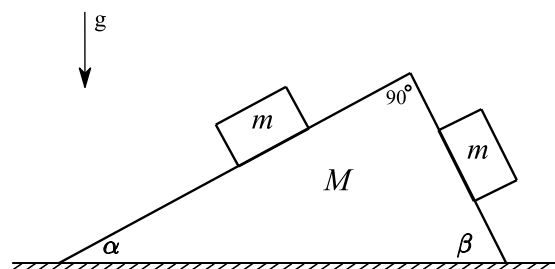
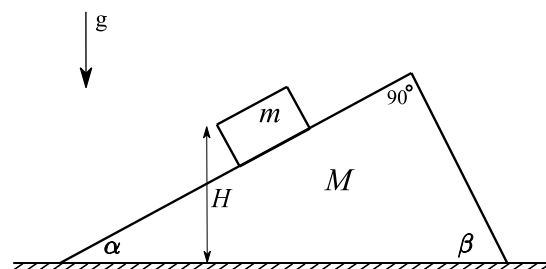


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 11-12. клас

Задача 1. Механика



Фиг. 1 а



Фиг. 1 б

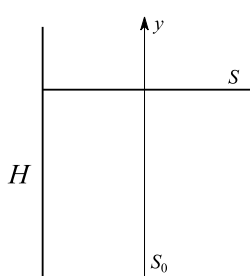
Клин с маса M и с форма на правоъгълен триъгълник е поставен върху равнина, както е показано на фиг. 1 а и б. Всички повърхности по-долу са гладки, т.е. отсъства сила на триене.

а) Клинт се захваща неподвижно за равнината. Две малки тела с маси m са поставени неподвижно върху клина, при което започват да се пързят по него (фиг. 1 а). Определете нормалната сила N , с която системата от трите тела действа върху равнината. [3т]

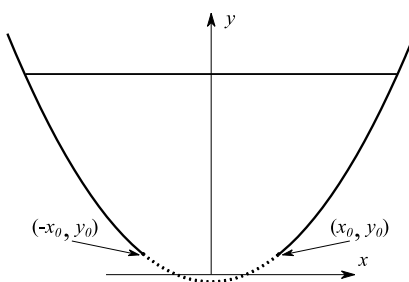
б) Клинт вече може да се движи свободно без триене по равнината. Определете ускорението a , с което се движи той, докато телата се пързят по него. [3т] Намерете силата N , с която системата от трите тела действа върху равнината. [1т]

в) Нека в началото е поставено неподвижно само едно тяло с маса m на височина H (фиг. 1 б). Намерете скоростите на тялото и клина в момента, когато тялото достига основата на клина. Намерете числен резултат за стойностите $g = 10 \text{ m/s}^2$, $H = 3 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $m = 1 \text{ kg}$, $M = 2 \text{ kg}$. Приемете, че малкото тяло е с пренебрежими размери. [3т]

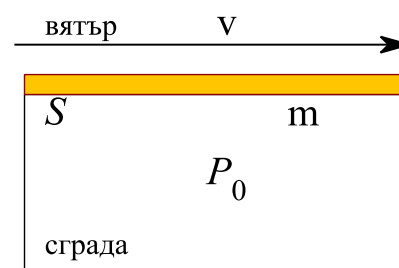
Задача 2. Флуиди



Фиг. 2 а



Фиг. 2 б



Фиг. 2 в

а) В правоъгълен съд с площ S е налята вода до височина H , както е показано на фиг. 2 а. Водата изтича през дупчица с площ S_0 , намираща се на дъното на съда. Нека с v_y означим скоростта, с която спада нивото на водата, а с v_0 – скоростта на водната струя, изтичаща през дупчицата. Намерете v_y и v_0 като функция на нивото на водата y . [3т]

б) В съд с ротационна форма е налята вода, която изтича през дупка на дъното на съда (фиг. 2б). Дупката е симетрична, като краищата ѝ са с координати $(-x_0, y_0)$ и (x_0, y_0) . Формата на съда е

такава, че нивото на водата у спада равномерно с времето. Следователно тази система може да се използва за измерване на времето. Намерете формата на съда $y = f(x)$. [4т]

Упътване за а) и б): Водата да се разгледа като течност с пренебрежим вискозитет.

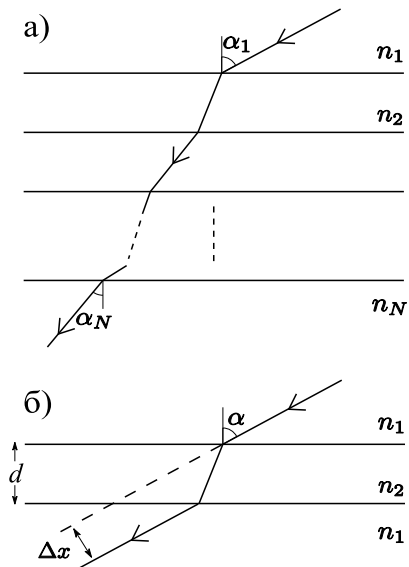
в) На фиг. 2 в е показана сграда, която е изложена на вятър със скорост v . Пресметнете минималната скорост v_0 , при която вятърът ще отдели покрива от сградата. Максималната допустима сила на опън на конструкцията, поддържаща покрива, е F_0 , площта и масата на покрива са съответно S и m , а плътността на въздуха е ρ . [3т]

Задача 3. Оптика

Част А

а) Светлинен лъч преминава последователно през среди с различни показатели на пречупване $n_1, n_2, \dots, n_N$, както е показано на фиг. 3 а). Границите на средите, $N-1$ на брой, са успоредни една на друга. Намерете изходния ъгъл α_N при даден входен ъгъл α_1 . [1т]

б) Лъч пада под ъгъл α върху плоско-паралелна пластинка с дебелина d . Показателите на пречупване на средите са показани на фиг. 3 б). Намерете отместването на лъча Δx . Намерете числен резултат за стойностите $\alpha = 45^\circ$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, $d = 1$ см. [3т]



Фиг. 3

Част Б

Фотоапарат има прост обектив, който се състои от една леща с фокусно разстояние $f = 1$ см и диаметър $d = 1$ см. Сензорът, върху който се проектира изображението от обектива, представлява квадрат със страна $L = 20$ mm.

а) Апаратът е фокусирал обект на разстояние $a = 1$ m. Намерете зрителното поле ϕ на фотоапарата. Зрително поле е максималният ъглов диаметър, който може да се заснеме с дадения фотоапарат. [2т]

б) Фотографът насочва фотоапарата към Слънцето и го оставя с отворена бленда, така че то да осветява сензора за продължително време. Слънчевата светлина преминава през филтър, така че интензитетът ѝ е $I_0 = 0.1 \text{ W/m}^2$, а ъгловият диаметър на Слънцето е приблизително $\alpha = 0.5^\circ$. Намерете равновесната температура T_0 на осветената част от сензора. [4т]

Упътване б): Равновесна температура се постига, когато за единица време тялото поглъща и излъчва еднакво количество енергия.

Приемете, че сензорът поглъща целия светлинен поток и че е с нулева топлинна проводимост (не провежда топлина към неосветената си част и към останалата част от фотоапарата). Сензорът излъчва топлина единствено от осветената от Слънцето страна.

Константа на Стефан-Болцман $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

12 – 13 март 2016 г., Бургас

Тема за 11-12. клас, Решения и указания

Задача 1. Механика - решение

а) Работим в инерциална отправна система, т.е. разглеждаме силите в координатна система, която е неподвижна спрямо хоризонталната равнина. Налице са следните сили: върху телата действат реакциите на опората N_1 и N_2 и силите на тежестта G (изобразени на фиг. 1 а). Имаме

$$N_1 = mg \cos \alpha, \quad [1\tau]$$

$$N_2 = mg \cos \beta.$$

За компонентите по вертикалната ос намираме

$$N_{1y} = mg \cos^2 \alpha, \quad [1\tau]$$

$$N_{2y} = mg \cos^2 \beta.$$

Така за пълната сила намираме

$$N = mg (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + Mg = (m + M)g, \quad [1\tau]$$

където сме отчели, че $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

б) Клинт вече може да се движи свободно без триене по равнината. Приемаме, че се движи с ускорение a надясно. Върху клина действат реакциите на опората от страна на телата (3-ти принцип на Нютон), както и силите на тежестта. Следват динамичните уравнения, разложени по координатните оси. За лявото тяло (маса m):

$$-N_1 \sin \alpha = ma_{1x}, \quad [0.5\tau]$$

$$N_1 \cos \alpha - mg = ma_{1y}.$$

За дясно тяло (маса m):

$$N_2 \sin \beta = ma_{2x}, \quad [0.5\tau]$$

$$N_2 \cos \beta - mg = ma_{2y}.$$

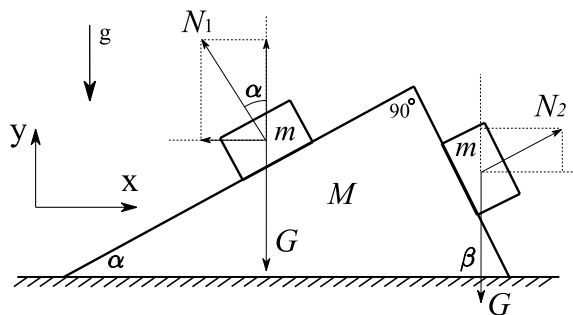
За клина (маса M):

$$N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \beta = Ma.$$

Телата се движат успоредно на повърхността на клина и затова векторите на ускоренията $\vec{a}_1 - \vec{a}$ и $\vec{a}_2 - \vec{a}$ също сочат успоредно на тези повърхности. Така за компонентите на a_1 и a_2 намираме

$$\frac{a_{1y}}{a_{1x} - a} = \tan \alpha, \quad \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a} = -\tan \beta. \quad [1\tau]$$

Изразяваме всяка от компонентите от динамичните уравнения и ги заместваме в горните две уравнения:



Фиг. 1 а

$$\frac{N_1}{m} = g \cos \alpha - a \sin \alpha,$$

$$\frac{N_2}{m} = g \cos \beta + a \sin \beta.$$

Заместваме получените изрази в уравнението за клина, при което получаваме

$$m \left[g(\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta) - a(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \right] = Ma.$$

Налагаме условието $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, при което получаваме

$$(m + M)a = 0.$$

Така намираме ускорението на клина

$$a = 0. \text{ [1т]}$$

Тъй като $a = 0$, за силата, с която телата действат на равнината, отново получаваме

$$N = (m + M)g. \text{ [1т]}$$

в) Запазват се механичната енергия и импулса на системата по x :

$$mgH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}, \text{ [1т]}$$

$$mv_{1x} + Mv = 0.$$

Имаме и връзките

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x} - v} = \tan \alpha, \text{ [1т]}$$

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_1^2.$$

Намираме

$$2gH = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + \frac{M}{m}v^2,$$

$$v_{1x} = -\frac{M}{m}v,$$

$$v_{1y} = -v \left(1 + \frac{M}{m} \right) \tan \alpha.$$

Така получаваме

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \left(1 + \frac{M}{m} \right)^2 \tan^2 \alpha}} \text{ [0.4т]}$$

и

$$v_1 = \sqrt{2gH - \frac{M}{m}v^2} = \sqrt{2gH \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M} \left(1 + \frac{M}{m} \right)^2 \tan^2 \alpha} \right)} \text{ [0.4т]}$$

За съответните стойности намираме $v = 2 \text{ m/s}$ [0.1т] и $v_1 = 2\sqrt{13} \text{ m/s} \approx 7.21 \text{ m/s}$. [0.1т]

Задача 2. Флүиди - решение

а) Прилагаме закона на Бернули за точка от водната повърхност с височина y и за точка от дъното с височина 0 :

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \text{ [1т].}$$

В опростен вид изразът приема вида: $2gy + v_y^2 = v_0^2$. В сила е и принципът за непрекъснатостта:

$$v_y S = v_0 S_0 \text{ [1т].}$$

От последните две уравнения получаваме:

$$v_y = S_0 \sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \text{ [0.5т]} \text{ и } v_0 = S \sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \text{ [0.5т].}$$

б) Отново прилагаме закона на Бернули между повърхността и дъното:

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \rho g y_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \text{ [1т].}$$

В опростен вид изразът има вида: $2g(y - y_0) + v_y^2 = v_0^2$. Прилагаме и принципа за непрекъснатостта:

$$v_y \pi x^2 = v_0 \pi x_0^2 \text{ [1т],}$$

където сме използвали формулата за площ на кръг. Така намираме

$$v_y^2 = 2g \frac{y - y_0}{x^4 - x_0^4} x_0^4 \text{ [1т].}$$

Налагаме условието за постоянна скорост, откъдето намираме формата на съда:

$$y = y_0 - \frac{v_y^2}{2g} + \frac{v_y^2}{2g} \frac{x^4}{x_0^4} \text{ [1т].}$$

в) На покрива действат следните сили: тежестта mg (посока надолу), натиск от страна на въздуха над покрива $P_1 S$ (надолу) и натиск от страна на въздуха под покрива $P_0 S$ (нагоре). Максимално допустимият дисбаланс между тези сили, такъв че покривът да не се отдели от сградата, се компенсира от силата на опън F_0 (надолу). Получаваме следното уравнение

$$P_1 S - P_0 S + mg + F_0 = 0. \text{ [1т]}$$

В сила е уравнението на Бернули, свързващо налягането в сградата с налягането непосредствено над покрива (токовата линия „влиза“ в сградата):

$$P_0 = P_1 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \text{ [1т]}$$

където v_0 е търсената минимална скорост. Така намираме

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(mg + F_0)}{\rho S}}. \text{ [1т]}$$

Задача 3. Оптика – решение

Част А

а) Прилагаме закона на Снелиус за всяка една граница:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha_1 &= n_2 \sin \alpha_2, \\ n_2 \sin \alpha_2 &= n_3 \sin \alpha_3, \\ &\vdots \\ n_{N-1} \sin \alpha_{N-1} &= n_N \sin \alpha_N. \end{aligned} \quad [0.5\tau]$$

Така намираме уравнението $n_1 \sin \alpha_1 = n_N \sin \alpha_N$, откъдето получаваме

$$\alpha_N = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_N} \sin \alpha_1 \right). \quad [0.5\tau]$$

б) Законът на Снелиус за първата граница е

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad [0.25\tau]$$

Лъчът в третата среда е успореден на падналия. За отместването намираме

$$\Delta x = d \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = d \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta}, \quad [1\tau]$$

където сме ползвали, че $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

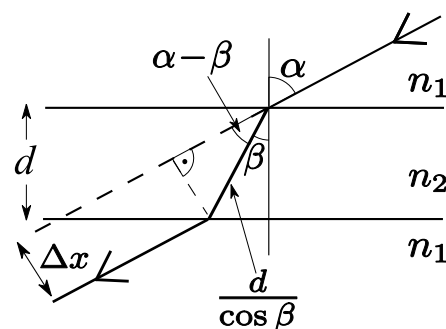
Така намираме

$$\Delta x = d \left(\sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) = d \left(\sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \right). \quad [0.5\tau]$$

Използваме закона на Снелиус:

$$\Delta x = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\frac{n_1}{n_2} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \right)^2}} \right). \quad [1\tau]$$

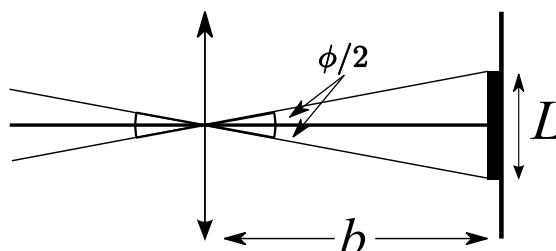
За дадените стойности имаме $\Delta x \approx 0.33$ см. $[0.25\tau]$



Част Б

а) От фигурата се вижда, че

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{L}{2b}, \text{ откъдето получаваме}$$



$$\phi = 2 \arctan \frac{L}{2b} .[\mathbf{0.5\tau}]$$

Разстоянието b намираме от формулата $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$:

$$b = \frac{af}{a-f} .[\mathbf{0.5\tau}]$$

Така намираме

$$\phi = 2 \arctan \frac{L(a-f)}{2af} \approx 89.4^\circ .[\mathbf{1\tau}]$$

б) Във фотоапарата влиза светлинен поток с мощност

$$P = I_0 S = I_0 \frac{\pi d^2}{4} .[\mathbf{0.75\tau}]$$

Тази мощност се разпределя върху кръг с приблизителен диаметър αf и площ $S' = \frac{\pi \alpha^2 f^2}{4}$

[0.75τ]. Така за мощността на единица площ имаме $\frac{P}{S'} = I_0 \left(\frac{d}{\alpha f} \right)^2$ **[0.5τ]**. За равновесната температура имаме

$$\sigma T_0^4 = \frac{P}{S'} = I_0 \left(\frac{d}{\alpha f} \right)^2 ,[\mathbf{1\tau}]$$

откъдето получаваме

$$T_0 = \left(\frac{I_0}{\sigma} \left(\frac{d}{\alpha f} \right)^2 \right)^{1/4} \approx 390 \text{ K. } [\mathbf{1\tau}]$$