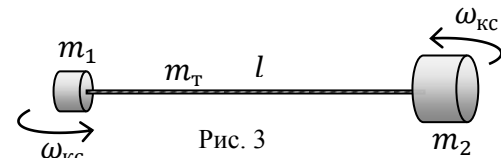
**1.1 «Два шарика на нити»** Два небольших шарика массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанные легкой нитью длиной  $l$ , вращаются с угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости (Рис. 1). Найдите силы натяжения нитей  $T_1$  и  $T_2$ , действующие на каждый из шариков, соответственно. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.



**1.2 «Три шарика на нити»** Усложним задачу и добавим к середине нити длиной  $l$  третий небольшой шарик массой  $m_3$  (Рис. 2). При вращении такой системы на горизонтальной плоскости оказалось, что модуль силы натяжения легкой нити у первого шарика равен  $T_1$ , а у второго, соответственно,  $T_2$ . Найдите массу  $m_3$  третьего шарика и угловую скорость  $\omega$  вращения системы, считая массы шариков  $m_1$  и  $m_2$  известными.



**1.3 «Космическое вращение»** Космическая станция состоит из двух отсеков массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных длинным однородным тросом длины  $l$ . Станция вращается вокруг оси, перпендикулярной тросу, при этом модуль силы натяжения троса вблизи одного отсека равен  $T$ , а вблизи другого  $T + \Delta T$  ( $\Delta T \ll T$ ). Найдите массу соединительного троса  $m_T$  и угловую скорость  $\omega_{\text{КС}}$  вращения космической станции.



Решение:

### Задание 10-1. «Лихо закручено»

**1.1 «Два шарика на нити»** Вращение шариков (материальных точек) на легкой нити по плоскости будет происходить вокруг их центра масс – точки  $O$  (Рис. 01). При этом сама точка  $O$  будет оставаться неподвижной относительно гладкой горизонтальной плоскости, т.к. нет горизонтальных сил, способных «сдвинуть» систему с места (силы натяжения нитей  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  внутренние, их сумма равна нулю).

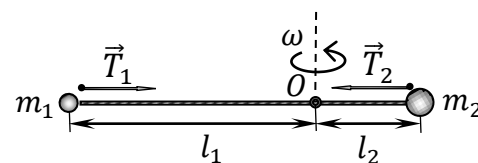


Рис. 01

Таким образом, траектории шариков будут представлять собой горизонтальные окружности радиусами  $l_1$  и  $l_2$  с центром в точке  $O$ . Радиусы траекторий шариков найдем из традиционной системы уравнений для центра масс двух материальных точек (см. Рис. 01)

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) находим искомые расстояния до центра масс (оси вращения системы)

$$\begin{cases} l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку трения в системе нет, то угловая скорость вращения шариков вокруг точки  $O$  будет по инерции оставаться постоянной  $\omega = \text{const}$ .

Из второго закона Ньютона с учетом (2) для движения первого шарика в горизонтальной плоскости найдем

$$m_1 \omega^2 l_1 = T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 \omega^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l. \quad (3)$$

Аналогично для второго шарика

$$m_2 \omega^2 l_2 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2 \omega^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l. \quad (4)$$

Как следует из (3) и (4), силы натяжения нитей в такой системе (нить легкая) одинаковы и равны

$$T_1 = T_2 = T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l = \mu \omega^2 l, \quad (5)$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – т.н. «приведенная масса», вспомогательная величина с размерностью массы, часто возникающая при описании системы двух тел. Так из (5) следует, что сила натяжения, действующая на каждый из шариков, равна силе натяжения  $T$  при движении тела с приведенной массой  $\mu$  на нити длиной  $l$  с той же угловой скоростью  $\omega$ .

**1.2 «Три шарика на нити»** При добавлении третьего шарика на середину нити физика процесса не изменится – центр масс  $O$  трех шариков (Рис. 02) по-прежнему будет неподвижным при вращении системы на горизонтальной плоскости. Соответственно, через точку  $O$  будет проходить вертикальная ось вращения всей системы с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

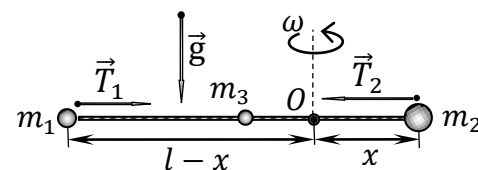


Рис. 02

Однако теперь модули  $T_1$  и  $T_2$  сил натяжения легких нитей, связывающих грузы, будут различными, поскольку шарик  $m_3$  имеет массу, и для его ускоренного движения нужна ненулевая разность сил.

Пусть расстояние от шарика с массой  $m_2$  до центра масс  $O$  равно  $x$  (Рис. 02). Второй закон Ньютона для движения каждого из шариков в горизонтальной плоскости примет вид

$$m_2 \omega^2 x = T_2, \quad (6)$$

$$m_1 \omega^2 (l - x) = T_1, \quad (7)$$

$$m_3 \omega^2 \left(\frac{l}{2} - x\right) = T_2 - T_1. \quad (8)$$

Разделив (6) на (7), придем к равенству

$$\frac{m_2 x}{m_1 (l - x)} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (9)$$

из которого найдем

$$x = \frac{m_1 T_2}{m_1 T_2 + m_2 T_1} l. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), найдем угловую скорость вращения шариков

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}}, \quad (11)$$

а подставляя (10) в (8), найдем массу  $m_3$  третьего шарика

$$m_3 = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2}. \quad (12)$$

**1.3 «Космическое вращение»** Для решения этого пункта достаточно догадаться, что роль третьего шарика массой  $m_3$  здесь играет трос, центр масс которого находится на половине длины  $\frac{l}{2}$ , т.е. в той же точке где находился третий шарик (это важно!).

Следовательно, можно просто аккуратно воспользоваться формулами (11) и (12) с учетом условия малости ( $\Delta T \ll T$ ) разности сил натяжения концов троса (вдоль самого троса эта сила меняется, но уравнения записываются для движения центра масс тела!).

Будем считать, что второй отсек массивнее первого ( $m_2 > m_1$ ), тогда понятно, что  $T_2 = T + \Delta T$ , а  $T_1 = T$ .

Соответственно, масса троса, соединяющего отсеки космической станции, будет равна

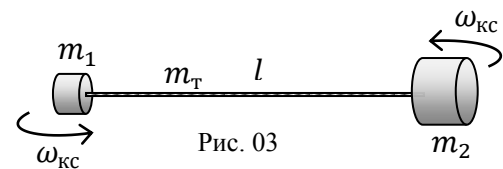
$$m_T = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2} = \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T + m_2 \Delta T} = \{\Delta T \ll T\} \approx \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T}, \quad (13)$$

а угловая скорость вращения станции

$$\omega_{\text{КС}} = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T + m_1 \Delta T}{m_1 m_2 l}} = \{\Delta T \ll T\} \approx \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{T}{\mu l}}, \quad (14)$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – приведенная масса отсеков станции (без массы троса!).

Обратите внимание, что результат (14) напрямую следует из (5), поскольку масса троса гораздо меньше массы каждого из отсеков по отдельности.



## Задание 10-2. Годограф

*Годографом* вектора называется кривая, представляющая собой множество концов переменного со временем вектора  $\vec{a}(t)$ , начало которого для всех  $t$  есть фиксированная точка  $O$  («Математический энциклопедический словарь»). Иными словами годограф вектора представляет собой множество точек, по которым «движется» конец данного вектора со временем, если положение его начала зафиксировать в некоторой точке  $O$ .

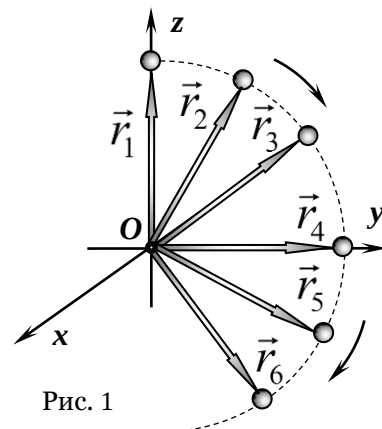


Рис. 1

Справедливости ради отметим, что школьники косвенно знакомы с данным понятием, поскольку годографом радиус-вектора  $\vec{r}_i(t)$  ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ ) движущейся материальной точки является ... её траектория, отмеченная на рисунке 1 пунктирной линией. Годограф вектора наглядно представляет его изменение с течением времени, а также используется при различных расчетах.

### Часть 1. Вычисление полного ускорения

**1.1** Небольшой массивный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, отклонили так, что нить стала горизонтальна и аккуратно отпустили без натяжения нити (рис. 2). При движении шарик будет приобретать как центростремительное (нормальное) ускорение  $\vec{a}_n$ , направленное вдоль нити, так и касательное (тангенциальное)  $\vec{a}_\tau$  ускорение, направленное перпендикулярно нити (см. рис. 2). Сумма  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$  называется *полным* ускорением тела. Найдите зависимости модулей ускорений  $\vec{a}_n$  и  $\vec{a}_\tau$  от угла  $\alpha$ , образованного нитью с вертикалью. Соппротивлением воздуха пренебrecь. Ускорение свободного падения  $\vec{g}$ .

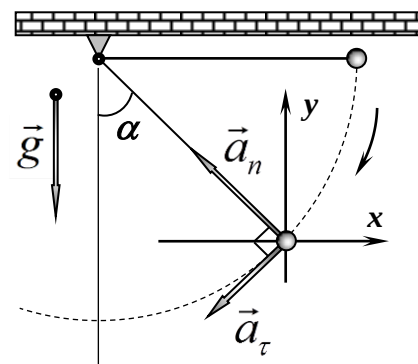


Рис. 2

**1.2** Найдите зависимость  $a(\alpha)$  модуля полного ускорения  $\vec{a}$  шарика от угла  $\alpha$  в процессе движения до нижней точки траектории.

**1.3** Поскольку вектор полного ускорения шарика поворачивается со временем, то в некоторый момент он будет горизонтален. Найдите полное ускорение шарика  $a_1$  и угол  $\alpha_1$  между нитью и вертикалью в этот момент времени.

### Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

**2.1** Найдите зависимости проекций  $a_x$  и  $a_y$  полного ускорения шарика от угла  $\alpha$  в стандартной (декартовой) системе координат. Выразите их в безразмерных единицах  $a_x^* = a_x / g$  и  $a_y^* = a_y / g$ .

**2.2** Чему равен модуль максимального горизонтального ускорения  $a_{x \max}$  шарика в процессе движения до низшей точки траектории? Максимального вертикального ускорения  $a_{y \max}$ ?

**2.3** Разбейте прямой угол  $\alpha$  на интервалы по  $\Delta\alpha = 5^\circ$  градусов и вычислите проекции ускорений  $a_x^*$  и  $a_y^*$  для точек в диапазоне  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Результаты вычислений занесите в Таблицу 1 (см. ниже).

**2.4** Пользуясь Таблицей 1, постройте на выданном бланке годограф полного ускорения шарика при его движении до нижней точки траектории.

**2.5** Проанализируйте построенный годограф, отметьте его существенные особенности и попытайтесь описать их математически (например, получить уравнение, описывающее полученную кривую).

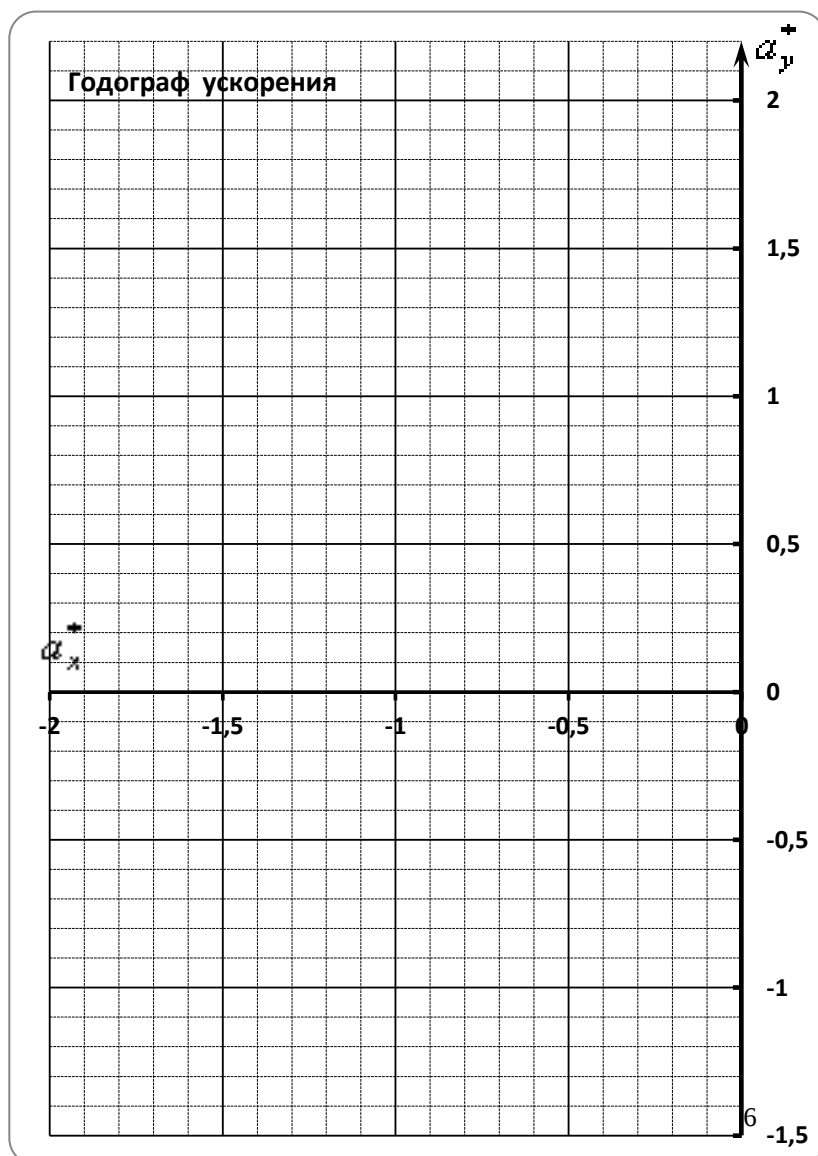
Таблица 1. Вычисление  $a_x^*$  и  $a_y^*$ .

по

Бланк для построения годографа ускорения шарика

Таблице 1.

| Угол       | $a_x^*$ | $a_y^*$ |
|------------|---------|---------|
| $90^\circ$ |         |         |
| $85^\circ$ |         |         |
| $80^\circ$ |         |         |
| $75^\circ$ |         |         |
| $70^\circ$ |         |         |
| $65^\circ$ |         |         |
| $60^\circ$ |         |         |
| $55^\circ$ |         |         |
| $50^\circ$ |         |         |
| $45^\circ$ |         |         |
| $40^\circ$ |         |         |
| $35^\circ$ |         |         |
| $30^\circ$ |         |         |
| $25^\circ$ |         |         |
| $20^\circ$ |         |         |
| $15^\circ$ |         |         |
| $10^\circ$ |         |         |
| $5^\circ$  |         |         |
| $0^\circ$  |         |         |



## Решение:

### Часть 1. Вычисление полного ускорения

**1.1** В момент, когда нить составляет угол  $\alpha$  с горизонтом, шарик опустился на высоту  $h = l \cos \alpha$  (рис. 1), где  $l$  – длина нити. Согласно закону сохранения механической энергии (потерь нет) для движения шарика массой  $m$  можем записать

$$mgh = mgl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gl \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $v$  – скорость шарика в рассматриваемый момент, направленная по касательной к дуге. Следовательно, нормальное (центростремительное) ускорение шарика на нерастяжимой нити в данной точке

$$a_n = a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{l} = \{(1)\} = 2g \cos \alpha \quad (2)$$

На шарик действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила упругости нити  $\vec{T}$  (см. рис. 1), следовательно, второй закон Ньютона в проекциях на текущее направление нити и по касательной к ней примет вид

$$\begin{aligned} ma_n &= T - mg \cos \alpha \\ ma_\tau &= mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2) из системы (3) находим выражения для касательного ускорения и силы упругости нити

$$\begin{aligned} a_\tau &= g \sin \alpha \\ T &= 3mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

**1.2** Соответственно, полное ускорение шарика в данный момент найдем с помощью теоремы Пифагора и выражений (2) и (4)

$$a(\alpha) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + 4g^2 \cos^2 \alpha} = g\sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Как следует из (5), в начальный момент времени ( $\alpha = \pi/2$ ) полное ускорение шарика равно ускорению свободного падения  $a = g$  и направлено вниз. Таким образом, пока нить не натянулась, шарик практически свободно падает в течение малого промежутка времени. Поскольку при этом центростремительное ускорение шарика равно нулю (он ещё не успел набрать скорость), то полное ускорение равно касательному ускорению и равно  $g$ .

При прохождении шариком нижней точки траектории ( $\alpha = 0$ ) равно нулю касательное ускорение, а его полное ускорение имеет максимальное значение  $a = 2g$  и направлено вверх. В этом случае оно совпадает с центростремительным ускорением. Заметим, что сила натяжения нити при этом максимальна и равна  $T = 3mg$  (направлена вверх).

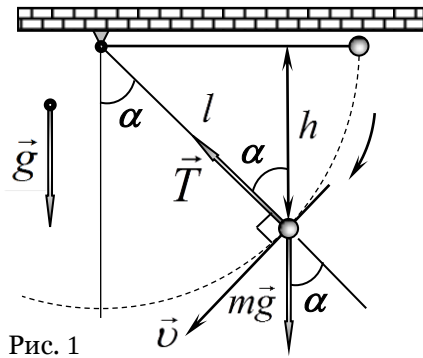


Рис. 1

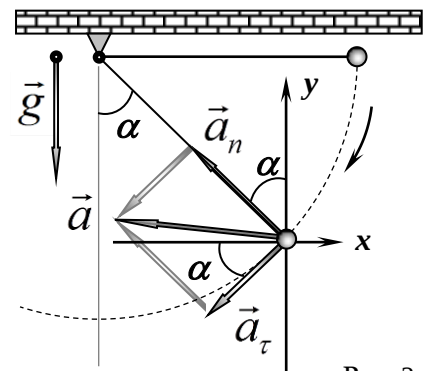


Рис. 2

Угол  $\beta$ , который составляет вектор полного ускорения  $\vec{a}$  с горизонтом, найдем из параллелограмма ускорений на рисунке 2

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_\tau \sin \alpha - a_n \cos \alpha}{a_\tau \cos \alpha + a_n \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{3 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

**1.3** В момент, когда вектор полного ускорения шарика горизонтален  $\beta = 0$ , следовательно

$$\operatorname{tg} \beta = 0 \Rightarrow a_\tau \sin \alpha_1 = a_n \cos \alpha_1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 55^\circ. \quad (7)$$

Подставляя полученное значение угла  $\alpha_1 = 55^\circ$  в формулу для полного ускорения (5), находим искомое значение для горизонтального ускорения шарика

$$a_1 = g \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha_1} = g \sqrt{1 + \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = g \sqrt{2} = 1,4g. \quad (8)$$

## Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

**2.1** Для удобства построения годографа вектора ускорения шарика перейдём к декартовым координатам  $(x, y)$ , изображенным на рисунке 3 (с учетом знаков). Тогда проекции полного ускорения шарика примут вид

$$\begin{aligned} a_x &= -a_\tau \cos \alpha - a_n \sin \alpha = -3g \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2}g \sin 2\alpha \\ a_y &= -a_\tau \sin \alpha + a_n \cos \alpha = g(2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \quad (9)$$

Для формализации процесса расчёта введем удобные безразмерные единицы измерения ускорений, имеющие очевидный смысл

$$a_x^* = \frac{a_x}{g}; a_y^* = \frac{a_y}{g}. \quad (10)$$

Тогда расчетные формулы для заполнения таблицы примут вид

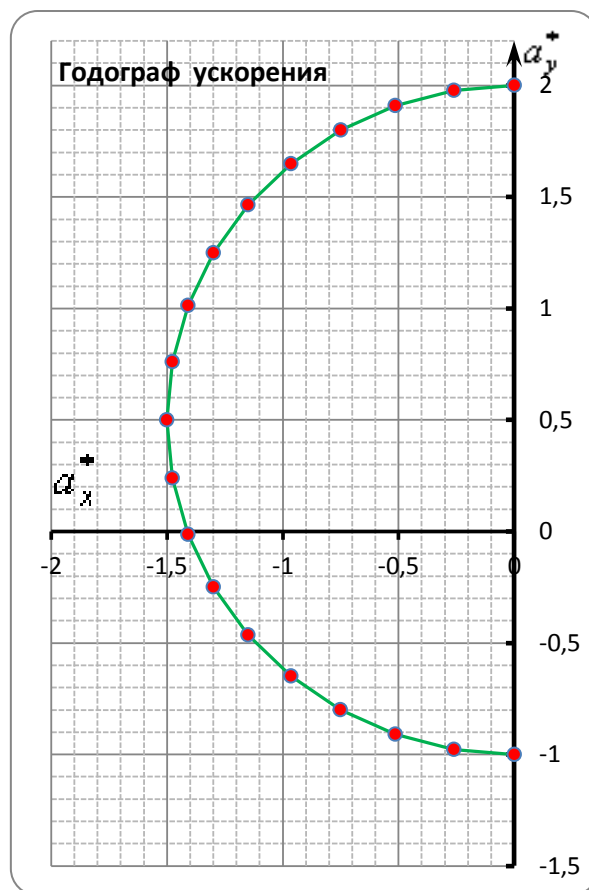
$$\begin{aligned} a_x^*(\alpha) &= -3 \sin \alpha \cos \alpha \\ a_y^*(\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

**2.3** Расчёт по формулам даёт следующие результаты

Таблица 1. Вычисление  $a_x^*$  и  $a_y^*$ . Рис. 3. Построение годографа ускорения на бланке.

| Угол       | $a_x^*$ | $a_y^*$ |
|------------|---------|---------|
| $90^\circ$ | 0,00    | -1      |
| $85^\circ$ | -0,26   | -0,98   |
| $80^\circ$ | -0,51   | -0,91   |
| $75^\circ$ | -0,75   | -0,80   |
| $70^\circ$ | -0,96   | -0,65   |
| $65^\circ$ | -1,15   | -0,46   |
| $60^\circ$ | -1,30   | -0,25   |
| $55^\circ$ | -1,41   | -0,01   |
| $50^\circ$ | -1,48   | 0,24    |
| $45^\circ$ | -1,50   | 0,50    |

|     |       |      |
|-----|-------|------|
| 40° | -1,48 | 0,76 |
| 35° | -1,41 | 1,01 |
| 30° | -1,30 | 1,25 |
| 25° | -1,15 | 1,46 |
| 20° | -0,96 | 1,65 |
| 15° | -0,75 | 1,80 |
| 10° | -0,51 | 1,91 |
| 5°  | -0,26 | 1,98 |
| 0°  | 0,00  | 2,00 |



2.2 Как следует из анализа рисунка 3, максимальное (по модулю) горизонтальное ускорение шарика равно  $|a_x^*| = |-1,5| = 1,5$ . Это же, кстати, следует и из формулы (9) при  $\alpha = \pi/4$ .

Максимальное же вертикальное ускорение  $a_y^* = 2,0$  шарик приобретает в нижней точке траектории ( $\alpha = 0$ ), которой соответствует верхняя точке графика на рисунке 3.

2.4 Удивительно, но несмотря на достаточно сложный характер рассматриваемого движения, график на рисунке 3 напоминает траекторию движения самого шарика! Действительно, точки неплохо «ложатся» на полуокружность радиуса  $R = 1,5$  с центром в точке с координатами  $(0; +0,5)$ . Убедимся в справедливости сделанного предположения.

2.5 Поскольку уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке с координатами  $(a; b)$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (12)$$

то для доказательства справедливости сделанного предположения достаточно проверить тождественность равенства (13) при любых  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

$$(a_x^*)^2 + (a_y^* - 0,5)^2 = 1,5^2 = \frac{9}{4}. \quad (13)$$

Используя (11) приведём (13) к виду

$$9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}. \quad (14)$$

После избавления от знаменателя и раскрытия скобок из (14) находим

$$36\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 16\cos^4 \alpha - 16\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha + 1 = 9. \quad (15)$$

Приводя подобные, и сокращая, упростим выражение (15) следующим образом

$$5\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2. \quad (16)$$

Собирая полный квадрат, с учётом основного тригонометрического тождества  $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2$ , выражение (16) примет вид

$$3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3\cos^4 \alpha + 1 - 2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2. \quad (17)$$

Далее «немного удачи» при перегруппировке членов и вынесении за скобки

$$\sin^2 \alpha (3\cos^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (3\cos^2 \alpha + 1) - 3\cos^2 \alpha = 1, \quad (18)$$

позволяют ещё раз довести дело до основного тригонометрического тождества и до ... победного конца

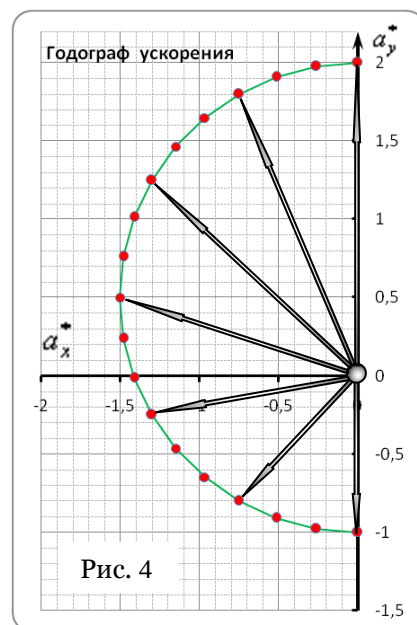
$$\begin{aligned} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(3\cos^2 \alpha + 1) - 3\cos^2 \alpha &= 1 \\ 3\cos^2 \alpha + 1 - 3\cos^2 \alpha &= 1 \quad !!! \\ 1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

(19)

Легко догадаться (хотя и не требуется в условии задачи), что при движении шарика в левой полуплоскости, на годографе ускорения мы получим симметричную полуокружность, замыкающую траекторию до полной окружности. Далее с разворотом все повторяется вновь против часовой стрелки.

Поскольку центр окружности находится в точке с координатами  $(0; +0,5)$ , то в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с ускорением  $\vec{a} = -\vec{g}/2$ , направленным вверх, вектор полного ускорения неравномерно вращается по рассмотренной окружности, сохраняя свою длину.

Таким образом, искомый годограф полного ускорения шарика представляет собой полуокружность (совершенно «случайно» изображённую в условии задачи, ☺) радиусом  $R = 1,5g$  со сдвинутым (относительно начала координат) центром (рис. 4).



### Задание 10-3. Не хуже Карно ..?

Двигатели внутреннего сгорания (ДВС), работающие по различным термодинамическим циклам, успешно работают в современном мире. Миллионы машин используют как бензиновые, так и дизельные ДВС, а доля электромобилей на мировом рынке в настоящий момент крайне невелика – около 2 %.



Рис. 1

При создании ДВС в середине XIX века перед инженерами и конструкторами встал важный прикладной (и научный!) вопрос: а какой тепловой двигатель имеет максимальный термодинамический КПД, т.е. является идеальной тепловой машиной?

Заметим, что цикл Отто (бензиновый двигатель) и цикл Дизеля (дизельный двигатель) не являются идеальными тепловыми циклами, хотя автомобили, работающие по этим циклам, и составляют львиную долю современного производства.

Идеальная тепловая машина была описана в 1824 г. французским физиком и инженером Сади Карно (Рис. 1) в работе «Размышления о движущей силе огня

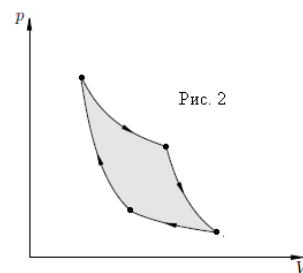


Рис. 2

и о машинах, способных развивать эту силу».

Идеальный цикл Карно (Рис. 2), состоящий из двух изотерм и двух адиабат, сегодня известен каждому школьнику.

В данном задании мы немного «пофантазируем» и предложим свой цикл, который также использует элементы знаменитого цикла Карно.

*Справочные данные и параметры рассматриваемой системы:* если  $a^n b^m = \text{const}$ , то при малых  $\Delta a$  и  $\Delta b$  ( $\Delta a \ll a$ ,  $\Delta b \ll b$ ) справедливо равенство:  $n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} = 0$  (справедливо также и обратное утверждение); молярная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

#### Часть 1. Адиабатный процесс

Термодинамический процесс, проводимый без теплообмена ( $Q = 0$ ) с окружающей средой (т.е. в теплоизолированной системе), называется *адиабатным* процессом. Адиабатными являются многие быстротекущие процессы (взрыв, быстрое расширение (сжатие) газа, распространение звуковой волны), процесс подъема теплого воздуха с поверхности земли с последующим охлаждением, конденсацией пара и образованием облаков и т.д.

**1.1** Теплоёмкость  $c^M$  идеального газа, взятого в количестве  $\nu = 1$  моль ( $m = M$ ), называется молярной теплоёмкостью. Найдите молярную теплоёмкость  $c_V^M$  идеального одноатомного газа при изохорном процессе, т.е. при постоянном объёме ( $V = \text{const}$ ). Запишите формулу для внутренней энергии  $U$  идеального одноатомного газа через  $c_V^M$  и в дальнейшем используйте её для любого идеального газа.

**1.2** Выразите молярную теплоёмкость идеального газа  $c_p^M$  при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ), т.е. при изобарном процессе, через  $c_V^M$ .

**1.3** Получите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в переменных  $(T, V)$  с показателем адиабаты  $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M}$ .

**1.4** В полученном уравнении сделайте замену переменных и запишите уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) для произвольного идеального газа в «традиционном» виде, т.е. в переменных  $(p, V)$ .

**1.5** Схематически изобразите на одной  $(p, V)$  – диаграмме ход адиабаты и изотермы идеального газа. Кратко охарактеризуйте особенности построенных графиков.

## Часть 2. Цикл с адиабатой

С идеальным одноатомным газом провели циклический процесс  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  (Рис. 3), состоящий из изобары  $A \rightarrow B$ , изохоры  $B \rightarrow C$  и адиабаты  $C \rightarrow A$ .

**2.1** Укажите участки цикла, на которых работал нагреватель, т.е. газ получал теплоту от внешнего источника. Найдите количество теплоты  $Q_1$ , переданное рабочему телу от нагревателя в данном цикле.

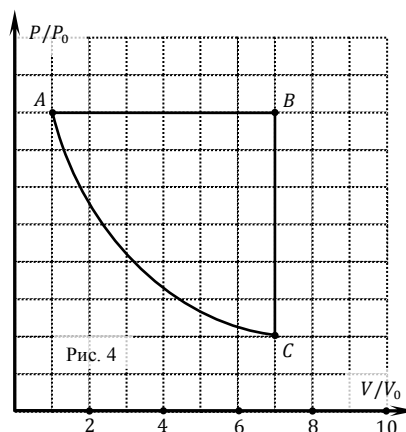
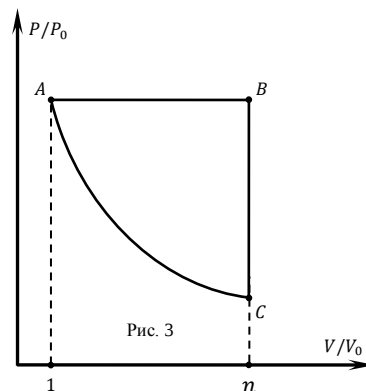
**2.2** Используя ранее полученные результаты, найдите давление  $p_C$  газа в состоянии  $C$ .

**2.3** Укажите участки цикла, на которых работал холодильник, т.е. газ отдавал теплоту внешнему источнику. Найдите количество теплоты  $Q_2$ , отданное рабочим телом холодильнику в данном цикле.

**2.4** Выведите формулу для термодинамического КПД  $\eta$  данного цикла. Как значение  $\eta$  зависит от параметров  $V_A$  и  $p_A$  термодинамической системы в начальном состоянии? Как, по вашему мнению, это можно объяснить?

**2.5** На Рис. 4 изображен подобный процесс в безразмерных (относительных) координатах объёма и давления  $(V/V_0; p/p_0)$ , где  $V_0$  и  $p_0$  – некоторые неизвестные размерные масштабные множители. Вычислите термодинамический КПД  $\eta_1$  цикла, изображенного на Рис. 4.

**2.6** Чему равен максимально возможный термодинамический КПД  $\eta_{\max}$  описанного цикла?



Возможные решения:

## Часть 1. Адиабатный процесс

1.1 Внутренняя энергия идеального одноатомного газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (1)$$

Поскольку при изохорном процессе ( $V = \text{const}$ ) работа газом не совершается, то при нагревании идеального одноатомного газа на  $\Delta T$  увеличится только его внутренняя энергия на  $\Delta U$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию, можем записать

$$\Delta U = c_V^M \nu \Delta T. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим молярную теплоёмкость идеального одноатомного газа при постоянном объёме

$$c_V^M = \frac{3}{2} R. \quad (4)$$

Заметим, что двухатомного идеального газа при комнатных температурах  $c_V^M = \frac{5}{2} R$ , для трёхатомного  $c_V^M = \frac{6}{2} R$  и далее она монотонно возрастает в зависимости от числа атомов и особенностей (температуры) изохорного процесса.

Используя (4) и (1), запишем внутреннюю энергию  $U$  любого идеального газа в общем виде

$$U = c_V^M \nu T = \nu c_V^M T. \quad (5)$$

1.2 Согласно первому началу термодинамики при произвольном процессе количество теплоты  $\Delta Q$ , сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии  $\Delta U$  и совершение газом работы  $\Delta A = p \Delta V$

$$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V. \quad (6)$$

Рассмотрим два близких состояния системы  $(p, V)$  и  $(p + \Delta p, V + \Delta V)$ . Из уравнения состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для этих изобарных состояний можем записать

$$\begin{aligned} pV &= \nu R \Delta T \\ p(V + \Delta V) &= \nu R(T + \Delta T). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения, из (7) найдем

$$p \Delta V = \nu R \Delta T. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), с учетом (3) получим для изобарного процесса

$$\Delta Q = c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T. \quad (9)$$

Теперь, по определению, легко находим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении

$$c_p^M = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T}{\nu \Delta T}. \quad (10)$$

После сокращения на  $\nu \Delta T$ , окончательно получаем, что для произвольного идеального газа справедливо равенство

$$c_p^M = c_V^M + R. \quad (11)$$

Уравнение (11) было получено в 1842 г. немецким естествоиспытателем и очень внимательным медиком (!) Р. Майером, который первым заметил различия в цвете крови (!!) на экваторе и в средних широтах. Где кровь, а где термодинамика ...? ☺

Таким образом, согласно уравнению Майера, молярная газовая постоянная  $R$  (см. размерность) даёт разность между молярными теплоемкостями идеального газа при различных процессах: при изобарном и при изохорном.

**1.3** По определению адиабатный процесс осуществляется в теплоизолированной термодинамической системе, т.е. без теплообмена ( $Q = 0$ ) с окружающей средой, следовательно, первое начало термодинамики для него примет вид

$$Q = 0 = \Delta U + A. \quad (12)$$

Из (12) следует, что малая работа  $\Delta A$  идеального газа при малом объемном расширении на  $\Delta V$  совершается только за счет убыли его внутренней энергии (притока теплоты нет)

$$\Delta A = p\Delta V = -\Delta U. \quad (13)$$

С учетом (5) перепишем (13) в виде

$$p\Delta V = -\Delta U = -\nu c_V^M \Delta T. \quad (14)$$

Выразим давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\frac{\nu RT}{V} \Delta V = -\nu c_V^M \Delta T \Rightarrow -\frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (16)$$

Перепишем (16) в «удобном» виде, чтобы воспользоваться математической подсказкой из условия задачи

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0. \quad (17)$$

Теперь, с учетом математической подсказки из условия задачи, можем заключить, что справедливо равенство

$$TV^{\frac{R}{c_V^M}} = TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (18)$$

Поскольку  $\frac{R}{c_V^M} = \gamma - 1$ , то окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

где  $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V^M} = \frac{c_V^M + R}{c_V^M} = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$  – показатель адиабаты Пуассона.

Несмотря на то, что уравнение адиабатного процесса в виде (18) легче выводится, чаще (с подачи самого Пуассона) оно используется в выражении через переменные  $(p, V)$ .

**1.4** Перепишем уравнение адиабаты для идеального газа в наиболее распространенном, «классическом» виде, которое использовал Пуассон, т.е. в переменных  $(p, V)$ .

Для замены переменных из (15) выразим температуру  $T$  и подставим в (18)

$$pV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R} \Rightarrow \frac{pV}{\nu R} V^{\gamma-1} = \text{const} \Rightarrow pV^\gamma = \text{const}^*. \quad (19)$$

Следовательно, уравнение адиабатного процесса (Пуассона) для произвольного идеального газа в параметрах  $(p; V)$  можно записать в виде

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (20)$$

где показатель адиабаты  $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} > 1$ .

**1.5** Выразим зависимость давления от объема  $p(V)$  идеального газа при изотермическом процессе

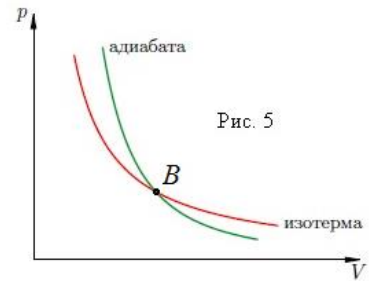
$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\text{const}_1}{V}, \quad (21)$$

и при адиабатном процессе

$$p = \frac{\text{const}_2}{V^\gamma}. \quad (22)$$

Поскольку  $\gamma > 1$ , то из (21) и (22) следует, что с ростом объема  $V$  идеального газа на  $(p, V)$  – диаграмме адиабата убывает «быстрее», чем изотерма. Можно сказать и по другому: на  $(p, V)$  – диаграмме адиабата идет «круче», чем изотерма, поэтому у них обязательно будет точка пересечения  $B$  (Рис. 5).

Соответственно, после точки пересечения графиков (см. Рис. 5), при  $V \rightarrow \infty$  адиабата всегда прижимается «ближе» к оси абсцисс (объемов), т.е. как бы «ныряет» под изотерму.



## Часть 2. Цикл с адиабатой

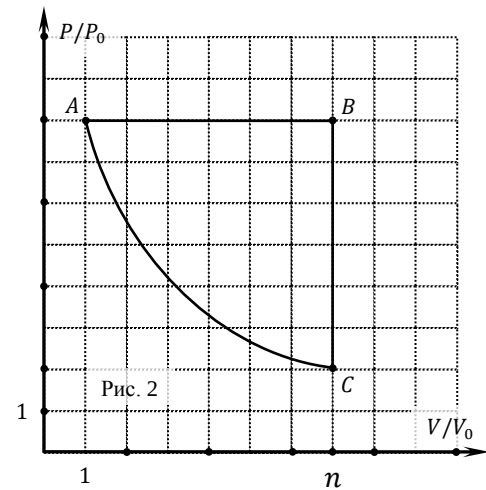
**2.1** Пусть в состоянии  $A$  идеальный газ имеет давление  $p_A$  и объем  $V_A$ , а в течение в течение цикла его объем увеличивается в  $n$  раз (Рис. 2).

Участок  $AB$  цикла соответствует изобарному нагреванию идеального газа, поэтому здесь газ (рабочее тело) получает теплоту от внешнего источника (работает нагреватель).

Участок  $BC$  цикла соответствует изохорному охлаждению газа, поэтому здесь рабочее тело отдает теплоту внешнему источнику (работает холодильник).

Участок  $CA$  цикла соответствует адиабатному сжатию газа, поэтому здесь газ не получает и не отдает теплоту внешнему источнику, поскольку отсутствует теплообмен (не работают ни холодильник, ни нагреватель).

Таким образом, газ получает теплоту от нагревателя только на участке  $AB$  цикла.



Запишем первое начало термодинамики для участка  $AB$  цикла

$$Q_1 = Q_{AB} = \Delta U_{AB} + A_{AB} = \{(11)\} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p_A V_A (n - 1). \quad (23)$$

Таким образом, согласно (23) количество теплоты  $Q_1$ , полученное рабочим телом от нагревателя, определяется начальными параметрами системы (давлением  $p_A$  и объемом  $V_A$ ) и степенью расширения  $n$  одноатомного газа.

**2.2** Поскольку процесс  $CA$  является адиабатическим, то можно воспользоваться уравнением Пуассона (20), согласно которому

$$p_A V_A^\gamma = p_C V_C^\gamma = p_C (n V_A)^\gamma, \quad (24)$$

где показатель адиабаты  $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} = \frac{5}{3}$  (одноатомный газ).

Тогда

$$p_C = \frac{p_A}{n^\gamma}. \quad (25)$$

Как следует из (25) для одноатомного газа ( $\gamma = 5/3$ ) данное значение будет равно

$$p_C = \frac{p_A}{n^{5/3}}. \quad (26)$$

**2.3** Из анализа пункта 2.1 следует, что холодильник работал только на участке  $BC$  цикла. Согласно первому началу термодинамики

$$Q_2 = Q_{BC} = \Delta U_{BC} + A_{BC} = \Delta U_{BC} = \{(3)\} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (p_A - p_C) n V_A. \quad (27)$$

Используя (26), перепишем (27) в виде

$$Q_2 = \frac{3}{2} p_A \left(1 - \frac{1}{n^{5/3}}\right) n V_A = \frac{3}{2} p_A V_A \left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right). \quad (28)$$

**2.4** С учетом (23) и (28) для термодинамического КПД  $\eta$  данного цикла получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}. \quad (29)$$

Как следует из (29) КПД данного теплового двигателя не зависит от начальных параметров  $p_A$  и  $V_A$  идеального газа, а зависит только от того, во сколько раз  $n$  увеличивается объем газа в течение цикла.

Это связано с тем, что в данном цикле и количество теплоты  $Q_1$ , полученное от нагревателя, и количество теплоты  $Q_2$ , отданное холодильнику, оказались пропорциональны одной и той же величине  $p_A V_A$ , которая, по итогу, сокращается.

**2.5** Для нахождения максимального КПД цикла  $\eta_{max}$  нужно исследовать (29) как функцию от  $n$  (например, через производную). Но можно использовать и олимпиадный метод «хитрого глаза», т.е. внимательно, «по-рентгеновски» посмотреть на (29), учитывая свойства дробей.

Это приведет нас к системе неравенств

$$1 < \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1} < \frac{n}{n-1}. \quad (30)$$

Кроме того, при  $n \rightarrow \infty$  выражение  $\frac{n}{n-1}$  стремится к единице. Следовательно, величина  $\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}$  стремится к единице сверху.

Соответственно, КПД цикла будет максимальным при  $n \rightarrow \infty$  и это предельное значение равно

$$\eta_{max} = \eta(n \rightarrow \infty) = 1 - \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} = 0,40 = 40\%. \quad (31)$$

Полученное значение КПД  $\eta_{max}$  конечно же не превышает предельное значение идеального цикла Карно, которое устанавливает теоретический предел возможного термодинамического КПД тепловой машины при данной разности температур.

**2.6** Для цикла, изображенного на Рис. 4, объем газа по отношению к начальному значению увеличивается в  $n = 7$  раз. Следовательно, согласно (29) КПД такого цикла

$$\eta = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(7 - \frac{1}{7^{2/3}}\right)}{7-1} = \{0,3273275883\} = 0,33 = 33\%. \quad (32)$$



# Республиканская физическая олимпиада 2024 год (III этап)

## Теоретический тур

### *Решения задач 11 класс (для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

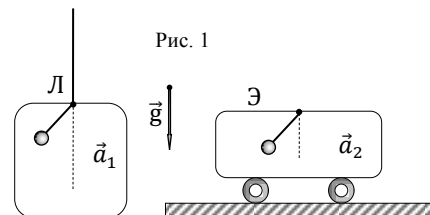


***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших  
талантливых школьников!***

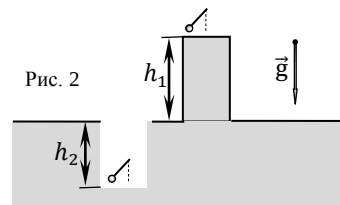
### Задание 10-1. Гармоническая разминка

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $\pi = 3,14$ , при малых  $x$  ( $x \rightarrow 0$ ) справедливы приближенные формулы:  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ ,  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ .

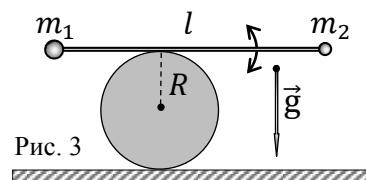
**1.1 «Разгон маятника»** Известно, что период колебаний математического маятника, подвешенного в лифте Л (Рис. 1), движущемся с ускорением  $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$ , и в электричке Э, движущейся с некоторым ускорением  $a_2$ , один и тот же. Куда едет лифт? Чему равно ускорение  $a_2$  электрички?



**1.2 «Маятник в шахте»** Известно, что на горе высотой  $h_1 = 1,0 \text{ км}$  маятниковые часы (Рис. 2) начинают отставать на промежуток времени  $\tau = 14 \text{ с}$  в сутки. На какую глубину  $h_2$  необходимо опустить эти часы в шахту (см. Рис. 2), чтобы они шли также, как и на горе?



**1.3 «Непостоянная планка»** Небольшие шарики массами  $m_1$  и  $m_2$  закреплены на концах лёгкой жесткой тонкой планки длиной  $l$ . Планка с шариками покоится на поверхности неподвижного шероховатого горизонтального цилиндра радиусом  $R$  (Рис. 3). В положении равновесия планка горизонтальна и перпендикулярна оси цилиндра (на Рис. 3 показан вид со стороны торца цилиндра). Планку, приподнимая один из шариков, поворачивают на малый угол, так, что она движется по цилиндру без проскальзывания, и отпускают. После этого в системе начинаются колебания, в процессе которых планка движется в плоскости рисунка по поверхности цилиндра также без проскальзывания. Найдите период  $T$  малых колебаний планки с шариками.



Решение:

### Задание 1. Гармоническая разминка

**1.1 «Разгон маятника»** При равномерном движении лифта или электрички в любом направлении (вверх – вниз или вправо – влево) период колебаний математического маятника, подвешенного к потолку, не изменится, поскольку все инерциальные системы отсчета (ИСО) эквивалентны (принцип относительности Галилея). Период колебаний такого маятника будет равен периоду колебаний «неподвижного» маятника длиной  $l$ , вычисленному по формуле Гюйгенса

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

При ускоренном движении лифта или электрички период колебаний  $T$  маятника можно найти по «модернизированной» формуле Гюйгенса через т.н. «эффективное ускорение»  $g^*$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^*}}. \quad (2)$$

В случае электрички (её ускорение  $a_2$  горизонтально, не важно, в какую сторону) эффективное ускорение находится по теореме Пифагора

$$g^* = \sqrt{a_2^2 + g^2} = \sqrt{a_2^2 + g^2} > g. \quad (3)$$

Как следует из (2) и (3), в ускоренно движущейся электричке (не важно, разгон или торможение) период колебаний математического маятника всегда меньше, чем покоящегося.

При ускорении лифта вверх эффективное ускорение

$$g^* = g + a_1 > g, \quad (4)$$

а при ускорении вниз

$$g^* = g - a_1 < g. \quad (5)$$

Из сравнения (3), (4) и (5) получаем, что равенство периодов колебаний математического маятника в электричке и лифте может наблюдаться только при ускорении лифта вверх, когда

$$\sqrt{a_2^2 + g^2} = g + a_1. \quad (6)$$

Из (6) находим

$$a_2 = \sqrt{a_1(a_1 + 2g)} = 5,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по две значащие цифры, поскольку «худшее» из данных условия задачи содержит две значащие цифры (не путать с цифрами после запятой!).

Подчеркнем, что (4) задает направление ускорения лифта (вверх), а в задаче спрашивается: куда он едет? Но за направление движения «отвечает» скорость лифта, а не его ускорение. Следовательно, ехать лифт при этом может «куда угодно»: как вверх (ускоряется), так и вниз (тормозится) – в обоих случаях ускорение будет направлено вверх. Таким образом, распространенный ответ «лифт едет вверх» является неполным, а строго говоря – неверным.

**1.2 «Маятник в шахте»** При подъёме в гору на малую высоту  $h$  (по сравнению с радиусом Земли) несколько уменьшается ускорение свободного падения  $g$ .

Действительно, из закона всемирного тяготения следует, что на поверхности Земли

$$g = G \frac{M}{R^2}, \quad (8)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  – гравитационная постоянная,  $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$  и  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$  – соответственно, масса и радиус Земли.

Соответственно, период колебаний маятника часов по формуле Гюйгенса будет равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} = 2\pi R \sqrt{\frac{l}{GM}}. \quad (9)$$

При подъёме на высоту  $h$  расстояние до центра Земли увеличивается, следовательно

$$g(h) = G \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} g = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} g. \quad (10)$$

Как следует из (10), только при  $h = (\sqrt{2} - 1)R = 0,41R$ , т.е. на высоте  $h = 2639 \text{ км}$  над поверхностью Земли (глубокий космос!) ускорение свободного падения уменьшается в 2 раза (на 50%).

Таким образом, высоту  $h_1 = 1,0 \text{ км}$  уверенно и с большой точностью можно считать малой, т.е. гораздо меньше радиуса Земли. В задаче не требуется, но преобразуем (10) для малых высот  $h$  ( $h \ll R$ ) с учетом математической подсказки из условия задачи

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 + (-2) \left(\frac{h}{R}\right) = 1 - \frac{2h}{R}, \quad (11)$$

тогда

$$g(h) \approx \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} g = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g. \quad (12)$$

С учетом (9) и (10), на высоте  $h$  над поверхностью земли период колебаний  $T_1(h)$  математического маятника составит

$$T_1(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = 2\pi \sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} \times \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}} = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right). \quad (13)$$

Поскольку у правильно идущих часов  $T_0 = 1,00 \text{ с}$ , то для случая часов на горе получим

$$T_1(h) = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right) = 1,000157 \text{ с}, \quad (14)$$

тогда за сутки ( $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ ) они сделают  $N_1$  качаний (меньше, чем на поверхности)

$$N_1 = \frac{24 \times 60 \times 60}{1,000157} = 86\,386. \quad (15)$$

Это и соответствует суточному отставанию на  $\tau = 14 \text{ с}$ , приведенному в условии.

При опускании в шахту на глубину  $h$  ускорение свободного падения также уменьшается, но по линейному закону

$$g(h) = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g. \quad (16)$$

Этот эффект связан с тем, что внешние (по отношению к текущему положению тела) слои Земли «перестают» притягивать тела, уменьшая тем самым «эффективную», т.е. гравитирующую массу Земли. Учет притяжения внутренних слоёв Земли и приводит к зависимости (16).

Соответственно, период колебаний  $T_2(h)$  маятника в шахте на глубине  $h$  будет равен

$$T_2(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{h}{R}\right)}} = T_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{h}{R}\right)\right) = T_0 \left(1 + \frac{h}{2R}\right). \quad (17)$$

Сравнивая (13) и (17), находим, что для одинакового замедления хода маятниковых часов на горе и в шахте необходимо выполнение условия равенства их периодов колебаний (время суточного отставания  $\tau = 14$  с дано для справки, и для решения не потребовалось)

$$T_0 \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) = T_0 \left(1 + \frac{h_2}{2R}\right) \Rightarrow h_2 = 2h_1. \quad (18)$$

Расчет даёт

$$h_2 = 2h_1 = 2,0 \text{ км}. \quad (19)$$

Как видим из (19), для «одинакового отставания» маятниковые часы необходимо опускать в шахту на бóльшую глубину (в два раза!), чем поднимать в гору. Оно и понятно, поскольку в шахте ускорение свободного падения (16) убывает с глубиной в два раза медленнее, чем на горе (12).

Можно сказать и иначе: при одинаковых  $h$  маятниковые часы в шахте отстают в два раза меньше, чем на горе, т.е. идут точнее. В этом смысле лучше «зрываться», чем «подниматься»! ☺

**1.3 «Непостоянная планка»** В положении равновесия системы моменты сил тяжести шариков (массой планки пренебрегаем, поскольку она лёгкая) относительно точки касания  $O$  планки и цилиндра должны быть равны (Рис. 01)

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2, \quad (20)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – плечи соответствующих сил тяжести. Можно сказать и иначе – центр масс системы при равновесии должен быть в точке  $O$ .

Кроме того, выполняется очевидное условие

$$l_1 + l_2 = l. \quad (21)$$

Из системы уравнений (20) и (21) находим

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим механическую систему в момент, когда планка с шариками отклонена от положения равновесия на малый угол  $\alpha$  и касается цилиндра новой точкой  $A$  (Рис. 02).

Поскольку планка двигалась по цилиндру без проскальзывания, то длина отрезка  $AO$  ( $O$  – прежняя точка касания) равна длине дуги  $AB$  ( $B$  – верхняя точка цилиндра)

$$AO = \overset{\frown}{AB} = \alpha R. \quad (23)$$

Подчеркнем, что точки  $O$  и  $B$  не лежат на одной вертикали, хотя для решения это не важно.

При отклонении планки от положения равновесия точка  $A$  опустилась (Рис. 03) на некоторую высоту  $h_1$  относительно верхней точки цилиндра.

Из Рис. 3 с учетом малости угла  $\alpha$  и подсказки из условия находим

$$h_1 = BC = R(1 - \cos \alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (24)$$

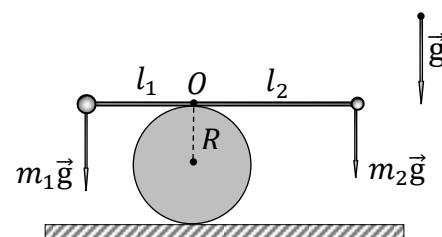


Рис. 01

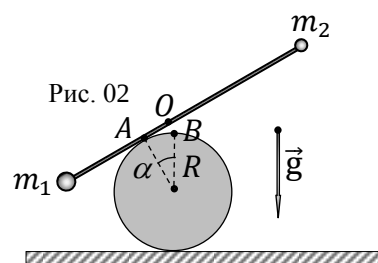


Рис. 02

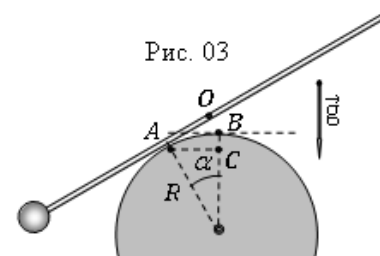


Рис. 03

Соответственно, при отклонении планки центр масс  $O$  системы поднялся относительно начального уровня (с учетом малости угла  $\alpha$  и подсказки из условия) на высоту  $h_2$

$$h_2 = AO \sin \alpha - h_1 = \{AO \sin \alpha \approx \alpha R \cdot \alpha\} = \alpha R^2 - \frac{\alpha^2}{2} R = \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (25)$$

Следовательно, потенциальная энергия  $E^п$  системы при отклонении планки с шариками на малый угол  $\alpha$  увеличилась на величину

$$E^п = (m_1 + m_2)g \cdot h_2 = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2}. \quad (26)$$

Заметим, что (26) можно получить и другим способом: рассматривая смещение по вертикали каждого шарика. Придётся немного больше «попотеть» с преобразованиями, но результат, конечно же, получится таким же.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент складывается из кинетических энергий шариков (планка легкая)

$$E^к = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (27)$$

Однако, из-за смещения точки касания цилиндра планкой (из  $(\cdot) O$  в  $(\cdot) A$ ) изменятся расстояния до мгновенной оси вращения, следовательно, линейные скорости мгновенного вращения шариков станут равными

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(l_1 - \alpha R) \\ v_2 &= \omega(l_2 + \alpha R) \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\omega$  – мгновенная угловая скорость вращения планки.

Подставляя (28) в (27), с учетом (20), получим

$$E^к = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2\alpha R(m_2 l_2 - m_1 l_1) + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2) = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2). \quad (29)$$

При малых  $\alpha$  вторым слагаемым в (29) можно пренебречь (оно второго порядка малости, поскольку  $\alpha$  в квадрате!), тогда кинетическая энергия системы принимает «красивый» вид

$$E^к = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2). \quad (30)$$

Запишем закон сохранения энергии для данной колебательной системы

$$E^п + E^к = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2} + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \cdot \frac{\omega^2}{2} = \text{const}. \quad (31)$$

Далее для получения классического уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \cdot \alpha(t) = 0 \quad (32)$$

можно найти производную от (31) по времени и традиционным способом найти период колебаний системы.

Однако проще и короче провести энергетическую аналогию с пружинным маятником, для которого

$$E^п + E^к = k \cdot \frac{x^2}{2} + m \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (33)$$

и период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (34)$$

Сравнивая (31) и (33), находим, что для планки с грузами роль массы  $m$  играет величина  $m \rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$ , называемая *моментом инерции* системы. Роль коэффициента упругости  $k$  пружины играет величина  $k \rightarrow ((m_1 + m_2)gR)$ .

Таким образом, искомый период  $T$  малых колебаний «непостоянной планки» равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 + m_2)gR}} = 2\pi \frac{l}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}. \quad (35)$$

### Задание 11-2. Миг невесомости

Рассмотрим механическую систему, образованную из тонкого гладкого проволочного кольца массой  $M$ , стоящего на горизонтальной плоскости (Рис. 1), и двух небольших одинаковых бусинок массой  $m$  каждая, насаженных на него. Бусинки могут скользить по кольцу без трения.

В начальный момент времени бусинки находятся вблизи верхней точки кольца (см. Рис. 1), а затем их одновременно отпускают без начальной скорости. Далее бусинки симметрично скользят по кольцу без трения, не опрокидывая его, разъезжаются, удаляясь друг от друга, и одновременно съезжаются в нижней точке кольца.

Будем характеризовать положение каждой бусинки на кольце углом  $\alpha$ , образуемым текущим радиусом кольца с вертикалью (Рис. 2). Угол  $\alpha$  измеряется в радианах (рад) и при скольжении каждой бусинки изменяется в пределах  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Динамометр  $G$ , вмонтированный в горизонтальную плоскость под кольцом (см. Рис. 2), измеряет зависимость веса  $P(\alpha)$  всей механической системы от угла  $\alpha$  при скольжении бусинок по кольцу.

Сопротивлением воздуха при движении бусинок пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

#### Часть 1. Общая теория

В первой части задачи Вам необходимо вывести формулы для расчёта различных физических параметров системы (силы реакции  $\vec{N}$  кольца (Рис. 3), её вертикальной проекции  $N_y$ , и т.д.) от угла  $\alpha$ .

**1.1** Получите зависимость модуля силы реакции кольца  $N(\alpha) = |\vec{N}(\alpha)|$ , действующей на бусинку, от угла  $\alpha$ .

**1.2** Найдите угол  $\alpha_1$  при котором сила реакции кольца  $N(\alpha)$ , становится равной нулю, т.е. бусинка не давит на кольцо.

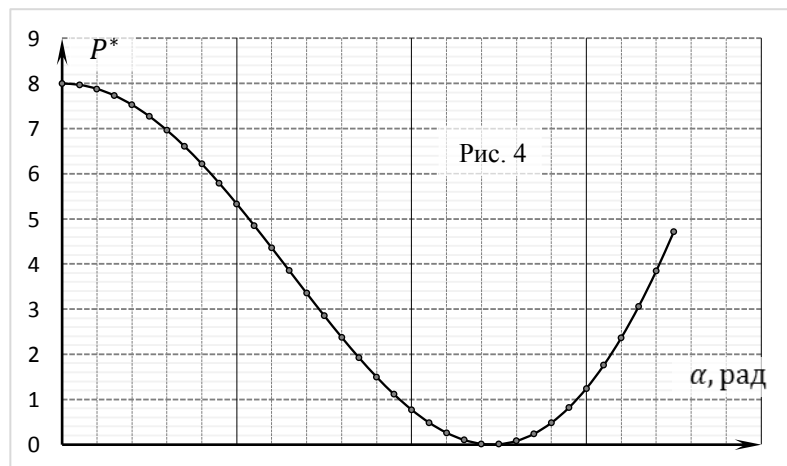
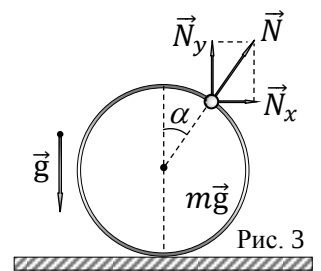
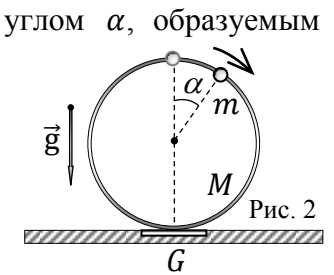
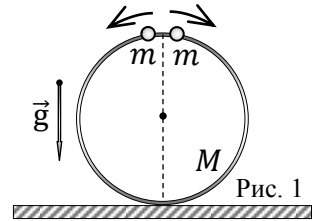
**1.3** Разложите силу реакции  $\vec{N}$  кольца на вертикальный и горизонтальный компоненты вдоль стандартных (декартовых осей)  $\vec{N} = \vec{N}_y + \vec{N}_x$ . Найдите зависимость вертикальной проекции  $N_y(\alpha)$  силы реакции кольца от угла  $\alpha$ .

**1.4** Введём понятие приведенной вертикальной проекции  $N_y^*$  силы реакции кольца, как функции  $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$ . На выданном бланке постройте график зависимости  $N_y^*(\alpha)$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi$  с шагом по углу  $h = 0,05 \text{ рад}$ .

**1.5** Выделите характерные этапы и точки построенного графика  $N_y^*(\alpha)$  и кратко их прокомментируйте с физической точки зрения.

#### Часть 2. Работа с графиком

Во второй части задачи Вам предстоит самое сложное – применить формулы, выведенные в первой части



задачи, для «расшифровки» графика, полученного с использованием встроенного динамометра  $G$  (см. Рис. 2) при движении бусинок.

На графике (Рис. 4) представлена зависимость приведенного веса  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  всей механической системы от угла  $\alpha$  в некотором диапазоне, где постоянная  $m_0 = 10$  г. При этом шкала делений по оси абсцисс отсутствует.

**2.1** Используя данные графика (см. Рис. 4), найдите массы бусинки  $m$  и кольца  $M$ .

**2.2** Вычислите максимальный вес  $P_{max}$  системы в процессе движения бусинок. При каком значении угла  $\alpha_2$  он достигается?

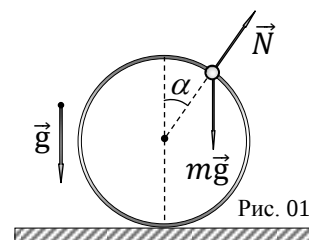
**2.3** Восстановите численные значения по оси абсцисс.

Решение:

## Часть 1. Общая теория

**1.1** Рассмотрим движение одной из бусинок (например, правой), поскольку движение второй бусинки будет происходить совершенно симметрично. Понятно, что в силу симметрии, центр кольца при этом будет оставаться неподвижным, поскольку горизонтальные силы в любой момент времени будут скомпенсированы.

Пусть бусинка  $B$  оказалась в положении (Рис. 01), когда радиус  $R$  кольца составляет угол  $\alpha$  с вертикалью.



Поскольку на бусинку  $B$  действуют две силы (тяжести и реакции кольца), то уравнение второго закона Ньютона примет вид (см. Рис. 13)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

Соответственно, в проекции на направление к центру окружности выражение (1) принимает вид

$$ma_{\text{цс}} = m \frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N, \quad (2)$$

где  $a_{\text{цс}}$  – центростремительное ускорение бусинки, которое иногда называют также нормальным ускорением  $a_n$ .

Из закона сохранения энергии следует, что в этот момент времени кинетическая энергия бусинки равна

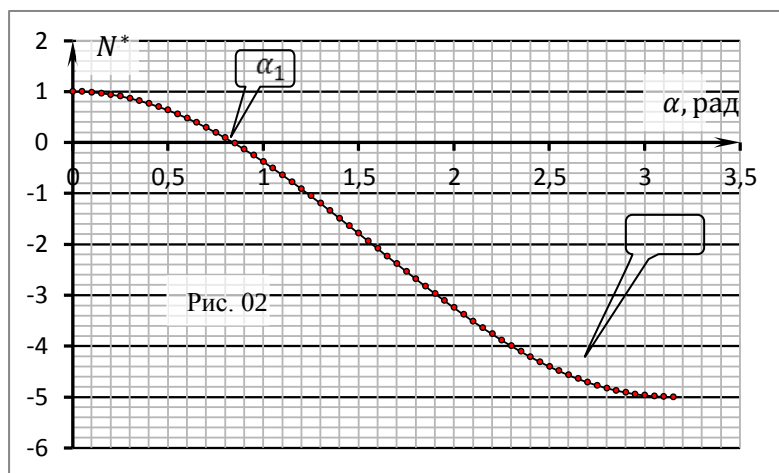
$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \frac{v^2}{R} = 2g(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Выражая из (2) силу реакции опоры, с учетом (3) получаем

$$N(\alpha) = mg \cos \alpha - m \frac{v^2}{R} = mg(3 \cos \alpha - 2). \quad (4)$$

Строить график зависимости (4) от школьников не требуется, но мы не откажем себе в этом удовольствии. В приведенных (безразмерных) координатах для силы  $N^* = (N(\alpha)/mg)$ , он представлен на Рис. 02.

Из графика следует, что при скольжении бусинки по кольцу сила реакции  $N(\alpha)$  монотонно убывает от начального значения  $mg$ , проходит через нуль (по углу (см. Рис. 02) где-то в районе  $\alpha_1 \approx 0,83$  рад) и далее становится отрицательной, достигая минимального значения  $(-5mg)$ .



Знак минус в данном случае «кричит» о том, что тело уже не давит на поверхность, а пытается её приподнять! Если бы таким образом скользила шайба по сфере, а не бусинка по кольцу, то в точке  $\alpha_1$  шайба оторвалась бы от сферической поверхности и далее полетела бы по параболе.

**1.2** Итак, согласно (4) модуль силы реакции опоры  $N(\alpha)$  уменьшается по мере скольжения бусинки по кольцу, и становится равен нулю при угле  $\alpha_1$

$$\cos \alpha_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839 \text{ рад} . \quad (5)$$

Как следует из (5), мы достаточно точно оценили угол  $\alpha_1$  графически в предыдущем пункте задачи (погрешность порядка  $\sim 1\%$ ) «на глаз»! Это значит, что глаз – отличный оптический смарт-прибор, которым можно и нужно пользоваться при первой возможности! ☺

Как мы отметили ранее, при дальнейшем движении бусинки ( $\alpha > \alpha_1$ ), сила реакции меняет знак (становится отрицательной!), а это означает, что далее она будет направлена к центру (!) окружности, а не от центра, как это было до сих пор.

С «точки зрения» третьего закона Ньютона, это означает следующее: если ранее бусинка прижимала кольцо к опоре, то теперь начнёт его приподнимать, пытаясь «оторвать» систему от горизонтальной плоскости опоры.

Иными словами, при скольжении бусинки на участке ( $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$ ), будет возникать подъёмная сила, действующая на кольцо.

**1.3** Разложим силу реакции  $\vec{N}$  кольца на компоненты по стандартным (декартовым) осям координат (см. Рис. 01)

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_y + \vec{N}_x \\ N_y(\alpha) &= N(\alpha) \cos \alpha . \\ N_x(\alpha) &= N(\alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно, вертикальная проекция силы реакции со стороны обруча на бусинку будет равна

$$N_y(\alpha) = N(\alpha) \cos \alpha = mg(3\cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha . \quad (7)$$

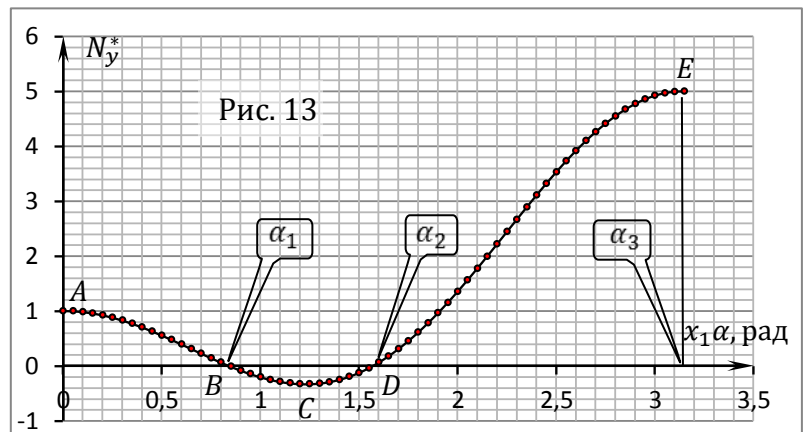
**1.4** Для приведенной вертикальной проекции  $N_y^*(\alpha) = N_y(\alpha)/mg$  получаем выражение

$$N_y^*(\alpha) = \frac{N_y(\alpha)}{mg} = (3\cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha . \quad (8)$$

Построим график полученной зависимости  $N_y^*(\alpha)$  на интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi$  с шагом по углу  $h = 0,05$  рад.

Для этого потребуются более 60 вычислений (о, ужас!!!) на инженерном калькуляторе, которым, заметим, официально разрешено пользоваться! Ведь настоящие «олимпиадные волки» не боятся трудностей...

По итогу, заполнив соответствующую таблицу вычислений (без таблицы график не засчитывается!), по точкам на выданном бланке построим достаточно «красивую» кривую, приведенную на Рис. 13.



**1.5** Характерные этапы и точки построенного графика включают в себя участки положительных и отрицательных значений функции, промежутки её возрастания и убывания,

точки пересечения с осями абсцисс и ординат, точки экстремумов (минимумов и максимумов) функции, точки перегиба и т.д.

В данном пункте задачи достаточно заметить, что на участке  $AB$  (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  убывает до нуля в точке  $\alpha_1 = 48,1^\circ = 0,839$  рад, что, согласно (4), соответствует точке «зануления» силы реакции опоры.

На участке  $BD$  (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  становится отрицательной, т.е. именно здесь возникает «подъёмная сила» со стороны движущихся бусинок.

В некоторой точке  $C$  имеется минимум (максимальная подъёмная сила!), далее в точке  $\alpha_2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1,57$  рад (см. Рис. 13) функция  $N_y^*(\alpha)$  вновь «зануляется» (сила реакции  $\vec{N}$  в этот момент горизонтальна!).

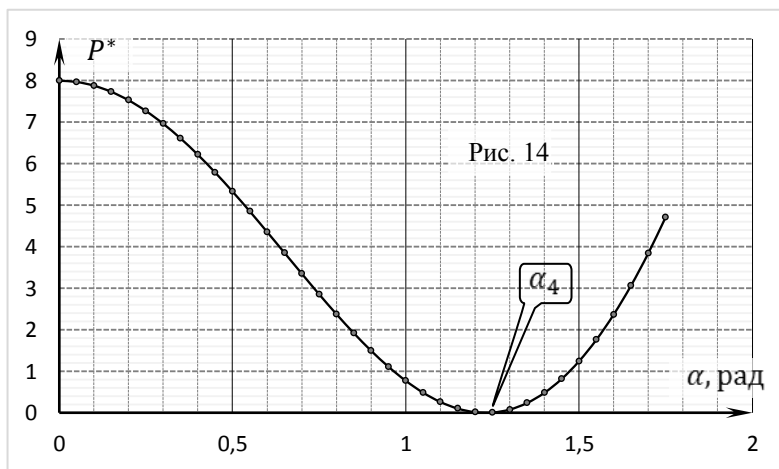
После этого функция  $N_y^*(\alpha)$  возрастает от нуля до максимального значения (+5) в точке  $\alpha_3 = 180^\circ = \pi = 3,14$  рад (см. Рис. 13), что соответствует сближению бусинок в нижней точке кольца.

## Часть 2. Работа с графиком

**2.1** Как следует из графика, представленного в условии задачи, в точке минимума  $A$  функция приведенного веса системы  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  (Рис. 14) касается оси абсцисс. Отсюда делаем вывод, что при данных значениях масс бусинки  $m$  и кольца  $M$  вес всей механической системы в этой точке графика также равен нулю

$$P(\alpha) = 0. \quad (9)$$

Иными словами, наблюдается «кратковременная невесомость», т.е. в этой точке графика «исчезает» сила давления системы на плоскость.



Как следует из решения пункта 1.5, это возможно, если сила тяжести кольца будет уравновешена двумя подъёмными силами бусинок, скользящих на участке  $BD$  (см. Рис. 13) графика.

Запишем выражение для веса механической системы с учётом (4) и (7) для двух бусинок и кольца

$$P(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha) = g(M + 2m(3 \cos \alpha - 2) \cdot \cos \alpha). \quad (10)$$

Минимум функции (10) определяется минимумом функции (8), поскольку остальные величины в (10) есть константы.

Поскольку функция (10) относительно  $\cos \alpha$  есть парабола, ветви которой направлены вверх, а её корни 0 и  $2/3$ , то минимум данной функции достигается в точке

$$\cos \alpha_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_4 = 70,5^\circ = 1,23 \text{ рад}, \quad (11)$$

и равен

$$(3 \cos \alpha_4 - 2) \cdot \cos \alpha_4 = -\frac{1}{3}. \quad (12)$$

Соответственно, для минимального веса всей механической системы имеем

$$P_{\min}(\alpha) = Mg + 2N_y(\alpha_3) = g \left( M + 2m \left( 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \right) \cdot \frac{1}{3} \right) = g \left( M - m \frac{2}{3} \right). \quad (13)$$

Следовательно, для возникновения «точки невесомости» на графике  $P^*(\alpha)$  необходимо выполнение следующего соотношения между массами одной бусинки  $m$  и кольца  $M$

$$m = \frac{3}{2}M. \quad (14)$$

Используя график из условия находим, что в начальный момент времени вес системы равен  $8m_0g$ , следовательно

$$8m_0g = (M + 2m)g \Rightarrow M + 2m = 8m_0. \quad (15)$$

Решая систему (14) – (15), получим

$$\begin{aligned} m &= 3m_0 = 30 \text{ г} \\ M &= 2m_0 = 20 \text{ г} \end{aligned} \quad (16)$$

Для любителей дифференцирования заметим, что минимум (11) для угла  $\alpha_4$  можно найти, взяв производную от (10) по углу – результат, конечно же, получается аналогичным ☺.

**2.2** Как следует из (10), максимальный вес системы достигается при  $\alpha = \alpha_5 = \pi = 3,14$ , в момент сближения бусинок в нижней части кольца. Следовательно, используя (9), находим

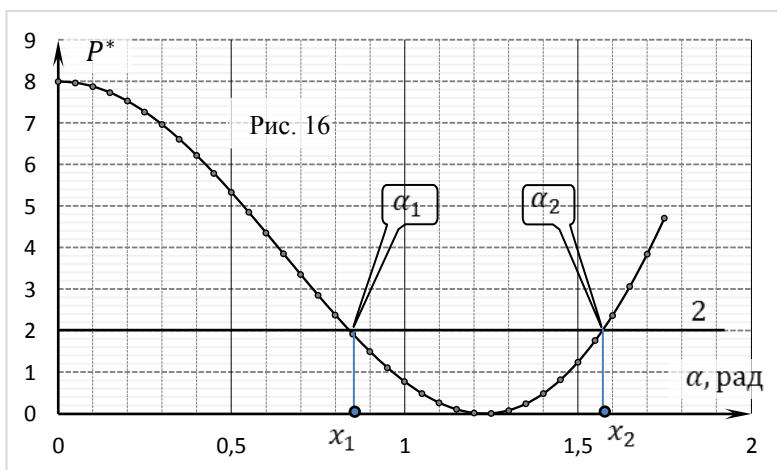
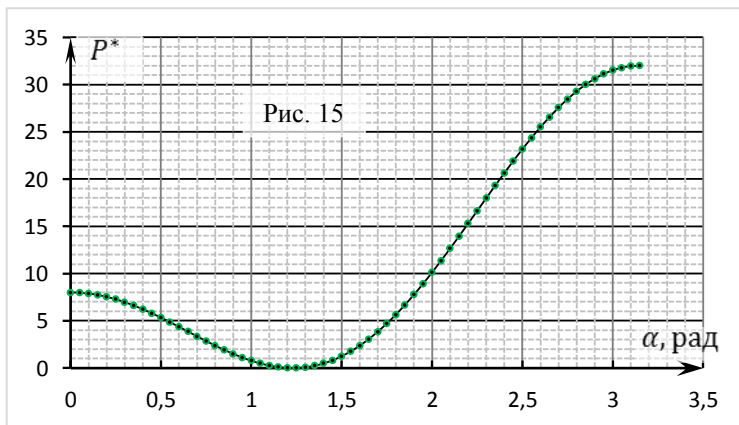
$$P_{\max} = P(\alpha = \pi) = g(M + 2m(3 \cdot (-1) - 2) \cdot (-1)) = 32m_0g. \quad (17)$$

График зависимости приведенного веса  $P^*(\alpha) = P(\alpha)/m_0g$  на всем промежутке изменения угла  $\alpha$  представлен на Рис. 15 (от школьников не требуется).

**2.3** Для восстановления оцифровки оси абсцисс (углов) достаточно задать её начало отсчета и масштабный (мерный) отрезок, определяющий «расстояние» (т.е. угол) между основными делениями сетки вдоль данной оси.

С началом отсчета все понятно, поскольку вес системы в начальный момент равен  $8m_0g$ . Следовательно, начало отсчета оси абсцисс и оси ординат совпадают – нуль по одной оси соответствует нулю по второй оси.

Для определения масштабного отрезка необходимо точно установить абсциссы ( $x_1; x_2$ ) двух любых точек на данной оси. Действительно, далее, используя, например, линейку и циркуль, можно проградировать все шкалу подобными отрезками (или их частями).



Для этой цели удобно выбрать точку  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ) нулевого веса бусинок (см. Рис. 13), поскольку в этот момент динамометр  $G$  зафиксирует вес системы, как вес кольца, т.е. равным  $Mg = 2m_0g$ . Заметим, что удобнее даже брать точку  $\alpha_2$ , т.к. при этом мы сразу находим «популярную» точку  $\frac{\pi}{2}$  на оси абсцисс (углов). В качестве второй «реперной» точки опять же можно всегда выбрать точку начала координат.

Проведем горизонтальную прямую  $Mg/m_0g = 2$  до пересечения с графиком (Рис. 15) и найдем соответствующие углы. Итак, у нас для восстановления шкалы выбраны точки

$$x_1 = \alpha_1 = 0,839 \text{ рад}; \quad x_2 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад}; \quad x_3 = \alpha_3 = 0,00 \text{ рад}. \quad (18)$$

Заметим, что в рамках выбранной модели оцифровки оси абсцисс, верной следует считать подобную процедуру с любой из двух характерных точек на Рис. 16. ☺

### Задание 11-3. Прогрессивная электростатика

В современной физике широко распространены различные векторные методы решения прикладных задач. Наглядность и простота векторной алгебры, векторных диаграмм позволяют эффективно и эффективно справляться с задачами различной степени сложности.

В качестве примера рассмотрим электростатическую систему из  $n$  одинаковых маленьких положительно заряженных шариков, расположенных в вакууме в вершинах правильного  $n$  – угольника (Рис. 1).

Расстояние от центра  $O$  правильного многоугольника до любой из его вершин равно  $R$ .

Угол  $\alpha$  между соседними радиусами, проведенными из точки  $O$  к любым соседним вершинам правильного  $n$  – угольника, обозначим через  $\alpha$  (см. Рис. 1).

Величины электрических зарядов ( $q_i$ ) шариков занумеруем по часовой стрелке в том же порядке, что и шарики ( $q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$ ) (см. Рис. 1).

Далее будем рассматривать различные варианты прогрессий, которые образуют электрические заряды ( $q_i$ ) шариков и напряженности  $\vec{E}_i$  электростатических полей, создаваемых ими в центре  $O$  правильного многоугольника.

*Справочные данные и параметры рассматриваемой системы:* электрическая постоянная  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $R = 1,52$  м,  $q_0 = 151$  нКл,  $\pi = 3,14$ .

#### Часть 1. Арифметическая электростатика

**1.1** Пусть в вершинах правильного  $n$  – угольника находятся одинаковые заряды  $q_0$ , т.е. все  $q_i = q_0$ . Методом «мысленного поворота» найдите напряженность  $\vec{E}_1$  электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре  $O$  правильного многоугольника.

**1.2** Пусть теперь электрические заряды шариков ( $q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$ ) образуют арифметическую прогрессию с первым членом  $a_1 = q_1 = q_0$  и разностью  $d = q_0$  (Рис. 2). Получите формулу для напряженности  $\vec{E}_2$  электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре  $O$  правильного многоугольника.

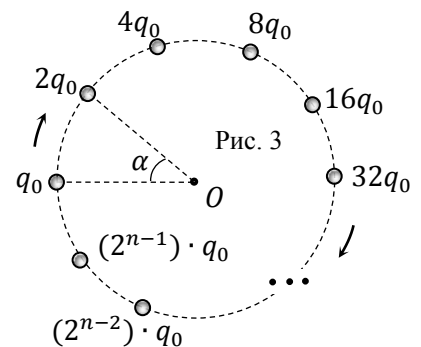
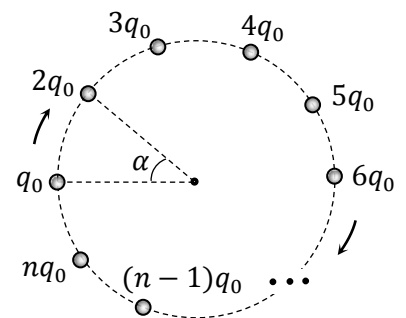
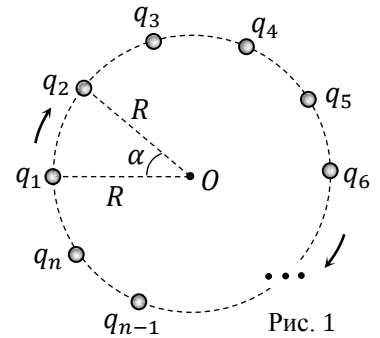
**1.3** Вычислите  $\vec{E}_2$  для правильного многоугольника, у которого вектор  $\vec{E}_2$  «нацелен» на третью вершину, в которой находится заряд  $3q_0$ .

#### Часть 2. Геометрическая электростатика

В этой части задачи величины электрических зарядов ( $q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$ ) шариков в вершинах правильного  $n$  – угольника образуют геометрическую прогрессию (Рис. 3) с первым членом  $b_1 = q_1 = q_0$  и знаменателем  $q = 2$ .

**2.4** Найдите напряженность  $\vec{E}_0$  электростатического поля, создаваемого первым (наименьшим) зарядом  $q_1 = q_0$  в центре  $O$  правильного многоугольника.

**2.5** Выведите формулу для напряженности  $\vec{E}_3$  электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре  $O$  правильного многоугольника.



2.6 Вычислите  $\vec{E}_3$  для правильного многоугольника, у которого вектор  $\vec{E}_3$  перпендикулярен вектору  $\vec{E}_0$ .

Возможное решение:

### Часть 1. Арифметическая электростатика

**1.1** Суть метода «мысленного поворота» фактически полностью «изложена» в его названии: рассмотрим поворот всей системы одинаковых зарядов «как целого» (Рис. 01) в любом направлении (например, по часовой стрелке) на угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  (или кратный ему).

Поскольку электростатическое поле является центральным, то вектор напряженности точечного заряда всегда направлен вдоль прямой, проходящей через данный заряд.

Это значит, что искомый вектор напряженности  $\vec{E}_1$  системы тоже «жёстко связан» с рассматриваемой системой зарядов. Следовательно, при повороте системы зарядов он также повернётся в плоскости рисунка на угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ .

Таким образом, при подобном «мысленном повороте» вектор напряженности поля поменяет свое направление, т.е. вектор  $\vec{E}_1$  изменится.

Но с другой стороны, в силу симметрии данной системы зарядов, при таком повороте каждый заряд «перейдет» в соседний, т.е. с точки зрения «стороннего наблюдателя» в системе ничего не изменится (!), поскольку все заряды одинаковые. Следовательно, вектор  $\vec{E}_1$  при таком повороте не изменится!

Мы пришли к логическому противоречию, следовательно, что-то предположили неверно. На самом деле данное противоречие возникло лишь потому, что обычно у вектора есть длина, и «по умолчанию» мы считали его ненулевым, т.е.

$$\vec{E}_1 \neq \vec{0}. \quad (1)$$

«Разрешить» полученное противоречие можно только предположив обратное, что

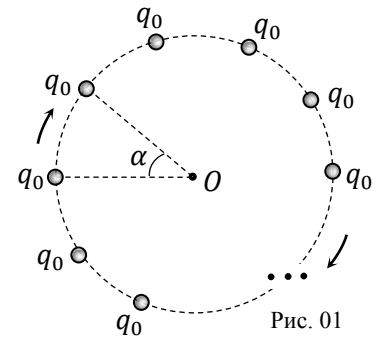
$$\vec{E}_1 = \vec{0}. \quad (2)$$

Иными словами, можно считать, что нулевой вектор направлен «куда угодно», поскольку его модуль равен нулю. Говоря более строго, с нулевым вектором не связывают никакого направления в пространстве, т.е. он сонаправлен (и перпендикулярен!) любому ненулевому вектору.

Таким образом, при одинаковых зарядах в вершинах произвольного правильного многоугольника напряженность  $\vec{E}_1$  электростатического поля в его центре  $O$  равна нулю.

Заметим, что и другие методы (например, суммирование векторов по правилу многоугольника) приводят к такому же результату (2), но именно метод «мысленного поворота» содержит *неявную подсказку* нашим юным олимпиадникам для выполнения следующего пункта задачи.

**1.2** Поскольку шарики маленькие, то будем считать заряды ( $q_i$ ) точечными. Как следует из закона Кулона, напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом  $q_i$  в точке пространства с радиус-вектором  $\vec{r}_i$



$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}. \quad (3)$$

Согласно (3), поле пропорционально заряду, т.е. больший заряд даёт больший вклад в результирующее (суммарное) поле. Это значит, что вклад последних (бóльших) зарядов арифметической прогрессии в общее поле будет наиболее значительным.

Для нахождения напряженности  $\vec{E}_2$  электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в центре многоугольника, по принципу суперпозиции полей необходимо просуммировать напряженности полей от каждого из зарядов системы

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n, \quad (4)$$

где индекс суммирования  $i$  меняется «по всем зарядам» арифметической прогрессии от единицы до  $n$ .

В отличие от предыдущего пункта задачи сумма (4) уже не будет равна нулю ( $\vec{E}_2 \neq \vec{0}$ ), поскольку теперь векторы  $\vec{E}_i$  будут иметь «различную длину» из-за возрастания зарядов в вершинах многоугольника.

Иными словами искомый вектор  $\vec{E}_2$  (Рис. 02) обязательно будет иметь и модуль  $E_2$ , и некоторое направление в плоскости рисунка, которое можно задать, например, углом  $\beta$ , образуемым данным вектором с «нижним» радиусом.

Как известно, при арифметической прогрессии каждый следующий член больше предыдущего на одну и ту же величину, соответственно, разность между ними остается постоянной. Это соображение и положим в основу модернизированного «метода поворота» для вычисления  $\vec{E}_2$ .

Вынесем вектор  $\vec{E}_2$  на отдельную векторную диаграмму (Рис. 03). Мысленно повернем систему зарядов на угол  $\alpha$  по часовой стрелке вокруг точки  $O$  – при этом вектор  $\vec{E}_2$  на диаграмме также повернется на угол  $\alpha$  в том же направлении и перейдет в положение  $\vec{E}_2^*$ , отмеченное пунктиром (см. Рис. 03).

Если же теперь поменять знаки всех зарядов (сделать их отрицательными), то вектор  $\vec{E}_2^*$ , согласно (3), также поменяет свое направление на противоположное (повернется на угол  $180^\circ$  и перейдет в положение  $\vec{E}_2^{**}$  на векторной диаграмме (см. Рис. 03)). Понятно, что при таких преобразованиях модули векторов  $\vec{E}_2^*$  и  $\vec{E}_2^{**}$  останутся равными модулю искомого вектора  $\vec{E}_2$

$$E_2 = E_2^* = E_2^{**}. \quad (5)$$

Далее наложим систему «повернутых и изменённых» зарядов на исходную систему зарядов. Тогда в центре  $O$  многоугольника, согласно принципу суперпозиции полей, суммарная напряженность  $\vec{E}_s$  электростатического поля (см. Рис. 03) будет равна сумме двух векторов

$$\vec{E}_s = \vec{E}_2 + \vec{E}_2^{**}. \quad (6)$$

Однако, с другой стороны (Рис. 04), при такой процедуре во всех точках (за исключением первой!) по

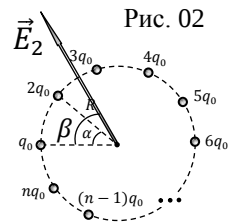


Рис. 02

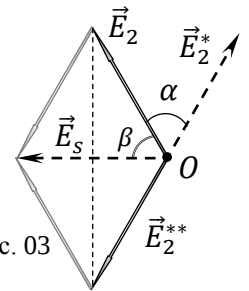


Рис. 03

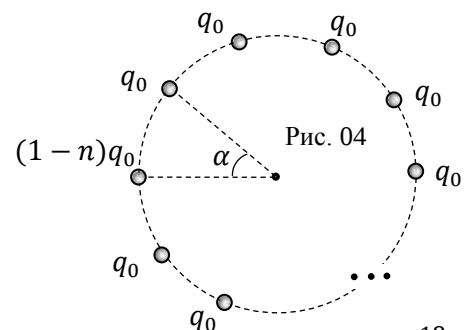


Рис. 04

правилам арифметической прогрессии останется только «по одному» заряду  $q_0$ .

В первой же точке системы окажется суммарный заряд  $(1 - n)q_0$ , который является «совокупностью» зарядов  $q_0$  (старого) и  $(-nq_0)$ , «пришедшего» в эту точку при повороте.

Таким образом, в полученной «наложенной» системе (см. Рис. 04) во всех вершинах многоугольника теперь находится по заряду  $q_0$  (согласно пункту 1.1 поле такой системы равно нулю), и в первой точке «появился» заряд  $(-nq_0)$ .

Следовательно, суммарное поле  $\vec{E}_s$  такой «наложенной» системы зарядов в центре  $O$  многоугольника совпадает с полем отрицательного заряда  $(-nq_0)$ , находящегося в первой точке цепочки, т.е.

$$E_s = \frac{nq_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

С другой стороны из равнобедренного треугольника напряженностей (см. Рис. 03) получим

$$E_s = 2E_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow E_2 = \frac{E_s}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем искомое значение

$$E_2 = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} E_0, \quad (9)$$

где  $E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  есть напряженность поля, создаваемого в центре многоугольника первым (наименьшим) зарядом.

Для задания вектора  $\vec{E}_2$  помимо его модуля (9) необходимо определить также и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол  $\beta$ , образованный искомым вектором  $\vec{E}_2$  с радиусом, проведенным из центра  $O$  многоугольника к первому заряду (см. Рис. 03).

Из равнобедренного треугольника напряженностей, учитывая равенство углов при основании, найдем

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{n-2}{2n} \pi. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) полностью задают искомым вектор  $\vec{E}_2$ , приложенный в точке  $O$  (центре правильного  $n$  – угольника, где  $n \geq 2$ ).

Интересно, что при  $n = 2$  «правильный многоугольник» представляет собой два заряда  $q_0$  и  $2q_0$ , находящиеся на концах диаметра окружности (т.е. с точки зрения математики его «не существует», т.к. класс правильных многоугольников начинается с правильного треугольника ( $n = 3$ )). Но, несмотря на это, формулы (9) и (10) дают правильные физические результаты ( $E_2 = E_0$ ,  $\beta = 0$ )!

**1.3** Для вычислений с использованием (9) и (10) необходимо знать количество вершин  $n$  правильного многоугольника.

Из Рис. 02 следует, что для того, чтобы вектор  $\vec{E}_2$  проходил (был «нацелен») через третью вершину многоугольника, угол  $\varphi$  должен удовлетворять условию

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \frac{n-2}{2n} \pi = 2 \frac{2\pi}{n} \Rightarrow n = 10. \quad (11)$$

Следовательно, искомый правильный многоугольник является правильным десятиугольником ( $n = 10$ ). В таком случае

$$\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0,628 \text{ рад} = 36,0^\circ. \quad (12)$$

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_2 = \frac{10 \cdot 151 \times 10^{-9}}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} (1,52)^2 \times \sin\left(\frac{6,28}{10}\right)} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \{5003,785076\}^1 = 5,00 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 5,00 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{10-2}{2 \cdot 10} \pi = \frac{2\pi}{5} = 1,26 \text{ рад} = 72,0^\circ. \quad (14)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).

## Часть 2. Геометрическая электростатика

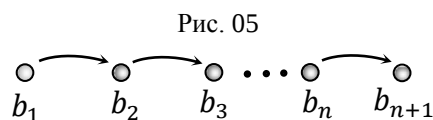
**2.1** Из-за малости заряженных шариков можно считать все заряды в вершинах многоугольника точечными.

Как следует из закона Кулона, первый заряд цепочки  $q_1 = q_0$  создает в центре  $O$  многоугольника напряженность электростатического поля

$$E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \{587,972293\} = 588 \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad (15)$$

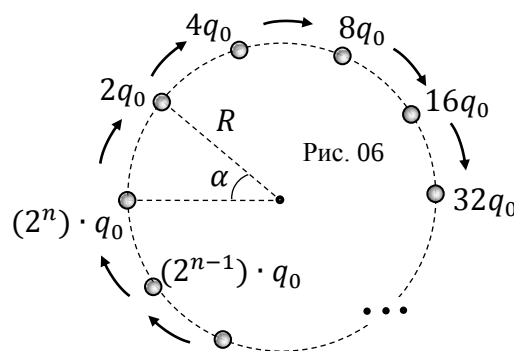
причем вектор  $\vec{E}_0$  направлен вдоль радиуса описанной окружности от заряда  $q_1$  к центру  $O$  многоугольника (Рис. 05).

**2.2** Как известно, при геометрической прогрессии каждый ее следующий член больше предыдущего члена в одно и то же число раз. Соответственно, если умножить все члены геометрической прогрессии на ее знаменатель  $q$ , то ее первый член  $b_1$  перейдет во второй  $b_2$ , второй  $b_2$  – в третий  $b_3$  и т.д. При этом вся цепочка «сдвинется» на один шаг влево (Рис. 05).

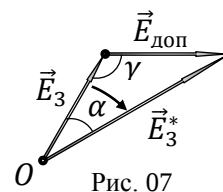


Это соображение и положим в основу следующего модернизированного «метода поворота» для вычисления напряженности  $\vec{E}_3$  электростатического поля, создаваемого данной системой электрических зарядов.

Умножим все заряды системы на 2 (т.е. на знаменатель  $q$  геометрической прогрессии) и повернем систему на угол  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  так, чтобы каждый заряд «перешел» в соседнюю позицию (Рис. 06).



Понятно, что после такого «искусственного» преобразования и поворота системы зарядов вектор  $\vec{E}_3^*$  ее новой напряженности поля также удвоился по модулю (стал  $2E_3$ ) и также повернулся на угол  $\alpha$  относительно своего начального положения, что удобно изобразить на векторной диаграмме (Рис. 07).



<sup>1</sup> — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

С другой стороны, как следует из Рис. 06, «сторонний наблюдатель» отметит, что после такой операции все заряды (за исключением первого) не изменились и «остались на своих местах». Только в первой вершине правильного многоугольника «исчез» заряд  $q_0$ , но «появился» новый заряд  $(2^n) \cdot q_0$ .

Но мы можем считать, что в первой вершине многоугольника одновременно находятся два заряда: первый заряд  $q_0$ , а второй  $(2^n - 1) \cdot q_0$ . Тогда можно сказать, что старая система зарядов «осталась» на месте, но в ее первой точке появился дополнительный заряд  $(2^n - 1) \cdot q_0$ .

Этот заряд создает в центре многоугольника дополнительную напряженность  $\vec{E}_{\text{доп}}$  электростатического поля

$$\vec{E}_{\text{доп}} = (2^n - 1) \cdot \vec{E}_0. \quad (16)$$

Как следует из (16) вектор этой дополнительной напряженности поля направлен вдоль радиуса к центру  $O$  многоугольника (см. Рис. 07), т.е. так же, как и вектор  $\vec{E}_0$ .

Из векторного треугольника напряжённостей (Рис. 07) выразим итоговый вектор  $\vec{E}_3^*$  и запишем теорему косинусов для стороны треугольника  $\vec{E}_{\text{доп}}$  с учетом (16)

$$\vec{E}_3^* = \vec{E}_3 + \vec{E}_{\text{доп}}, \quad (17)$$

$$(E_{\text{доп}})^2 = (E_0 \cdot (2^n - 1))^2 = E_3^2 + 4E_3^2 - 2E_3(2E_3) \cos \alpha. \quad (18)$$

Из (18) находим искомое значение

$$E_3 = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} E_0 = \{(15)\} = \frac{(2^{n-1}) \cdot q_0}{4\pi \epsilon_0 R^2 \sqrt{5-4 \cos(\frac{2\pi}{n})}}. \quad (19)$$

Для задания направления вектора  $\vec{E}_3$  найдем по теореме синусов угол  $\gamma$  треугольника, противолежащий стороне  $\vec{E}_3^*$

$$\frac{E_{\text{доп}}}{\sin \alpha} = \frac{E_3^*}{\sin \gamma} = \frac{2E_3}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2E_3}{E_{\text{доп}}} \sin \alpha. \quad (20)$$

С учетом (16) и (19) окончательно получаем

$$\sin \gamma = \frac{2(2^{n-1})}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} E_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{E_0 \cdot (2^n - 1)} = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}} = \frac{2 \sin(\frac{2\pi}{n})}{\sqrt{5-4 \cos(\frac{2\pi}{n})}}. \quad (21)$$

Выражения (19) и (21) полностью задают искомый вектор  $\vec{E}_3$ , приложенный в точке  $O$  (центре правильного  $n$ -угольника).

**2.3** Для вычислений с использованием (19) и (21) необходимо знать количество вершин  $n$  правильного многоугольника.

Согласно условию, для искомого многоугольника  $\vec{E}_3 \perp \vec{E}_0$ , т.е. треугольник напряженностей (см. Рис. 7) – прямоугольный. Следовательно, в этом случае

$$\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5-4 \cos \alpha}}. \quad (22)$$

Из (22) получаем квадратное уравнение относительно  $\cos \alpha$ , единственный корень которого

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ. \quad (23)$$

Из (23) находим число сторон  $n$  правильного многоугольника

$$n = \frac{2\pi}{\alpha} = 6, \quad (24)$$

т.е. в данном случае получается правильный шестиугольник.

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_3 = \frac{(2^6 - 1) \cdot 151 \times 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot (1,52)^2 \sqrt{5 - 4 \cos\left(\frac{6,28}{6}\right)}} = \{21392,91265\} = 21,4 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right) = 21,4 \left(\frac{\text{кВ}}{\text{м}}\right). \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад} = 90,0^\circ. \quad (26)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).