



Республиканская физическая олимпиада 2023 год (III этап)

Теоретический тур

Решения задач *9 класс* *(для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты. Если окончательный результат не занесен в Листы ответов, но содержится в основном решении, то этот результат необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 9-1. Двойная разминка. Решение.

1. Масса пропорциональна объему тела, поэтому масса шарика возрастет в 8 раз.
2. Высота уровня воды уменьшится в 4 раза, во столько же раз уменьшится давление.
3. Давление увеличится в 2 раза.
4. Мощность пропорциональна произведению силы на скорость, поэтому она возрастет в 8 раз.
5. Сопротивление уменьшится в 2 раза, поэтому при постоянном напряжении мощность возрастет в 2 раза.
6. В соответствии с формулой для электрического сопротивления, сопротивление уменьшится в 2 раза.
7. Время падения уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

Задание 9-2. Водяное отопление. Решение.

1. Описание примитивного способа обогрева строится на примитивном уравнении теплового баланса:

$$C_0(t_0 - t) = 2C_0(t - t_1). \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что конечная температура комнаты равна

$$t = \frac{t_0 + 2t_1}{3} = 50^\circ. \quad (2)$$

2. Пусть температура комнаты равна x_{k-1} , тогда его теплообмен с очередной порцией воды описывается следующим уравнением теплового баланса

$$C_0(x_{k-1} - x_k) = \frac{2C_0}{N}(x_k - t_1). \quad (3)$$

Перепишем это уравнение в виде «закона сохранения»:

$$x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1 = \left(1 + \frac{2}{N}\right)x_k, \quad (4)$$

Из которого находим требуемую формулу

$$x_k = \frac{x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (5)$$

3. Последовательный расчет по этой формуле дает следующие результаты. При разбиении на 2 порции конечная температура равна

$$t^{(2)} = 55^\circ$$

При разбиении на 3 порции

$$t^{(3)} = 57^\circ$$

4. Для получения формулы в общем виде запишем $x_k = t_1 + \Delta x_k$. Если подставить это выражение в уравнение (4), то после простых преобразований получим:

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_{k-1}}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (6)$$

Таким образом, величины Δx_k образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_0}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (7)$$

Или окончательно

$$t = x_N = t_1 + \frac{t_0 - t_1}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (8)$$

5. Численные расчеты по этой формуле дают следующие результаты

N	1	5	10	50
t	50	58,84	60,31	61,56

Следовательно, можно считать, что максимальная температура при нагревании частями примерно равна 62° .

Задание 9-1. Просто кинематика. Решение.

Часть 1. Известна зависимость скорости от времени.



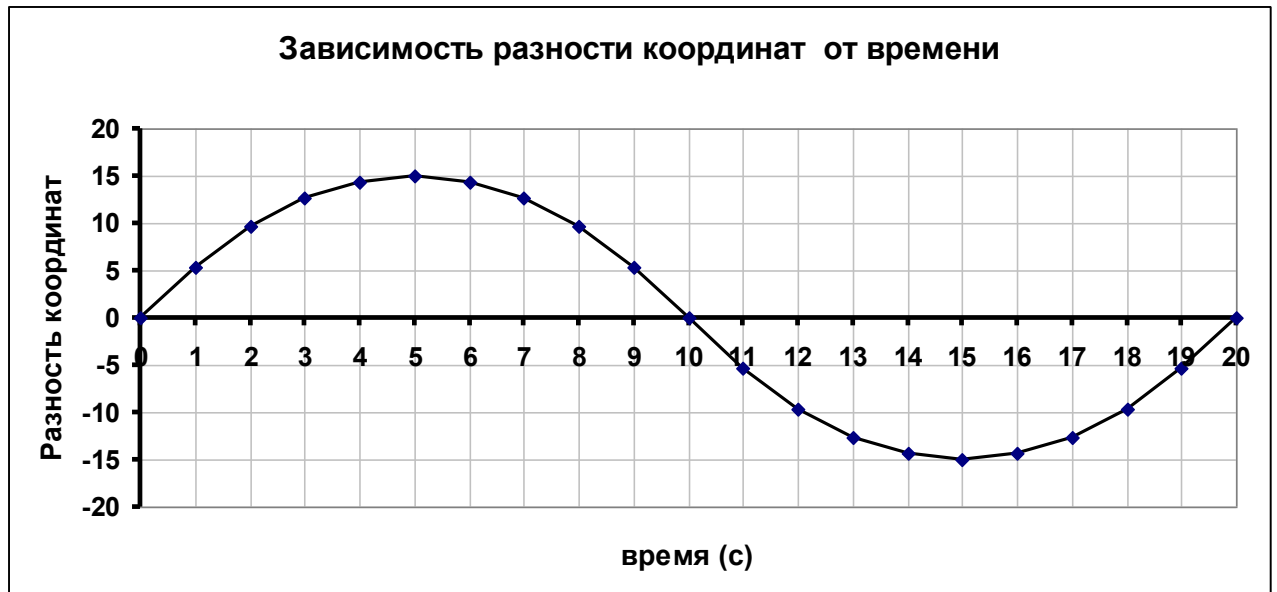
Самый простой способ решения построить зависимость относительной скорости от времени, которая имеет предельно простой вид. Площадь под этим графиком численно равна изменению разности координат частиц.

Из этого графика следуют ответы на поставленные вопросы.

1.1 Расстояния между частицами максимально в моменты времени, когда их скорости равны (т.е. относительная скорость равна нулю). Это условие выполняется в моменты времени 5 и 15 с.

1.2 Координаты частиц равны в моменты времени 0, 10 и 20 с, когда разности скоростей максимальны.

1.3 График зависимости разности координат от времени показан на рисунке. Его можно построить «по точкам» с помощью графика относительной скорости.



Часть 2. Известна зависимость скорости от координаты.



2.1 По приведенному графику не сложно заметить, что каждый отрезок пути, на котором частица движется с постоянной скоростью, частица проходит за 10 с. И через каждые 10 с скорость частицы уменьшается на 1 м/с. Вторая частица начинает движение тоже через 10 с. Следовательно, скорость второй частицы все время больше скорости первой на величину $\Delta v = 1,0 \text{ м/с}$. Однако, к моменту старта второй частицы первая прошла расстояние $l_0 = 50 \text{ м}$. Поэтому зависимость расстояния между частицами от времени имеет вид

$$l = l_0 - \Delta v t.$$

2.2 Заметим, что время движения первой частицы равно 50 с. Поэтому через 40 с после старта второй частицы, расстояние между частицами будет равно 10 м.



Республиканская физическая олимпиада 2023 год (III этап)

Теоретический тур

Решения задач 10 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты. Если окончательный результат не занесен в Листы ответов, но содержится в основном решении, то этот результат необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

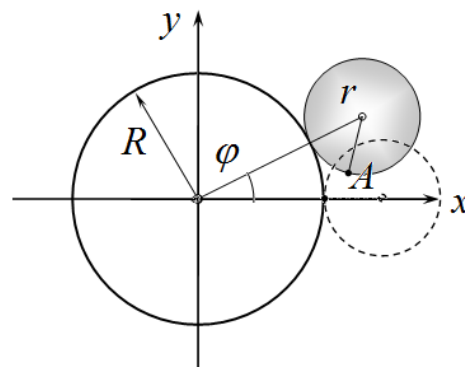
Задание 10-1. Двойное вращение. Решение.

1. Относительно центра колеса точка A поворачивается на угол α , который можно найти из условия

$$R\varphi = r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{R}{r}\varphi. \quad (1)$$

Тогда, как следует из рисунка, координаты точки A (с учетом $\varphi = \omega t$) описываются функциями

$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\cos\omega t - r\cos\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega t \\ y(t) &= (R+r)\sin\omega t - r\sin\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega t \end{aligned} \quad (2)$$



2. Скорость точки максимальна, когда она находится на максимальном удалении от центра диска. В эти моменты времени скорость центра $\omega(R+r)$ и скорость точки относительно центра колеса $\left(\frac{R}{r}+1\right)\omega r = (R+r)\omega$ совпадают, поэтому полная скорость точки A будет равна

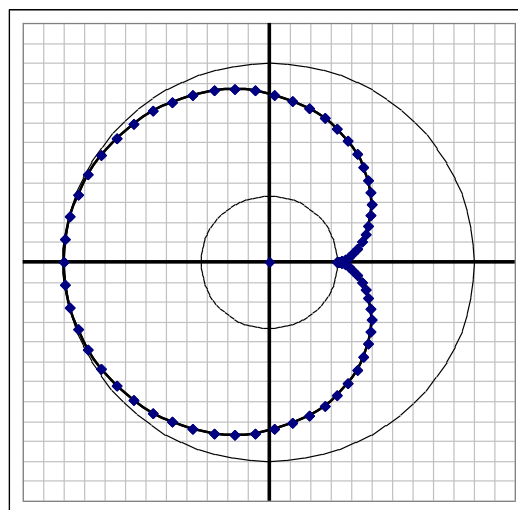
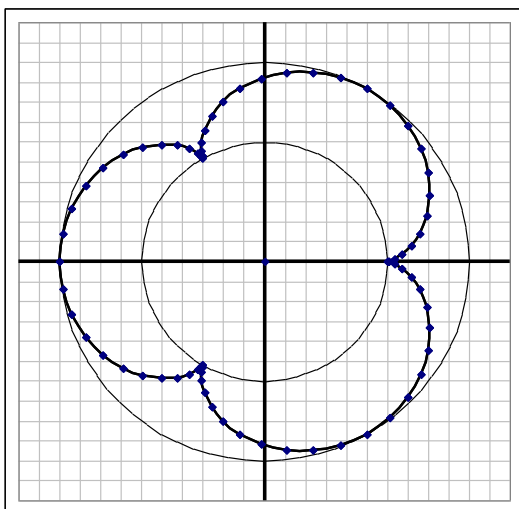
$$v_{\max} = 2(R+r)\omega. \quad (3)$$

Этот же результат можно получить, рассматривая точку касания как мгновенный центр вращения.

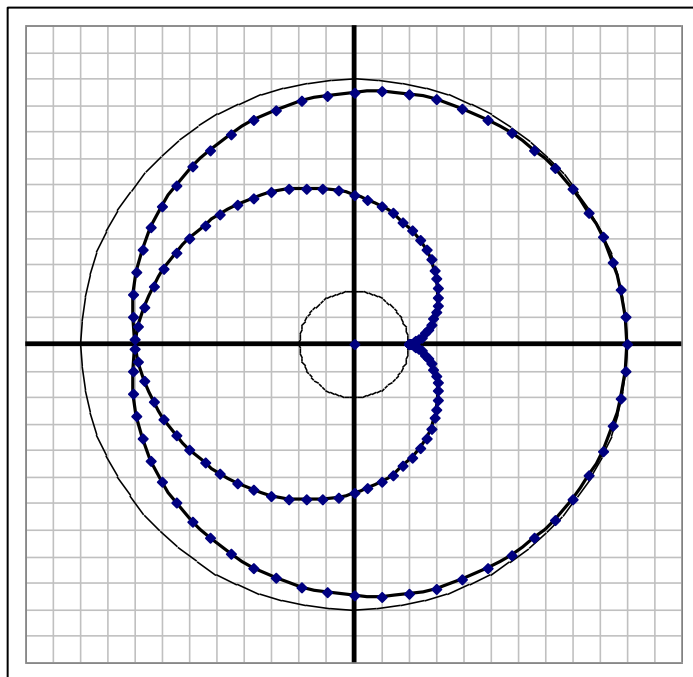
3. Схематические траектории можно построить, если последовательно находить точки касания и точки максимального удаления от диска. Ниже показаны эти траектории.

А) $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$

Б) $\frac{r}{R} = 1$ (эта кривая называется кардиоидой)



В) $\frac{r}{R} = 2$ Здесь колесо делает два оборота между последовательными касаниями.



Задание 10-2. Космический инфракрасный телескоп Джеймс Уэбб.

Решение.

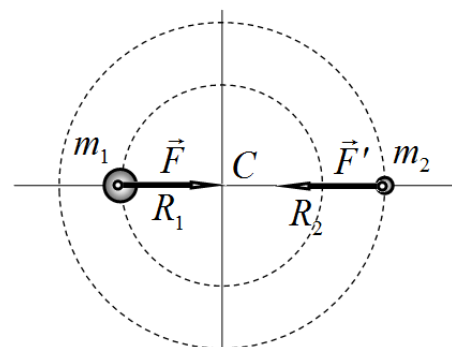
1. На основании 2 закона Ньютона и закона всемирного тяготения запишем уравнения, описывающие круговые движения обоих тел:

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 R_1 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \\ m_2 \omega^2 R_2 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω - угловая скорость движения тел. Из этих уравнений следует, что радиусы орбит удовлетворяют условию

$$m_1 R_1 = m_2 R_2. \quad (2)$$

Это соотношение указывает, что центр окружностей является центром масс системы двух тел.



2. Сумма радиусов равна расстоянию между телами

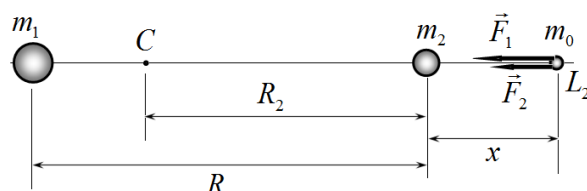
$$R_1 + R_2 = R. \quad (3)$$

Из уравнений (2) - (3) находим радиусы орбит:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \end{aligned} \quad (4)$$

3. Для тела массы m_0 , находящегося в точке Лагранжа, справедливо уравнение

$$m_0 \omega^2 (R_2 + x) = G \frac{m_0 m_1}{(R + x)^2} + G \frac{m_0 m_2}{x^2}. \quad (5)$$



Из уравнения (1) выразим значение угловой скорости

$$\omega^2 = G \frac{m_2}{R^2} \frac{1}{R_1} = G \frac{m_2}{R^2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 R} = G \frac{m_1 + m_2}{R^3}$$

И подставим его в уравнение (5), также как выражение для R_2 :

$$\begin{aligned}
 G \frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R + x \right) &= G \frac{m_1}{(R + x)^2} + G \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow \\
 \frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R + x \right) &= \frac{m_1}{(R + x)^2} + \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow \\
 \frac{m_1}{R^2} + \frac{m_1 + m_2}{R^3} x &= \frac{m_1}{(R + x)^2} + \frac{m_2}{x^2}
 \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, разделим уравнение на массу большего тела и введем отношение масс массивных тел $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, в результате получим уравнение для расчета значения расстояния от второго тела до первой точки Лагранжа:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1 + \mu}{R^3} x = \frac{1}{(R + x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \quad (7)$$

4. Очевидно, что масса спутника значительно меньше массы Земли, поэтому его положение совпадает с точкой Лагранжа. Поэтому для расчета расстояния до Земли следует решить уравнение (7). Точное решение этого уравнения затруднительно. Однако, масса Земли значительно меньше массы Солнца $\mu = 3,0 \cdot 10^{-6} \ll 1$, поэтому расстояние до Земли значительно меньше радиуса Земной орбиты $x \ll R$ (который практически равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца). В этом случае можно решить данное уравнение приближенно (но с высокой точностью), для чего следует провести следующее разложение:

$$\frac{1}{(R + x)^2} \approx \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3} x. \quad (8)$$

После этого разложения уравнение решается элементарно:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} + \frac{1 + \mu}{R^3} x &= \frac{1}{(R + x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{R^2} + \frac{1 + \mu}{R^3} x = \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3} x + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \\
 \frac{3 + \mu}{R^3} x &= \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} R
 \end{aligned} \quad (9)$$

Численный результат:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}} R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (10)$$

Задание 10-3. Теплоемкость газа. Решение.

1. Графики процессов показаны на рисунке. Числа возле кривых указывают значение параметра n . При $n \rightarrow \infty$ график стремится к вертикальной прямой (изохорный процесс).



2. Для расчета теплоемкости газа запишем уравнение первого закона термодинамики

$$\delta Q = \Delta U + \delta A \quad (1)$$

Воспользуемся определением теплоемкости и запишем

$$c = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + P \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (2)$$

Для вычисления второго слагаемого воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$PV = RT \quad (3)$$

Из которого следует, что

$$R\Delta T = (P + \Delta P)(V + \Delta V) - PV \approx P\Delta V + V\Delta P. \quad (4)$$

С благодарностью используем подсказку

$$\frac{\Delta P}{P} = -n \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \Delta P = -n \frac{P}{V} \Delta V$$

Подставим в выражение (4)

$$R\Delta T = P\Delta V + V\Delta P = P\Delta V - Vn \frac{P}{V} \Delta V = (1-n)P\Delta V. \quad (5)$$

Наконец, подставим это выражение в формулу (2), в результате получаем окончательную формулу для теплоемкости

$$c = \frac{3}{2}R + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}R - \frac{R}{n-1} = \frac{3n-5}{2(n-1)}R \quad (6)$$

Так как теплоемкость не зависит от характеристик состояния газа, то она постоянна в данном процессе.

3. Теплоемкость равна нулю при $n = \frac{5}{3}$. Такой процесс происходит без теплообмена, называется адиабатным.

4. Теплоемкость отрицательна, если показатель степени лежит в интервале

$$1 < n < \frac{5}{3}. \quad (7)$$

В таких процессах газ совершает работу, большую, чем количество полученной теплоты. Эта работа совершается за счет внутренней энергии, поэтому температура газа понижается.

5. Теплоемкость стремится к бесконечности при $n = 1$. Этот процесс изотермический – газ теплоту получает, а его температура не растет.



Республиканская физическая олимпиада 2023 год (III этап)

Теоретический тур

Решения задач 11 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты. Если окончательный результат не занесен в Листы ответов, но содержится в основном решении, то этот результат необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 11-1. «Кардиограмма» тепловой машины. (Решение).

Часть 1. Динамика цикла.

1.1 Из уравнения состояния идеального газа

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \quad (1)$$

Следует, что в относительных единицах соотношение для параметров газа имеет вид

$$\frac{pv}{\tau} = 1. \quad (2)$$

Поэтому значения давлений газа рассчитываются по формуле

$$p = \frac{\tau}{v}. \quad (3)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Значения объема и температуры.

$\frac{t}{t_0}$	$\frac{V}{V_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{P}{P_0}$
0,00	1,00	1,00	1,00
0,50	1,00	1,50	1,50
1,00	1,00	2,00	2,00
1,50	1,25	2,81	2,25
2,00	2,00	6,00	3,00
2,50	2,75	8,25	3,00
3,00	3,00	9,00	3,00
3,50	2,75	7,56	2,75
4,00	2,00	4,00	2,00
4,50	1,25	1,56	1,25
5,00	1,00	1,00	1,00

1.2 В условии задачи оговорено, что на каждом этапе цикла поршень движется с постоянным ускорением. Поэтому зависимость объема от времени описывается функцией

$$v = v_{k,0} + u_k(t - t_{k,0}) + \frac{a_k(t - t_{k,0})^2}{2}. \quad (4)$$

На каждом этапе в таблице 1 приведены значения объемов в трех точках $v_{k,0}$ в начале этапа $t_{k,0}$;

$v_{k,1/2}$ в середине этапа $t_{k,0} + 1/2$; $v_{k,1}$ в конце этапа $t_{k,0} + 1$. Для этих моментов времени можно записать уравнения, следующие из формулы (4):

$$\begin{aligned} v_{k,1/2} &= v_{k,0} + \frac{1}{2}u_k + \frac{a_k(1/2)^2}{2} \\ v_{k,1} &= v_{k,0} + u_k + \frac{a_k}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Это система уравнений, из которой легко найти значения начальной скорости u_k и ускорения a_k на каждом этапе цикла. Результаты расчетов для функций $v(t)$ приведены в соответствующем столбце Таблицы 2.

Таблица 2. Функции зависимостей объема и давления от времени.

Интервал времени		$v(t)$	$p(t)$
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$		
0	1	$v = 1$	$p = 1 + t$
1	2	$v = 1 + (t - 1)^2$	$p = 2 + (t - 1)^2$
2	3	$v = 2 + 2(t - 2) - (t - 2)^2$	$p = 3$
3	4	$v = 3 - (t - 3)^2$	$p = 3 - (t - 3)^2$
4	5	$v = 2 - 2(t - 4) + (t - 4)^2$	$p = 2 - 2(t - 4) + (t - 4)^2$

Для расчета зависимости давления от температуры можно поступить аналогично. Но нет гарантии, что на всех этапах эта зависимость описывается квадратичной функцией. Кроме того, для дальнейшего решения важно увидеть зависимость между давлением и температурой. Поэтому имеет смысл проанализировать каждый этап отдельно.

Этап 0-1. Объем остается постоянным (процесс изохорный при $v = 1$), поэтому $p = \tau$. Из таблицы 1 следует, что зависимость давления от времени линейна.

Этап 1-2. Из таблицы 1 следует, что на данном этапе $p = v + 1$.

Этап 2-3. Давление постоянно, т.е. процесс изохорный.

Этапы 3-4 и 4-5. Видно, что на этих участках $p = v$.

1.3 График зависимости давления от времени показан на рисунке.



1.4 Мощность двигателя равна произведению давления газа на скорость изменения объема поршня

$$w = P \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (6)$$

Из графика зависимости объема от времени следует, что максимальная скорость изменения объема достигается в момент времени $t = 2$, т.к. в этот момент времени максимален коэффициент наклона касательной. Численное значение максимальной скорости изменения можно найти из формул для зависимости объема от температуры, приведенных в таблице 2:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{\max} = 2. \quad (7)$$

В этот же момент времени давление также максимально и равно $p = 3$. Следовательно, в единицах системы СИ максимальная мощность равна

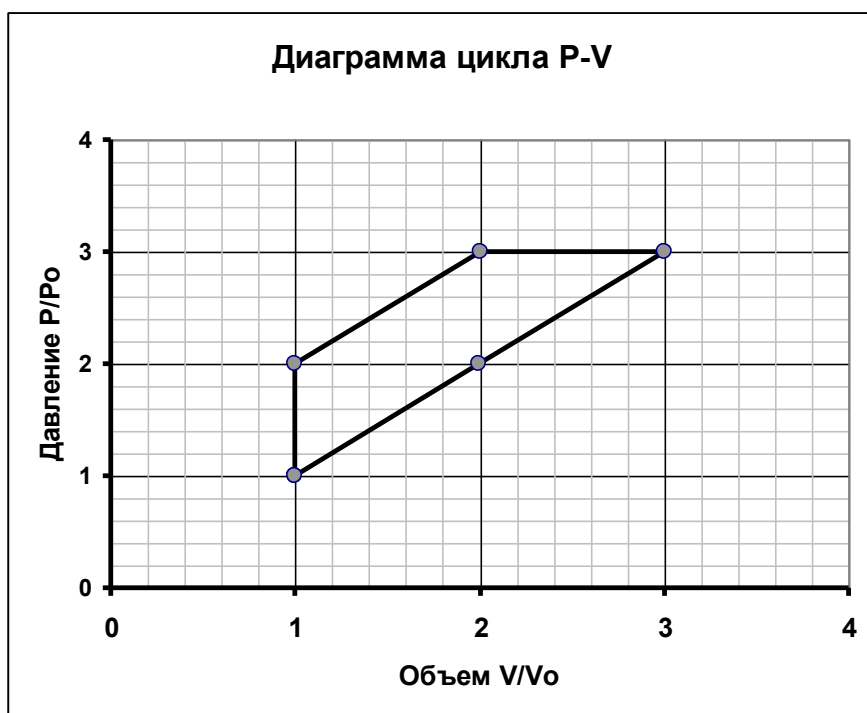
$$w_{\max} = \left(P \frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{\max} = P_0 p_{\max} \frac{V_0}{t_0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t'} \right)_{\max} = 6 \frac{P_0 V_0}{t_0} \quad (8)$$

И достигается в момент времени

$$t^* = 2t_0. \quad (9)$$

Часть 2. Термодинамика цикла.

2.1 На основании анализа, проведенного в п. 1.2, диаграмма цикла имеет вид, показанный на рисунке.



2.2 Изменение внутренней энергии одноатомного газа определяется формулой

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \Delta(PV) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \Delta(pv) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \Delta \tau \quad (10)$$

Работа, совершенная газом, может быть рассчитана как площадь под графиком зависимости давления от объема. Для малого участка изменения объема эта работа равна

$$\delta A = P \Delta V = P_0 V_0 p \Delta v. \quad (11)$$

Теоретический тур. Вариант 1.

11 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме

$$\delta Q = \Delta U + \delta A. \quad (12)$$

Как следует из этих формул, все эти величины пропорциональны произведению $P_0 V_0$, которое выступает в качестве единицы энергии в относительных единицах, принятых в этой задаче. Результаты расчетов по формулам (10) - (12) приведены в таблице 4.

Таблица 3. Термодинамические характеристики.

Интервал времени		Характеристики этапов		
Начало этапа $\frac{t}{t_0}$	Конец этапа $\frac{t}{t_0}$	Изменение энергии ΔU	Совершенная работа A	Полученная теплота Q
0	1	1,50	0,00	1,50
1	2	6,00	2,50	8,50
2	3	4,50	3,00	7,50
3	4	-7,50	-2,50	-10,00
4	5	-4,50	-1,50	-6,00
Суммы		0	1,5	17,5

В последней ячейке приведена сумма теплот, полученных газом, т.е. только сумма положительных величин в столбце теплот.

2.3 По определению КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1,5}{17,5} \approx 0,086 = 8,6\%. \quad (13)$$

2.4 Средняя мощность за цикл равна отношению совершенной за цикл работы к длительности цикла

$$\langle w \rangle = \frac{A}{t} = \frac{1,5 P_0 V_0}{5 t_0} = 0,30 \frac{P_0 V_0}{t_0}, \quad (14)$$

Что в 20 раз меньше максимальной мгновенной мощности.

Задание 11-2. Движение в поле. (Решение).

Часть 1. Прямолинейное движение в магнитном поле.

1.1 Во время движения бусинки в магнитном поле на бусинку действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно стержню (перпендикулярно плоскости рисунка)

$$F_L = qvB \sin \alpha. \quad (1)$$

Под действием этой силы бусинка будет прижиматься к стержню, вследствие чего возникнет сила трения, направленная в сторону противоположную вектору скорости

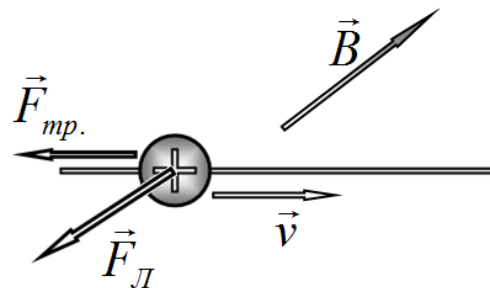
$$F_{тр.} = \mu qvB \sin \alpha. \quad (2)$$

На основании второго закона Ньютона ускорение бусинки выражается формулой

$$a = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v. \quad (3)$$

Ускорение бусинки направлено в сторону, противоположную вектору скорости, поэтому это выражение можно представить в векторной форме

$$\vec{a} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} \vec{v}. \quad (4)$$



1.2 Так как ускорение отрицательно, то модуль скорости будет монотонно убывать до нуля, с постоянно уменьшающимся ускорением. Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



1.3 Так нам необходимо найти путь до остановки (не важно за какое время), то в уравнении (3) избавимся от времени:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} v \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -\frac{\mu qB \sin \alpha}{m} \quad (5)$$

Мы учли, что $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$. Из полученного уравнения следует, что скорость бусинки линейно уменьшается по мере увеличения пройденного пути. Из этого уравнения следует, что путь, пройденный до остановки равен

$$S_1 = \frac{mv_0}{\mu q B \sin \alpha} \quad (6)$$

1.4 Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то ни модуль силы Лоренца, ни модуль силы трения не изменяются, иными словами уравнение (4) останется справедливым и в случае изменения направления вектора начальной скорости. Следовательно, и в этом случае пройденный путь будет определяться формулой (6):

$$S_2 = S_1. \quad (7)$$

$$S_2 = \frac{mv_0^2}{2qE(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}. \quad (8)$$

Часть 2. Движение по окружности в электрическом поле.

2.1 Движение без электрического поля.

2.1.1 При движении по окружности бусинка движется с центростремительным ускорением равным

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (9)$$

Это ускорение может сообщить только сила нормальной реакции со стороны кольца, равная

$$N = m \frac{v^2}{R}. \quad (10)$$

Поэтому на бусинку также действует сила трения, равная

$$F_{\text{тр.}} = \mu m \frac{v^2}{R}. \quad (11)$$

Наличие силы трения приводит к тому, что скорость (следовательно, и кинетическая энергия) бусинки уменьшается. Если бусинка сместилась по кольцу на малый угол $\Delta \varphi$, то уменьшение кинетической энергии бусинки равно работе силы трения, что выражается уравнением

$$\Delta E = -F_{\text{тр.}} \Delta S = -\mu m \frac{v^2}{R} \cdot R \Delta \varphi = -2\mu \frac{mv^2}{2} \Delta \varphi = -2\mu E \Delta \varphi. \quad (12)$$

Из этого уравнения следует, что уменьшение энергии пропорционально текущему значению энергии. Если обозначить значение энергии в начале рассматриваемого интервала - E_0 , а в конце интервала - E_1 , то связь между ними задается выражением

$$E_1 = E_0(1 - 2\mu \Delta \varphi), \quad (13)$$

Что и доказывает убывание энергии в геометрической прогрессии.

2.1.2 Как показано в предыдущей части кинетическая энергия, следовательно, и скорость при повороте на любой угол $\Delta \varphi$ убывают в геометрической прогрессии. Тогда скорость при повороте на один оборот может быть выражена следующим образом

$$v_1 = v_0(1 - \eta). \quad (14)$$

Где $\eta = 0,20$. При повороте на 5 оборота скорость станет равной

$$v_5 = v_0(1 - \eta)^5. \quad (15)$$

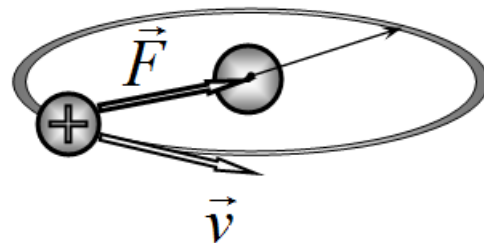
Подстановка численного значения дает результат

$$v_1 = v_0(1 - \eta)^5 = v_0 \cdot 0,8^5 \approx 0,33v_0. \quad (16)$$

что соответствует уменьшению скорости на 67%.

2.2 Движение в электрическом поле.

2.2.1 Силу нормальной реакции, следовательно, силу трения можно уменьшить с помощью силы электростатического взаимодействия, которая должна быть направлена к центру кольца. Это возможно в том случае, если в центр кольца поместить отрицательный заряд.



2.2.2 В этом случае уравнение 2 закона Ньютона в проекции на радиальное направление будет иметь вид

$$m \frac{v^2}{R} = N + qE_0. \quad (17)$$

Следовательно, сила нормальной реакции будет равна

$$N = m \frac{v^2}{R} - qE_0. \quad (18)$$

Сила нормальной реакции и сила трения станут равными нулю при

$$m \frac{v^2}{R} - qE_0 = 0 \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{qE_0 R}{m}}. \quad (19)$$

При этой скорости бусинка будет двигаться без трения, т.е. с постоянной по модулю скоростью.

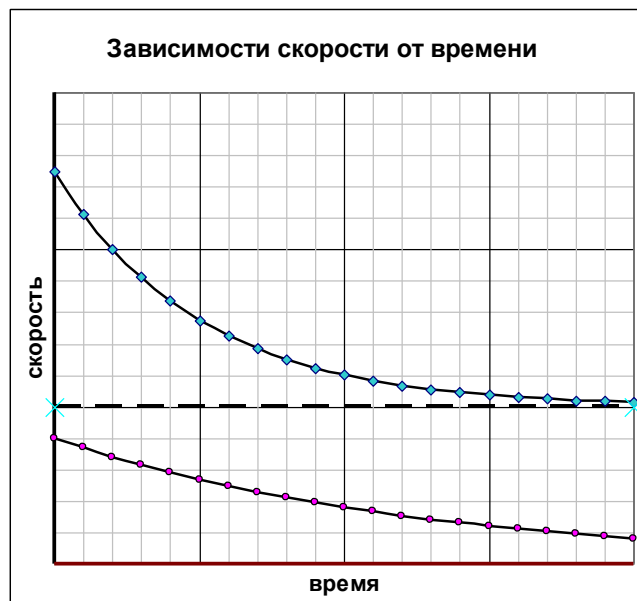
2.2.3 Если сила нормальной реакции отлична от нуля, то независимо от ее направления сила трения будет направлена в сторону, противоположную вектору скорости. Поэтому модуль скорости всегда будет уменьшаться и стремиться к одному из стационарных значений.

В случае а) $v_0 > v^*$: стремиться к значению

$$v^* = \sqrt{\frac{qE_0 R}{m}};$$

В случаях б) $0 < v_0 < v^*$ скорость бусинки будет стремиться к нулю.

Схематические графики этих зависимостей показаны на рисунке. Горизонтальной пунктирной линией отмечено значение v^* .



Задание 11-3. Морской хронометр. (Решение).

1. При отклонении стержня на угол φ шарики опускаются на расстояние $l(1 - \cos \varphi)$, поэтому изменение потенциальной энергии в поле тяжести равно

$$\Delta U = 2mgl(1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

Удлинение пружины оказывается равным

$$\Delta x = 2|BD| = 2 \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi = l \sin \varphi. \quad (2)$$

Следовательно, потенциальная энергия пружины при ее растяжении ($\varphi > 0$) описывается функцией

$$U_{\text{упр.}} = \frac{k}{2} (l \sin \varphi)^2 \quad (3)$$

При сжатии пружины ($\varphi < 0$) потенциальная энергия пружины равна нулю.

Таким образом, зависимость потенциальной энергии системы от угла отклонения имеет вид:

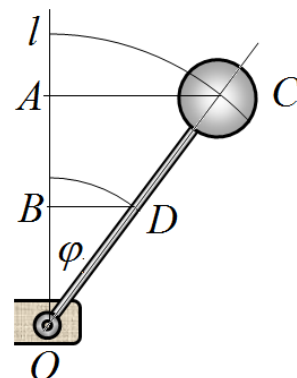
$$U(\varphi) = \begin{cases} 2mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{k}{2} (l \sin \varphi)^2, & \varphi > 0 \\ 2mgl(1 - \cos \varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Для удобства дальнейшего анализа этой функции, воспользуемся рекомендацией, данной в условии, для чего используем параметр γ . Для этого разделим выражение (4) на $\frac{kl^2}{2}$:

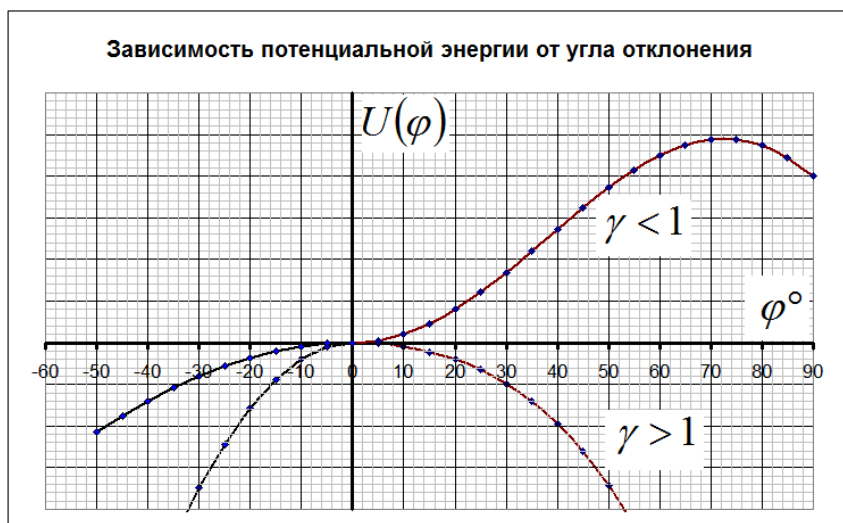
$$2 \frac{U(\varphi)}{kl^2} = u(\varphi) = \begin{cases} 2\gamma(1 - \cos \varphi) + \sin^2 \varphi, & \varphi > 0 \\ 2\gamma(1 - \cos \varphi), & \varphi < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Анализ этих графиков можно проводить различными способами:

- подсчитать значения функции численно;
- заметить, что данная функция является квадратичной функцией от $\cos \varphi$, т.к. $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$;
- найти точки экстремумов и значения функции в крайних точках.



Результаты такого анализа показаны на рисунке.



2. Для того, чтобы в системе были возможны колебания, необходимо, чтобы существовала точка минимума потенциальной энергии. Вертикальное положение стержня ($\varphi = 0$) является положением равновесия, но оно неустойчиво. При отклонении в отрицательную сторону стержень падает. Что очевидно: пружина не может его отталкивать!

При $\gamma < 1$ Существует еще одно положение равновесия, но оно также неустойчиво.

Это можно показать, если рассмотреть моменты сил, действующих на вертикальный маятник. Положению равновесия соответствует равенство модулей моментов силы тяжести $mgl \sin \varphi$ и силы упругости

$$(kl \sin \varphi) \cdot \left(\frac{l}{2} \cos \varphi \right) = \frac{kl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi : \quad (6)$$

$$mgl \sin \varphi = \frac{kl^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi .$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\gamma \sin \varphi = \sin \varphi \cos \varphi , \quad (7)$$

Из которого следует, что при $\gamma < 1$, существует положение равновесия $\cos \varphi = \gamma$, помимо вертикального положения $\varphi = 0$. Но как было отмечено ранее – это положение равновесия является неустойчивым, поэтому колебания возле него невозможны.

3. Если длина пружины больше расстояния между стержнями, то удлинение пружины будет равно

$$\Delta x = 2 \frac{l}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) . \quad (8)$$

Поэтому уравнение равновесия (7) примет вид

$$\gamma \sin \varphi = (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi . \quad (9)$$

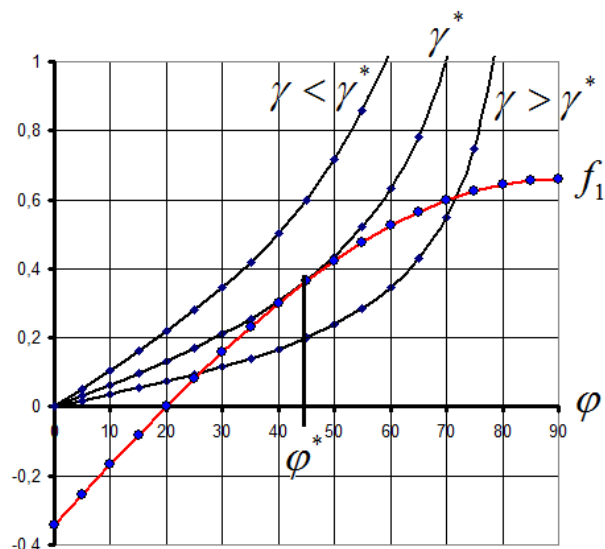
4. Итак, положения равновесия существуют, если это уравнение имеет корни! Решить это уравнение аналитически затруднительно, поэтому поставим более простую задачу: найти условия, при которых корни существуют в

интервале $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

Перепишем уравнение в более простой форме

$$\gamma \tan \varphi = \sin \varphi - \sin \varphi_0 . \quad (10)$$

Легко построить схематический график функции $f_1 = \sin \varphi - \sin \varphi_0$ и несколько графиков функции $f_2 = \gamma \tan \varphi$ при нескольких возрастающих значениях параметра γ . При $\gamma = 0$ уравнение (10) имеет очевидный корень $\varphi = \varphi_0$; при увеличении параметра γ тангенсоида приподнимается, но пересекает график функции f_1 ; при некотором критическом значении γ^* эти функции



касаются друг друга; наконец, при $\gamma > \gamma^*$ уравнение (10) корней не имеет. Для расчета критического значения γ^* нужно записать условия касания двух функций: в точке касания функции равны между собой, также равны их производные (для упрощения опустим знак «звездочки»):

$$\begin{aligned} \gamma \operatorname{tg} \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \\ \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} &= \cos \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

Из второго уравнения находим, что $\gamma = \cos^3 \varphi$, подставляя в первое уравнение, после несложных преобразований получим,

$$\begin{aligned} \cos^3 \varphi \operatorname{tg} \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \cos^2 \varphi \sin \varphi &= \sin \varphi - \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi &= \sin \varphi_0 \Rightarrow \\ \sin^3 \varphi &= \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, точка касания задается условием

$$\sin \varphi^* = \sqrt[3]{\sin \varphi_0}. \quad (12)$$

Тогда критическое значение параметра равно

$$\gamma^* = \cos^3 \varphi^* = (1 - \sin^2 \varphi^*)^{3/2} = (1 - (\sin \varphi_0)^{2/3})^{3/2}. \quad (13)$$

Таким образом, колебания маятников возможны при

$$0 < \gamma < (1 - (\sin \varphi_0)^{2/3})^{3/2}. \quad (14)$$

Отметим, что при $\gamma = 0$ масса шаров равна нулю, поэтому колебания невозможны.

5. Легко показать, что положению устойчивого равновесия соответствует меньший корень уравнения (10), поэтому вблизи этого положения возможны колебания стержней.

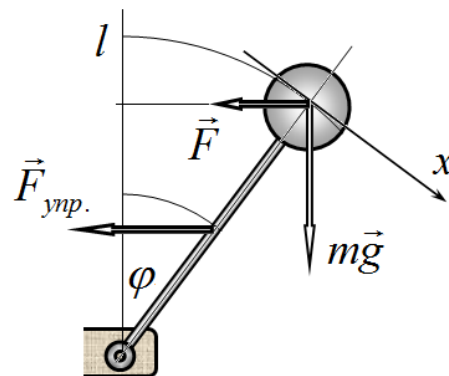
6. При заданном значении $\varphi_0 = 10^\circ$ можно использовать приближенный формулы для тригонометрических функций в этом случае уравнение (9) линеаризуется

$$\gamma \varphi = (\varphi - \varphi_0). \quad (15)$$

Решение которого находится элементарно:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{1 - \gamma} \approx 14^\circ. \quad (16)$$

7. Рассмотрим силы, действующие на шарик: это сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$, действующая со стороны стержня. Так масса стержня пренебрежимо мала, то сумма моментов сил, действующих на стержень, равна нулю. Следовательно, со стороны шарика на стержень действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и направленная противоположно ей. Поэтому на шарик (третий закон Ньютона!) действует сила в 2 раза меньшая силы упругости и сонаправленная с ней.



В проекции на ось x , касательную к траектории, уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$ma = mg \sin \varphi - \frac{kl(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{2} \cos \varphi. \quad (17)$$

Полагая углы малыми, получим уравнение

$$ma = mg\varphi - \frac{kl(\varphi - \varphi_0)}{2} = -\frac{kl}{2} \left(1 - \frac{2mg}{kl}\right) \varphi + \frac{kl\varphi_0}{2} = -\frac{kl}{2} (1 - \gamma) \frac{x}{l} + \frac{kl\varphi_0}{2}, \quad (18)$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k(1-\gamma)}}. \quad (19)$$

8. Колебания возможны, если маятник не попадет в область $\varphi < 0$. Следовательно, амплитуда колебаний не должна превышать значение угла, соответствующее положению равновесия, т.е.

$$\varphi_{\max} < \varphi_1 = 14^\circ. \quad (20)$$