

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално пробно състезание по физика

Велико Търново, 26 февруари 2011 г.

Специална тема

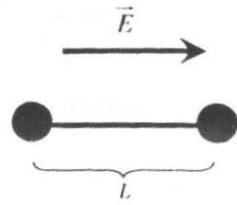
Задача 1. Индуциран заряд върху сфери

Част 1. Две еднакви метални и незаредени сфери с радиус R са свързани посредством прав, много тънък и дълъг проводник с дължина L ($L \gg R$). Системата от двете сфери с проводника се поставя в хомогенно електрично поле с големина E така, че посоката на полето да е успоредна на правия проводник, както е показано на Фигура 1а. Намерете:

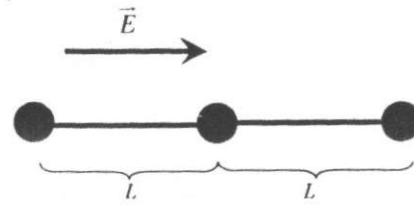
а) Заряда, който се индуцира върху лявата сфера. [1,5т]

б) Заряда, който се индуцира върху дясната сфера. [1,5т]

в) Ако външното поле стане мигновено нула, то намерете времето, за което зарядът на сферите ще намалее e - пъти ($e = 2,7182818$ е Ейлеровото число). Съпротивлението на проводника е r . [2т]



Фигура 1а.



Фигура 1б.

Част 2. Нека сега, вместо две, да имаме три последователно свързани сфери, центровете на които лежат на една права, която е успоредна на външното електрично поле E , както е показано на Фигура 1б. Намерете:

г) Заряда, който се индуцира върху лявата сфера. [1т]

д) Заряда, който се индуцира върху дясната сфера. [1т]

е) Заряда, който се индуцира върху средната сфера. [1т]

Част 3. Нека сега имаме N последователно свързани сфери, центровете на които лежат на една права, която е успоредна на външното електрично поле E . Намерете:

ж) Заряда, който се индуцира върху крайните две сфери. [2т]

Упътване: при решаването на задачата пренебрегнете заряда, който се натрупва върху проводниците, свързващи сферите и считайте, че всяка една от сферите се зарежда хомогенно.

Задача 2. Йо-йо

Йо-йо е играчка, направена от два еднакви малки диска от пластмаса (метал, дървесина или други материали), свързани с ос, около която е навита еластична нишка (конец), завършваща с примка за пръста. Така получената макаринка се пуска надолу и сама се връща в ръката на играещия.

Част 1. На Фигура 2а е показано Йо-йо с външен радиус R и вътрешен (на който се навива концето) r . Ако инерционният момент на Йо-йото спрямо оста му на симетрия е I , а масата на Йо-йото е M , то намерете:

а) Линейното ускорение a , с което Йо-йото ще се движи, ако го пуснем свободно, но държим края на концето така, че концето да се развива. [3т]

б) Ако концето е с дължина L и е изцяло намотан на Йо-йото, то каква ще е крайната линейна скорост V на центъра на масата на Йо-йото точно в момента, в който концето изцяло се е развил от Йо-йото. [2т]

в) Каква ще е ъгловата скорост Ω на Йо-йото за предишната подточка (подточка б). [1т]

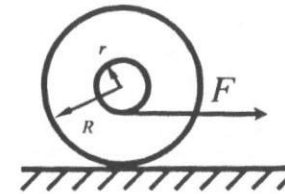
Част 2. Същото Йо-йо от предишната част на задачата е поставено на маса и концето започва да се придържа с хоризонтална сила F надясно, както е показано на Фигура 2б, вследствие на която Йо-йото започва да се търкаля без хлъзгане. Намерете:

г) В каква посока ще се движи Йо-йото (наляво или надясно на чертежа) и посоката, в която ще се върти то (по часовниковата стрелка или обратно на часовниковата стрелка). Обосновете отговора си. [1т]

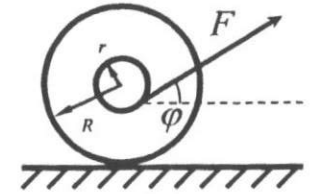
д) Ако силата F не е хоризонтална, а сключва ъгъл φ с хоризонта (Фигура 2в), то при какъв критичен ъгъл φ Йо-йото ще обърне посоката си на движение и на въртене? Обосновете отговора си. [3т]



Фигура 2а.



Фигура 2б.



Фигура 2в.

Задача 3. Повърхностно напрежение

Част 1. Херметически затворен буркан е напълнен изцяло с вода. Освен водата, на дъното на буркана се намират и два малки въздушни мехура, както е показано на Фигура 3а. Двата мехура бавно се сливат и образуват един по-голям мехур, както е показано на Фигура 3б. Налягането на гърлото на буркана е P_0 , първоначалният радиус на двата мехура е R_0 , а коефициентът на повърхностно напрежение на водата е σ . Считайки, че процесът на сливането на мехурите е изотермен, намерете:

а) Радиуса R на новообразуваният се мехур. [1т]

б) Изменението на налягането при гърлото на буркана ΔP . [3т]

Упътване: Считайте, че размерите на мехурите са пренебрежимо малки в сравнение с размерите на буркана. Също така приемете, че водата е несвиваема, а въздухът в мехурите е идеален газ.



Фигура 3а.



Фигура 3б.

Част 2. Два сапунени мехура, които се намират във въздух, имат радиуси R_1 и R_2 . Двата мехура се сливат бавно в един мехур с радиус R_0 . Считайки, че процесът на сливането на мехурите е изотермен, намерете коефициента на повърхностно напрежение σ за сапунения разтвор, ако атмосферното налягане е P_a . [3т]

Упътване: Приемете, че въздухът в мехурите и извън него е идеален газ.

Част 3. Две еднакви капки живак с радиус R_0 се намират при една и съща температура T_0 . Ако повърхностното напрежение на живака е σ , топлинният му капацитет е c , а плътността му е ρ , то намерете температурата на капката живак, която се е образувала от сливането на двете капки. Пренебрегнете разширението на живака и топлообмена с околната среда. [3т]

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика

Велико Търново, 26 февруари 2011 г.

Специална тема

Задача 1. Индуциран заряд върху сфери

Част 1. а) и б) Системата от двете сфери и проводника се явява екипотенциална система, така че, поставена в електрично поле, на лявата сфера се натрупват отрицателни заряди $-q$, а на дясната сфера - положителни заряди q (от закона за запазване на зарядите $\Rightarrow$ зарядите са равни по големина) [0,5т].

Тъй като радиусът на сферите R е много по-малък от разстоянието между сферите L , то потенциалът, създаден от зарядите на всяка сфера не оказва влияние върху потенциала, създаден от зарядите на другата сфера [0,5т].

По уътване сферите са зареждат хомогенно $\Rightarrow$ потенциалът, създаден върху лявата сфера ще е като на точков заряд

$$\varphi_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} [0,5т]$$

аналогично на дясната сфера

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} [0,5т]$$

Потенциалната разлика трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$EL = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 REL [1т]$$

в) токът, който протича при спиране на външното електрично поле, можем да изразим като производна на заряда по времето

$$I = \frac{dq}{dt} [0,5т]$$

От друга страна, от закона на Ом имаме

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} = \frac{q}{r2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{q}{r2\pi\epsilon_0 R} [0,5т]$$

$\Rightarrow$ зарядът на сферите ще намалее e - пъти ($e = 2,7182818$ е Неперовото число), когато:

$$\ln\left(\frac{q}{q/e}\right) = \frac{t}{r2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow t = 2\pi\epsilon_0 Rr [1т]$$

Част 2. г), д) и е) Когато имаме три сфери, от съображение на симетрия, зарядът в лявата и дясната сфера трябва да са равни по големина и противоположни по знак, докато средната сфера не трябва да е заредена [1т].

Отново потенциалът, създаден върху всяка от сферите, ще е като на точков заряд $\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} [0,5т]$$

аналогично на дясната сфера

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} [0,5т]$$

Потенциалната разлика трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$E2L = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 REL [1т]$$

Част 3. ж) Тъй като се интересуваме само от заряда на двете крайни сфери, то задачата се решава аналогично.

Отново потенциалът, създаден върху всяка от крайните сфери, ще е като на точков заряд $\Rightarrow$

$$\varphi_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

аналогично на най-дясната сфера

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Потенциалната разлика между първата и последната сфера трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$E(N-1)L = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 REL(N-1) [2т]$$

Задача 2. Йо-йо

Част 1. а) Има две сили, действащи на Йо-йото: сила на опън от страна на концата и гравитационната сила (Фигура 1а). Ускоряването на Йо-йото зависи от тези две сили:

$$aM = Mg - T [0,5т]$$

Въртеливото движение на Йо-йото се определя от въртящия момент, създаден от силата на опън T (въртящият момент на гравитационната сила е равен на нула):

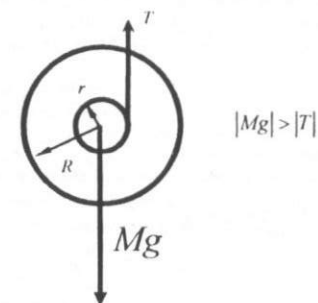
$$\alpha I = Tr [0,5т]$$

Връзката между ъгловото ускорение α и линейното ускорение a е

$$a = \alpha r [1т]$$

Сега можем да изразим силата на опън от страна на концата и ъгловото ускорение и тогава за линейното ускорение имаме:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{Mr^2}} [1т]$$



Фигура 1а.

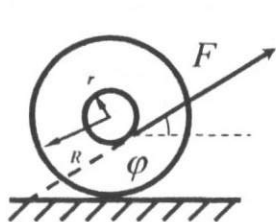
б) Имаме равноускорително движение без начална скорост с ускорение $a \Rightarrow$

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I}{Mr^2}}} [2т]$$

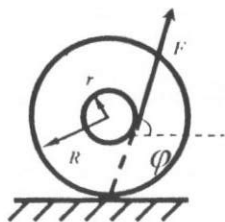
в) От връзката между ъгловата скорост и линейната скорост $\Rightarrow$

$$\Omega = V/r = \sqrt{\frac{2gL}{r^2 + R^2}} [1\tau].$$

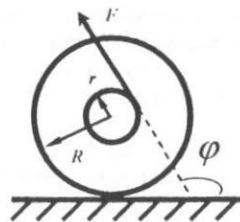
Част 2. Анализът на Йо-йото е най-лесен, ако изчислявате въртящите моменти в точката на контакт между Йо-йото и масата. Тъй като силата на триене е приложена в точката на контакт, то тя не създава въртящ момент, въртящ момент има само силата F .
г) Когато дърпаме конця хоризонтално, въртящият момент спрямо точката на контакт е по часовниковата стрелка и Йо-йото се движи надясно и по часовниковата стрелка. [1τ]



Фигура 16.



Фигура 1в.



Фигура 1г.

д) За да видим какво се случва, когато дърпаме конця под ъгъл φ , нека да продължим направлението на силата, докато достигне повърхността на масата. В случай, че удължаването е от лявата страна на точката на допир, както на Фигура 16, въртящият момент е все още по часовниковата стрелка и Йо-йото все още се движи надясно и по часовниковата стрелка. В случай че продължението на силата F минава през точката на контакт (Фигура 1в), въртящият момент става нула и Йо-йото спира да се търкаля. Ако продължението на силата мине отляво на точката на допир (Фигура 1г), то въртящият момент е обратно на часовниковата стрелка и Йо-йото започва да се движи наляво и се върти обратно на часовниковата стрелка. [1τ]
 Критичният ъгъл лесно се определя от геометрията на Фигура 1в $\Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{r}{R} [2\tau].$$

Задача 3. Повърхностно напрежение

Част 1. а) Тъй като в условието на задачата е казано, че бурканът е изцяло напълнен с несвиваема вода и е херметически затворен, то общият обем няма как да се промени. Тогава общият обем на двата мехура е равен на обема на новообразувания се мехур $\Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R = R_0 2^{1/3} [1\tau]$$

б) Нека да напишем условието за равновесие на мехурите преди да се слейт. Това условие е равенство на наляганията вътре и вън на мехурите:

$$P_{\text{вън}} = P_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{R_0} [1\tau],$$

Тук ρgh е хидростатичното налягане на дъното на буркан с височина h .

Тъй като газа в мехурчетата считаме за идеален, процеса на сливане за изотермен, а обемът не се променя, както показвахме в предишната точка, то остава и налягането вътре в новообразувания се мехур да не се променя $\Rightarrow$

$$P_{\text{вън}} = P_1 + \rho gh + \frac{2\sigma}{R} [1\tau].$$

Тогава търсеното изменение на налягането при търкането на буркана ΔP е:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{2\sigma}{R} \Rightarrow \Delta P = \frac{2\sigma}{R_0} \left(1 - \frac{1}{2^{1/3}}\right) \approx 0.4 \frac{\sigma}{R_0} [1\tau]$$

Част 2. По време на сливането температурата на газа в мехурчетата не се променя, запазва се още и общата маса на газа от двата мехура $\Rightarrow$

$$m_0 = m_1 + m_2, [0.5\tau]$$

тук m_0, m_1 и m_2 са масите на газа в съответните мехури. От закона за идеален газ имаме:

$$m_i = \frac{PV_i \mu}{RT} \quad i = 0, 1, 2 [0.5\tau]$$

тук μ е моларната маса на идеалния газ в мехурите. Условието за равновесие на мехурите е равенство на наляганята вътре и вън на мехурите:

$$P_i = P_{\text{вън}} + 2 \frac{2\sigma}{R_i} \quad i = 0, 1, 2 [0.5\tau]$$

където коефициентът 2 във втория член отчита, че сапуненият мехур има вътрешна и външна стена (за разлика от предишната част на задачата).

Обема на всеки мехур изразяваме от формула за обем на сфера:

$$V_i = \frac{4}{3} \pi R_i^3 \quad i = 0, 1, 2 [0.5\tau]$$

Замествайки всичко в уравнението за масите $\Rightarrow$

$$\left(P_{\text{вън}} + \frac{4\sigma}{R_0}\right) R_0^3 = \left(P_{\text{вън}} + \frac{4\sigma}{R_1}\right) R_1^3 + \left(P_{\text{вън}} + \frac{4\sigma}{R_2}\right) R_2^3$$

Или, окончателно за коефициента на повърхностно напрежение σ за сапунения разтвор имаме:

$$\sigma = \frac{P_{\text{вън}}}{4} \frac{R_0^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_0^2} [1\tau]$$

Част 3. Тъй като се пренебрегва топлинното разширение на живака, то обемът се запазва

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R = R_0 2^{1/3} [1\tau]$$

Намаляването на площта означава намаляване на енергията на повърхностното напрежение, която е за сметка на повишаването на температурата на новообразуваната капична живак $\Rightarrow$

$$4\pi\sigma(2R_0^2 - R^2) = 2\rho \frac{4}{3} \pi R_0^3 c(T - T_0) \Rightarrow [1\tau]$$

$$T = T_0 + \frac{3\sigma}{2\rho c R_0^3} (2R_0^2 - R^2) \Rightarrow T = T_0 + \frac{3\sigma}{2\rho c R_0^3} (2 - 2^{2/3}) \Rightarrow [1\tau]$$