

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

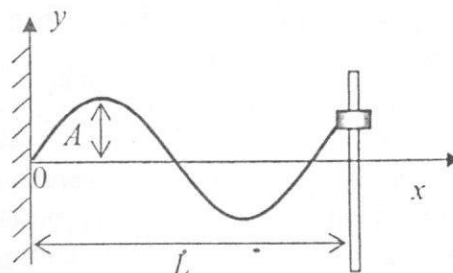
Пловдив, 17 – 19.03.2006 г.

Специална тема

8'-XII
f тема

Задача 1. Разхлабена струна

Единият край на струна е закрепен неподвижно, а другият – за шайба с маса M , която може да се хлъзга без триене по спица, (фиг. 1). В изправено състояние струната е перпендикулярна на спицата, дължината ѝ е L , линейната плътност на масата ѝ (маса на единица дължина) е μ , а силата на опъване – T . Струната трепти с толкова малка амплитуда ($A \ll L$), че можете да приемете силата на опъване за постоянна по големина.



Фиг. 1

При тези условия собствените трептения на струната са стоящи вълни, при които отклонението на точка, разположена на разстояние x от неподвижния край, се дава с израза:

$$(1) \quad y(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t),$$

където $k = 2\pi/\lambda$ е вълновият вектор на стоящата вълна, а ω – кръговата честота на трептене.

а) Получете израз за ускорението a , с което се движи шайбата, като функция на времето t и на параметрите A, k, L, T . [2 т]

б) Докажете, че за да съществува стояща вълна в струната, вълновият ѝ вектор k трябва да приема стойности, които се определят от уравнението:

$$(2) \quad \cotg(kL) = \frac{Mk}{\mu}. \quad [4 \text{ т}]$$

в) Пресметнете числено най-ниската (основна) честота ν на собствено трептене на струната при $T = 100 \text{ N}$, $\mu = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}$, $M = 0,01 \text{ kg}$, $L = 0,5 \text{ m}$. [4 т]

Упътване:

- Силата на опъване е толкова голяма, че можете да пренебрегнете силата на тежестта във всички подусловия на задачата.
- Скоростта c на разпространение на напречни вълни по опъната струна се дава с израза:

$$(3) \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

- Ако решението изисква, можете да използвате предоставената ви милиметрова хартия. В този случай задължително предайте милиметровата хартия заедно с останалите листа от решението!

Задача 2. Ако имаше магнитни заряди

Според установените схващания магнитното поле се поражда от движещи се електрични заряди. Въпреки това, няма фундаментален закон на физиката, който изключва съществуването на свободни магнитни заряди. Един точков магнитен заряд g би създавал в точка с радиус-вектор $\vec{r}$ магнитно поле с индукция $\vec{B}$, която се задава с израза:

$$(1) \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 g}{4\pi r^3} \vec{r},$$

където $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Н/м}$ е магнитната константа. За полето на система от магнитни заряди би била изпълнена теоремата на Гаус:

$$(2) \quad \Phi_B = \mu_0 g_t,$$

където Φ_B е потокът на магнитното поле през дадена затворена повърхност, а g_t е пълният магнитен заряд, заграден от тази повърхност.

а) Изразете единицата за магнитен заряд в системата SI чрез единиците за електричен заряд, дължина и време. [2 т]

б) Електрон се движи перпендикулярно на еднородното магнитно поле в "магнитен кондензатор" – две успоредни пластини, върху които са разпределени равномерно магнитни заряди с еднакви големина и противоположни знаци (фиг. 2.1).

- Като използвате правилото за квантуване на Бор, докажете, че общият магнитен заряд, който се съдържа в участък от пластината с площ S , равна на площта на електронната орбита, е целочислено кратен на определен "елементарен" магнитен заряд g_e . Изразете g_e чрез фундаменталните константи, дадени в края на задачата и пресметнете неговата числена стойност. [4 т]

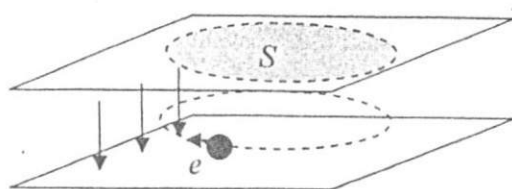
в) Частица с елементарен магнитен заряд g_e се движи с постоянна скорост v по оста z на проводящ пръстен с радиус a и съпротивление R (фиг. 2.2). Частицата започва движение на много голямо разстояние от пръстена ($z = -\infty$), преминава през центъра му ($z = 0$) и се отдалечава на много голямо разстояние от него ($z = +\infty$).

- Получете израз за индуцираното ЕДН в пръстена, като функция на координатата z на частицата и параметрите g_e , v , a , μ_0 . [2 т]
- Получете израз за пълното количество топлина Q , което се отделя в пръстена при преминаване на частицата чрез параметрите v , a , R , константата на Планк h и елементарния електричен заряд e . [2 т]

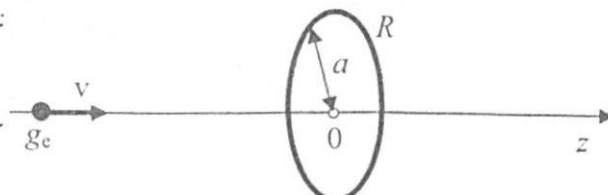
Приемете, че индуктивността на пръстена е пренебрежимо малка.

Фундаментални константи:

- елементарен електричен заряд, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- константа на Планк, $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$;
- магнитна константа, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Н/м}$.



Фиг. 2.1

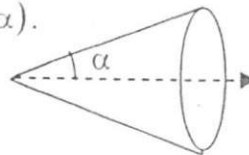


Фиг. 2.2

Упътване: Ако е нужно, можете да използвате, че:

- Пространственият ъгъл Ω , който загражда конус с ъгъл α между оста му и образуващата, се дава с израза: $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

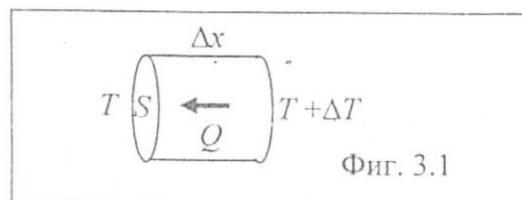


Задача 3. Икономично отопление

Нека разгледаме слой от определен материал с дебелина Δx и с площ на напречното сечение S (фиг. 3.1). Ако температурите върху двете основи на слоя са различни, T и $T + \Delta T$, през слоя започва пренос на топлина. Пренесеното за време t количество топлина Q , се дава с израза:

$$(1) \quad Q = kS \frac{\Delta T}{\Delta x} t,$$

където k се нарича **топлопроводност** на дадения материал. Теплопроводността се измерва с единицата $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



а) Стая има една външна стена от бетон с дебелина $d_1 = 0,2 \text{ m}$, широчина $a = 4 \text{ m}$ и височина $b = 3 \text{ m}$ (фиг. 3.2). На стената има квадратен прозорец от единично стъкло с дебелина $d_2 = 2 \text{ mm}$ и с дължина на страната $c = 1,5 \text{ m}$. Намерете мощността P на електрически нагревател, нужна за да се поддържа в стаята постоянна температура $T_1 = 20^\circ \text{C}$ при температура на външния въздух $T_2 = 0^\circ \text{C}$. [2 т]

б) За икономия на енергия, единичният прозорец е заменен с двоен, който се състои от два листа стъкло с еднакви дебелини $d_2 = 2 \text{ mm}$, между които има въздушен слой с дебелина $d_3 = 1 \text{ cm}$ (фиг. 3.3). Пресметнете мощността P_1 на нагревателя, която е необходима в този случай за поддържане на температура $T_1 = 20^\circ \text{C}$ в стаята при температура на външния въздух $T_2 = 0^\circ \text{C}$. [4 т]

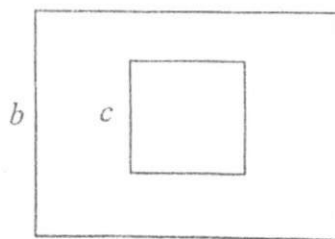
в) Един съвременен уред за отопление е т. нар. **термопомпа**. Тя представлява устройство, което има същия работен цикъл като този на хладилник. Охладеното работно вещество приема топлина от външния въздух, свива се адиабатно, при което се загрява и тогава отдава топлина на въздуха в стаята.

- Ако приемете, че термопомпата работи по цикъла на Карно, пресметнете мощността P_2 на електричния ток, който тя консумира, за да поддържа същата постоянна температура $T_1 = 20^\circ \text{C}$ в стаята при температура на външния въздух $T_2 = 0^\circ \text{C}$. [3 т]

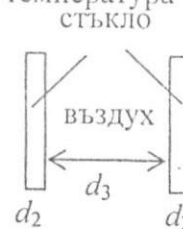
- Колко пъти ще намалее консумираната мощност в случай на отопление с електрически нагревател и в случай на отопление с термопомпа, ако външната температура се повиши до 10°C при постоянна температура на въздуха в стаята? [1 т]

Използвайте от таблицата

Материал	$k (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
Бетон	0,84
Стъкло	0,84
Въздух	0,023



Фиг. 3.2



Фиг. 3.3

Национално пролетно състезание по физика
Пловдив, 17 – 19.03.2006 г.

Примерни решения на задачите от Специалната тема

Задача 1. Разхлабена струна

а) Законът за движение на шайбата по y се получава от уравнението на стоящата вълна при $x = L$:

$$(1) \quad y(t) = A \sin(kL) \sin(\omega t). \quad [0,25 \text{ т.}]$$

Ускорението на шайбата е втора производна на отклонението по времето:

$$(2) \quad a(t) = y''(t) = -\omega^2 A \sin(kL) \sin(\omega t). \quad [0,25 \text{ т.}]$$

За да изразим ускорението чрез зададените параметри, използваме съотношението:

$$(3) \quad \lambda v = c. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Оттук получаваме:

$$(4) \quad \omega = 2\pi v = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Използваме формулата за скорост на напречните вълни и заместваем израза (4) за ω в уравнение (2):

$$(5) \quad a(t) = -\frac{k^2 T}{\mu} A \sin(kL) \sin(kt\sqrt{T/\mu}) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

б) От II принцип на Нютон:

$$(6) \quad ma = -T \sin \alpha, \quad [1 \text{ т.}]$$

където α е ъгълът между допирателната към струната в десния ѝ край и оста x (фиг. 1.1). Мащабът по y е силно увеличен. В действителност $A \ll L$, поради което този ъгъл е много малък и $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, т. е.:

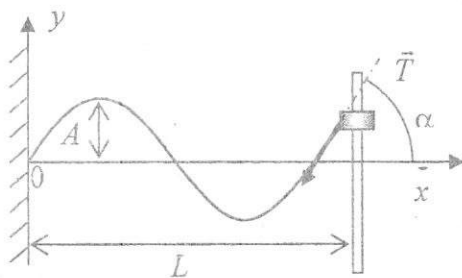
$$(7) \quad ma \approx -T \operatorname{tg} \alpha \quad [1 \text{ т.}]$$

От друга страна:

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = kA \cos(kL) \sin(\omega t). \quad [1 \text{ т.}]$$

Като заместим изразите (5) и (8) в уравнение (7), и след елементарни преобразования, получаваме:

$$(9) \quad \cotg(kL) = \frac{Mk}{\mu}. \quad [1 \text{ т.}]$$



Фиг. 1.1

в) За да намерим най-ниската (основна) честота ν на струната, е нужно да определим най-малката стойност на k , която удовлетворява условието за стояща вълна (9). Удобно е (но не е задължително) да въведем помощна безразмерна променлива $x = kL$. Тогава уравнение (9) се записва във вида:

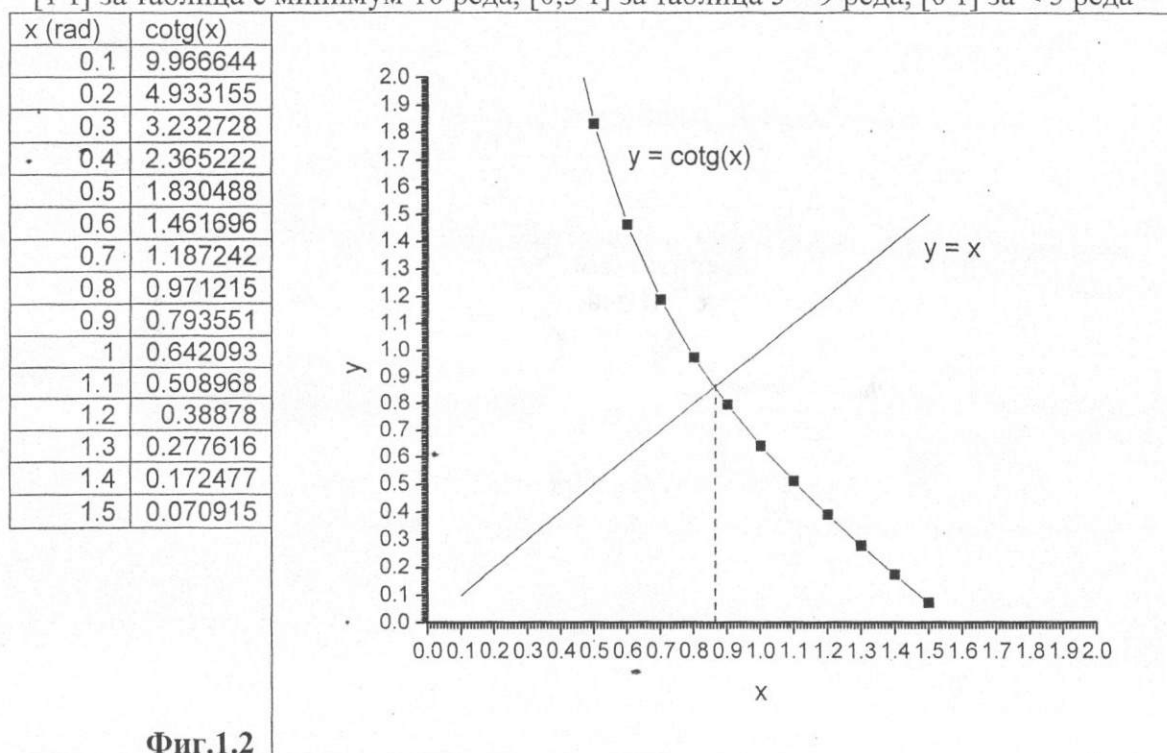
$$(10) \quad \cotg(x) = \frac{Mx}{\mu L}.$$

При зададените числени стойности установяваме, че $\mu L = M$ и уравнението за определяне на x се упрости допълнително:

$$(11) \quad \cotg(x) = x.$$

За да намерим най-малкия корен на това уравнение, е достатъчно да построим върху милиметрова хартия графиките на функциите $y = \cotg(x)$ и $y = x$ в интервала $(0; \pi/2)$. За целта пресмятаме функцията $y = \cotg(x)$ в поне 10 точки и построяваме нейната графика. Графиката на функцията $y = x$ е ъглополовяща на I квадрант (фиг. 1.2).

[1 т] за таблица с минимум 10 реда, [0,5 т] за таблица 5 – 9 реда, [0 т] за < 5 реда



Фиг.1.2

[1 т] за правилно нанесени точки върху графиката.

От пресечната точка на графиките намираме:

$$x \approx 0.86 \text{ или } k = x/L \approx 1,7 \text{ m}^{-1}. \quad [1 \text{ т}] \text{ за две верни значещи цифри}$$

За честотата имаме:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{x}{2\pi L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

откъдето:

$$\nu \approx 9,7 \text{ Hz}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Задача 2. Ако имаше магнитни заряди

а) Сравняваме изразите за големината на магнитната индукция на точков магнитен заряд с израза за магнитната индукция на малък участък с дължина dl от проводник, по който тече ток I :

$$B = \frac{\mu_0 g}{4\pi r^2} \text{ (точков заряд)} \quad \text{и} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2} \text{ (токов елемент)}. \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук следва, че:

$$[g] = \text{A.m} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$, следва, че единицата за магнитен заряд в SI е:

$$[g] = \text{C.m/s}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) Като използваме теоремата на Гаус за полето в "магнитния кондензатор", получаваме за магнитната индукция в кондензатора:

$$(1) \quad B = \mu_0 \gamma, \quad [1 \text{ т}]$$

където $\gamma = g/S$ е повърхнинната плътност на магнитния заряд върху положителната плоча. От втория принцип на Нютон:

$$(2) \quad \frac{mv^2}{R} = evB \quad [0,25 \text{ т}]$$

намираме радиуса на орбитата на електрона:

$$(3) \quad R = \frac{mv}{eB} = \frac{mv}{\mu_0 e \gamma}. \quad [0,25 \text{ т}]$$

От условието за квантуване на Бор за момента на импулса на електрона е изпълнено:

$$(4) \quad mvR = \frac{nh}{2\pi} \quad [1 \text{ т}]$$

От уравнения (3) и (4) следва:

$$(5) \quad \mu_0 e \gamma R^2 = \frac{nh}{2\pi}.$$

Площта на електронната орбита е $S = \pi R^2$, а общият заряд, който се съдържа в тази площ, е:

$$(6) \quad g = \gamma \pi R^2. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като използваме уравнение (5), получаваме:

$$(7) \quad g = n \frac{h}{2\mu_0 e} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Следователно пълният заряд е кратен на елементарен магнитен заряд:

$$(8) \quad g_e = \frac{h}{2\mu_0 e}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като заместим с числените стойности на константите в системата SI, пресмятаме:

$$(9) \quad g_e = \frac{6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}}{2,4 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 1,65 \cdot 10^{-9} \text{ C.m/s}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

в) **1 вариант:** Когато зарядът е в точка с координата z , пръстенът огражда пространствен ъгъл с връх в заряда и с големина (вж. фиг. 2.1):

$$(10) \quad \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Магнитният поток, който преминава през пръстена е:

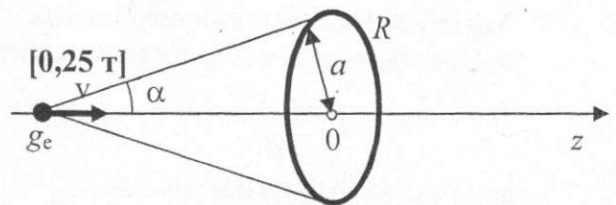
$$(11) \quad \Phi(z) = \frac{\mu_0 g \Omega}{4\pi} = \frac{\mu_0 g}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Според закона на Фарадей, индуцираното ЕДН в пръстена е:

$$(12) \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} v, \quad [0,5 \text{ т}]$$

като сме отчели, че $v = dz/dt$. Като използваме уравнение (11) намираме:

$$(13) \quad \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 g a^2 v}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad [1 \text{ т}]$$



[0,25 т]

Фиг. 2.1

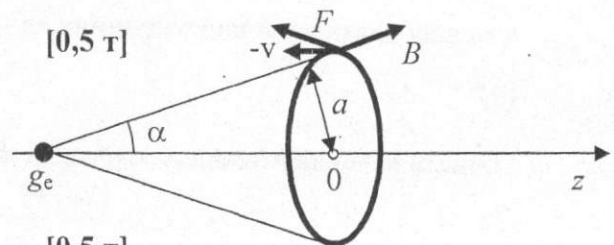
2 вариант: Преминаваме към отправна система свързана с частицата. В тази система пръстенът се приближава към частицата със скорост $-v$.

Всяка точка от пръстена се намира в магнитно поле с индукция:

$$(14) \quad B = \frac{\mu_0 g}{4\pi(z^2 + a^2)},$$

наклонена под ъгъл α спрямо оста z .
На свободен заряд с големина q от пръстена действа сила:

$$(15) \quad F = qvB \sin \alpha = \frac{\mu_0 g q a v}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}}$$



[0,5 т]

Фиг. 2.2

При обход на пръстена в положително направление (по правилото на дясната ръка спрямо оста z) тази сила извършва работа:

$$(16) \quad A = -2\pi a F$$

и, следователно, води до индуциране на ЕДН:

$$(17) \quad \mathcal{E} = \frac{A}{q} = -\frac{\mu_0 g a^2 v}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad [1 \text{ т}]$$

Енергията, която се отделя в пръстена за време dt е

$$(18) \quad dQ = \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{vR} dz, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където dz е преместването на частицата за същия интервал от време. Общото количество топлина е:

$$(19) \quad Q = \frac{\mu_0^2 g^2 a^4 v}{4R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi \mu_0^2 g^2 v}{32aR} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид израза за елементарния магнитен заряд, получаваме:

$$(20) \quad Q = \frac{3\pi h^2 v}{128e^2 a R} \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 3. Икономично отопление

а) През бетона за единица време се пренася топлина:

$$(1) \quad P_6 = k_1 \frac{ab - c^2}{d_1} (T_1 - T_2) \quad [0,5 \text{ т}]$$

а през стъклото на прозореца:

$$(2) \quad P_n = k_2 \frac{c^2}{d_2} (T_1 - T_2) \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно, необходимата мощност на наглевателя е:

$$(3) \quad P = \left(k_1 \frac{ab - c^2}{d_1} + k_2 \frac{c^2}{d_2} \right) (T_1 - T_2) = 19,7 \text{ kW}. \quad [1 \text{ т}]$$

б) През бетона преминава същото количество топлина, като това, определено в (1). През двете стъкла и слоя въздух между тях преминава за единица време едно и също количество топлина P' . Следователно разликата в температурите между двете повърхности на всяко от съклата е:

$$(4) \quad \Delta T_c = \frac{d_2 P'}{k_2 c^2}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

а между двата края на въздушния слой:

$$(5) \quad \Delta T_e = \frac{d_3 P'}{k_3 c^2}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Общата разлика в температурите между стаята и външния въздух, следователно е:

$$(6) \quad T_1 - T_2 = 2\Delta T_c + \Delta T_e = \frac{(2d_2 / k_2 + d_3 / k_3) P'}{c^2} \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук намираме:

$$(7) \quad P' = \frac{c^2 (T_1 - T_2)}{(2d_2 / k_2 + d_3 / k_3)} \quad [1 \text{ т}]$$

Новата мощност на нагревателя е равна на пълното количество топлина, което преминава през стената за единица време:

$$(8) \quad P_1 = P_6 + \frac{c^2 (T_1 - T_2)}{(2d_2 / k_2 + d_3 / k_3)} = 921 \text{ W}. \quad [1 \text{ т}]$$

в) Нека за време t работното вещество получава количество топлина Q_2 от външния въздух, а двигателят на помпата извършва работа $A = P_2 t$ за свиване на веществото. Тогава количеството топлина Q_1 , което работното вещество отдава на въздуха в стаята е:

$$(9) \quad Q_1 = Q_2 + P_2 t. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже помпата работи по цикъла на Карно, е изпълнено:

$$(10) \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Оттук намираме връзката:

$$(11) \quad P_2 t = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} Q_1 \quad [0,5 \text{ т}]$$

За да се поддържа постоянна температура в стаята, е нужно количеството топлина, което въздухът в стаята получава, да е равно на количеството топлина, което преминава за същото време през външната стена (в случай на двоен прозорец):

$$(12) \quad Q_1 = P_1 t. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно, мощността, която термопомпата консумира е:

$$(13) \quad P_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} P_1 = 63 \text{ W}. \quad [1 \text{ т}]$$

От формули (1) и (8) следва, че консумираната мощност P_1 при директно отопление с електрически нагревател е пропорционална на разликата $(T_1 - T_2)$ между вътрешната и външната температури. Следователно, когато външната температура се повиши до 10°C , консумираната мощност от нагревателя намалява 2 пъти. [0,5 т]

От резултата (13) следва, че при зададена температура на въздуха в стаята, консумираната мощност P_2 от термопомпата е пропорционална $(T_1 - T_2)P_1$ т.е. на $(T_1 - T_2)^2$. Следователно, когато външната температура се повиши до 10°C , консумираната от термопомпата мощност намалява 4 пъти. [0,5 т]