

Министерство на образованието и науката
Национално пролетно състезание по физика
Шумен, 11.03 – 13.03, 2005 г.
СПЕЦИАЛНА ТЕМА

Задача 1. Отскачане на камък от водна повърхност

Всекидневният опит ни учи, че за да отскочи камък от гладка водна повърхност, е необходимо скоростта му преди удара да бъде достатъчно голяма и да сключва достатъчно малък ъгъл с повърхността. В тази задача ще изследвате прост модел за удар на твърдо тяло във водна повърхност, който позволява да определите максималният ъгъл и минималната скорост, необходими за отскачане на камъка. Основните предположения, които можете да използвате са:

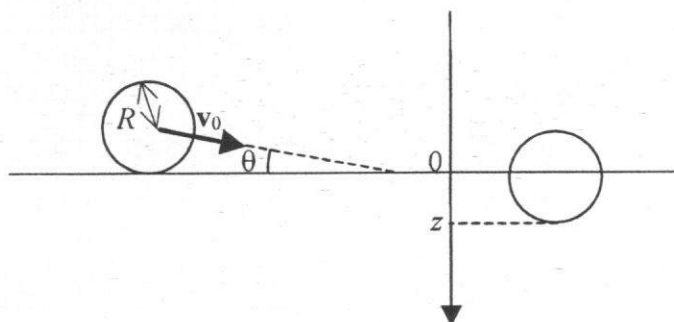
- 1) Водната повърхност около камъка остава плоска и хоризонтална по време на целия удар (вж. фиг. 1);
- 2) По време на удара водата оказва постоянно налягане p , еднакво във всички точки от повърхността на камъка, които са потопени под водата:

$$p = C\rho v_0^2,$$

където $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ е плътността на водата, v_0 – скоростта на камъка, в момента, когато той достига водната повърхност, а $C = 0,2$ е безразмерен коефициент на пропорционалност. Хидростатичното налягане на водата се пренебрегва.

Разгледайте сферичен камък с маса $m = 0,01 \text{ kg}$ и радиус $R = 0,01 \text{ m}$, който достига водата със скорост v_0 , насочена под ъгъл θ спрямо нейната повърхност (вж. фиг. 1). Дълбочината на потапяне на камъка се задава с координатата z ($z \in [0, 2R]$). Ускорението на свободно падане е $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

- а) Изразете z -компонентата на резултантната сила $\vec{F}$, приложена върху камъка като функция на координатата z , на параметрите C, ρ, m, R, v_0 , и на земното ускорение g . [2,0 т]
- б) Камъкът пада под фиксиран ъгъл θ спрямо водната повърхност. Получете израз за началната скорост v_0 , при която по време на удара камъкът се потапя на определена максимална дълбочина z_{max} . Изразете отговора чрез C, ρ, m, R, g, θ и z_{max} . [3,0 т]
- в) Намерете най-големия ъгъл θ_{max} , при който камъкът може да отскочи от водата. Изразете отговора чрез C, ρ, m, R и g , и пресметнете неговата числена стойност. [2,0 т]
- г) Пресметнете най-малката начална скорост v_{min} , при която камъкът може да отскочи от водата в случай на хлъзгащо падане ($\theta \approx 0$). Изразете отговора чрез C, ρ, m, R и g , и пресметнете неговата числена стойност. [3,0 т]



Фиг. 1

Задача 2. Образуване на облаци

Съдържанието на водни пари във въздуха може да бъде характеризирано с няколко параметъра: абсолютна влажност ρ , относителна влажност η и относителна моларна концентрация x .

Абсолютната влажност е равна на плътността на водните пари във въздуха: $\rho = \frac{m_v}{V}$, където m_v е масата на парите, които се съдържат във въздух с обем V . Относителната влажност е безразмерно

число, което се изменя в интервала $[0,1]$ (или $[0\%, 100\%]$) и се дефинира като: $\eta = \frac{P_v}{P_s}$, където P_v е парциалното налягане на парите във въздуха, а $P_s(T)$ – налягането на наситените водни пари при температура T . Относителната моларна концентрация също е безразмерна величина ($x = [0,1]$ или $x = [0\%, 100\%]$) и се дава със съотношението: $x = \frac{n_v}{n}$, където n_v е броят молекули на водните пари, които се съдържат в n мола въздух.

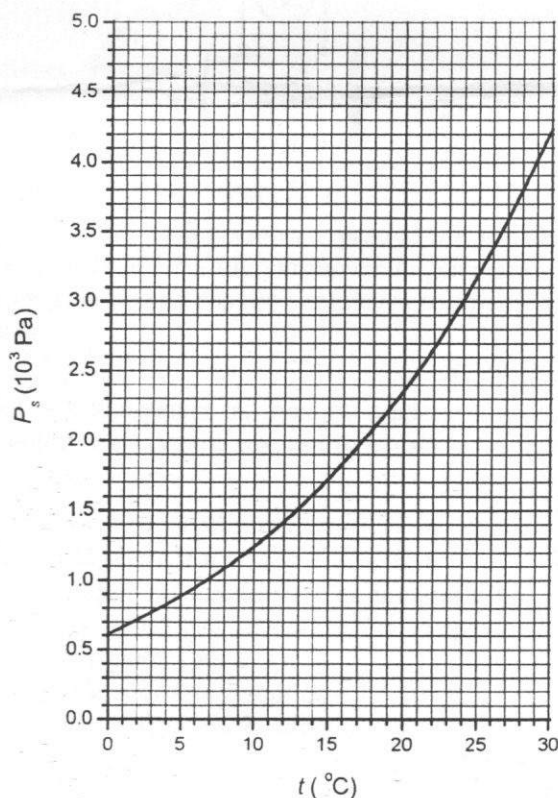
На фиг. 2, а е дадена графика на зависимостта на налягането на наситените водни пари P_s като функция на температурата в интервала $t = [0^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}]$. Когато при дадена температура парциалното налягане на водните пари във въздуха достигне P_s , т. е. $\eta = 100\%$, започва кондензация на парите и образуване на облаци или мъгла.

А) Пресметнете абсолютната влажност ρ и относителната моларна концентрация x на водните пари във въздуха при температура $t_0 = 27^\circ\text{C}$, нормално атмосферно налягане $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ и относителна влажност $\eta = 50\%$. [3,0 т]

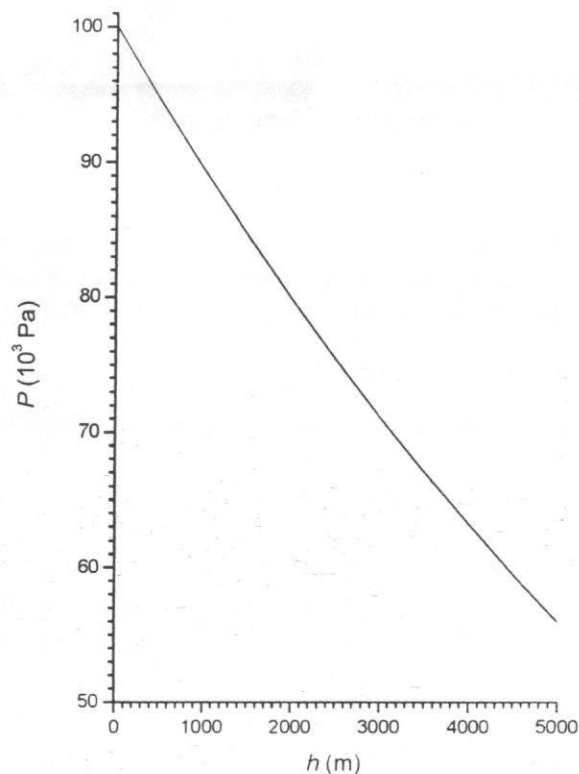
Б) Въздушно течение с температура, налягане и влажност на морското ниво, като зададените в т. А), се издига по висок планински склон. На фиг. 2, б е показана графика на атмосферното налягане P като функция на надморската височина h .

а) Получете зависимост между парциалното налягане P_v на водните пари и температурата T на въздуха при неговото издигане. [2,0 т]

б) На каква надморска височина по склона ще започнат да се образуват облаци? Каква ще бъде температурата на тази височина? [5,0 т]



Фиг. 2, а



Фиг. 2, б

Можете да приемете, че:

- издигането на въздуха е адиабатен процес;
- относителната моларна концентрация на водните пари не се променя при издигането;
- показателят на адиабатата на въздуха е $\gamma = 7/5$, независимо от влажността му.

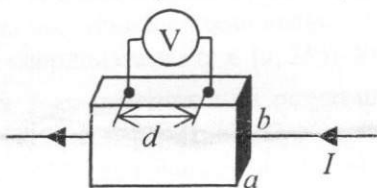
При числените пресмятания можете да използвате приблизителното равенство: $(1+x)^n \approx 1+nx$ при $|x| \ll 1$. Ако решението налага, можете да правите графични построения върху фиг. 2, а и фиг. 2, б. **В този случай не забравяйте да поставите страница 2 от условията в плика заедно с решенията!**

Полезни данни: моларна маса на водата $M = 0,018 \text{ kg/mol}$;
универсална газова константа $R = 8,314 \text{ J/(mol.K)}$.

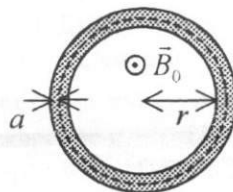
Задача 3. Свръхпроводящ ли е свръхпроводникът?

През 1911 г. холандският физик Камерлинг Онес открива, че при критична температура $T_c = 4,1 \text{ K}$ съпротивлението на живака рязко намалява и става практически равно на нула. Тъй като измерването на съпротивлението е свързано с определена грешка, опитът може да даде единствено **горна граница** за специфичното съпротивление на свръхпроводящия материал. В тази задача ще разгледате два експеримента, чрез които може да бъде получена подобна оценка.

А) Образец от свръхпроводящ материал има формата на паралелепипед с напречни размери $a = 2 \text{ }\mu\text{m}$ и $b = 5 \text{ }\mu\text{m}$ (вж. фиг. 3, а). Двата края на образца са свързани към източник, който поддържа постоянен ток $I = 0,1 \text{ A}$ през образца. Волтметър с вътрешно съпротивление $R_V = 10\,000 \text{ }\Omega$ е свързан към два електрода, разположени по дължината на образца на разстояние $d = 1 \text{ cm}$ един от друг. При охлаждане на образца до температура по-ниска от T_c , волтметърът отчита нулево напрежение между електродите. Получете израз и пресметнете числено горната граница на специфичното съпротивление ρ на свръхпроводника, ако е известно, че минималното напрежение, при което волтметърът отчита ненулева стойност, е $U_{\min} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ V}$. [2 т]



Фиг. 3, а



Фиг. 3, б

Б) От тънка жичка с радиус a е изработен затворен пръстен с радиус r ($r \gg a$), който има съпротивление R и индуктивност L . Жичката е поставена във външно магнитно поле с индукция B_0 , перпендикулярна спрямо равнината на пръстена (фиг. 3, б). Магнитното поле започва да намалява по закона:

$$B(t) = B_0(1 - t/t_0),$$

докато стане равно на нула (t_0 е времето за пълното изключване на магнитното поле). При това в жичката се индуцира ток, който нараства по закона:

$$I(t) = A(1 - e^{-\lambda t}),$$

където A и λ са константи.

- Изразете A и λ чрез R , L , r , B_0 и t_0 . [3,5 т]
- Намерете големината на индуцирания ток I_0 в момента, когато магнитното поле става равно на нула, ако приемете, че съпротивлението на жичката е пренебрежимо малко. Изразете отговора чрез L , r и B_0 . [1,0 т]
- Пресметнете I_0 при $B_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ T}$, $a = 0,50 \text{ mm}$ и $r = 1,0 \text{ cm}$. Известно е, че индуктивността на тънка кръгова намотка се дава с изрази:

$$L = \mu_0 r \left[\ln\left(\frac{r}{a}\right) + 0,23 \right],$$

където $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ е магнитната константа. [0,5 т]

В) Оказва се, че след изключване на магнитното поле големината на тока в пръстена намалява с по-малко от 1% в продължение на 1 час. Като използвате числените данни от т. Б), намерете горна граница за специфичното съпротивление на свръхпроводящия материал. [3,0 т]

Упътване: При $|x| \ll 1$ можете да използвате приблизителното равенство:

$$e^x \approx 1 + x$$

Министерство на образованието и науката
Национално състезание по физика, Шумен, 11.03 – 13.03 2005 г.
Примерни решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Отскачане на камък от водна повърхност

а) Равнодействащата сила е равна на векторната сума:

$$\hat{F} = m\hat{g} + \hat{N},$$

където $m\hat{g}$ е силата на тежестта, а $\hat{N}$ – силата на реакция, с която водата действа на камъка. Понеже налягането на водата е разпределено равномерно върху потопената повърхност на камъка, силата на реакция е насочена вертикално нагоре и големината ѝ е:

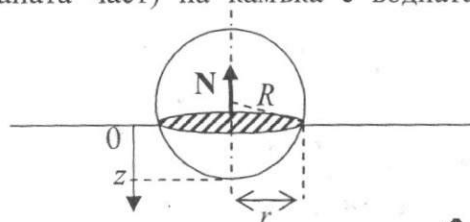
$$N = pS_{\perp} = C\rho v_0^2 S_{\perp}. \quad [1 \text{ т}]$$

където $S_{\perp}$ е площта на напречното сечение (защрихованата част) на камъка с водната повърхност. Като вземем предвид, че:

$$S_{\perp} = \pi r^2 = R^2 - (R - z)^2,$$

намираме окончателно:

$$F_z = mg - R = mg - \pi C\rho v_0^2 (2Rz - z^2). \quad [1 \text{ т}]$$



б) Хоризонталната компонента v_x на скоростта на камъка не се променя, защото силата $\hat{F}$ е насочена вертикално:

$$v_x = v_0 \cos \theta = \text{const}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

В момента на максимално потапяне ($z = z_{\max}$):

$$v_y = 0. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Промяната на кинетичната енергия на камъка, следователно, е:

$$\Delta K = \frac{m(v_0 \cos \theta)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2} \sin^2 \theta.$$

От друга страна:

$$\Delta K = W = \int_0^{z_{\max}} F_z dz, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където W е работата, която извършва силата F при потапяне на камъка. След като извършим интегрирането, получаваме:

$$\frac{mv_0^2}{2} \sin^2 \theta = \pi C\rho v_0^2 \left(Rz_{\max}^2 - \frac{z_{\max}^3}{3} \right) - mgz_{\max}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

След като решим уравнението спрямо v_0 , намираме:

$$v_0 = \frac{\sqrt{6mgz_{\max}}}{\sqrt{2\pi C\rho(3R - z_{\max})z_{\max}^2 - 3m \sin^2 \theta}}. \quad [1 \text{ т}]$$

в) При зададена дълбочина $z_{\max}$ камъкът може да отскочи, ако изразът под квадратния корен в знаменателя, е положителен. Следователно:

$$\theta \leq \arcsin \left[\sqrt{\frac{2\pi C\rho(3R - z_{\max})z_{\max}^2}{3m}} \right]. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Изразът под корена нараства монотонно с увеличаване на $z_{\max}$. Следователно максималният ъгъл на падане съответства на дълбочина на потапяне: $z_{\max} = 2R$:

$$\theta_{\max} = \arcsin \left[\sqrt{\frac{8\pi C_p R^3}{3m}} \right]. \quad [1 \text{ т}]$$

След заместване с числените стойности намираме:

$$\theta_{\max} \approx \arcsin(0.409) \approx 24^\circ. \quad [0,5 \text{ т}]$$

г) От уравнението за изменението на кинетичната енергия, при $\theta = 0$, получаваме:

$$0 = \pi C_p v_0^2 \left(R z_{\max}^2 - \frac{z_{\max}^3}{3} \right) - m g z_{\max}$$

или

$$z_{\max}^2 - 3R z_{\max} + \frac{3mg}{\pi C_p v_0^2} = 0. \quad [1 \text{ т}]$$

Уравнението има два корена, като максималната дълбочина на потапяне се определя от по-малкия корен:

$$z_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ 3R - \sqrt{9R^2 - \frac{12mg}{\pi C_p v_0^2}} \right\}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

За да може камъкът да отскочи, е необходимо уравнението да има реално решение за $z_{\max}$. Следователно дискриминантата на уравнението трябва да е положителна:

$$9R^2 - \frac{12mg}{\pi C_p v_0^2} \geq 0,$$

откъдето окончателно намираме:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{4mg}{3\pi C_p R^2}}. \quad [1 \text{ т}]$$

След заместване с числените стойности пресмятаме:

$$v_{\min} \approx 1,44 \text{ m/s}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Задача 2. Образуване на облаци

А) От графиката определяме, че при $t_0 = 27^\circ\text{C}$ ($T_0 = 300 \text{ K}$), налягането на наситените водни пари е:

$$P_s = 3,6 \cdot 10^3 \text{ Pa}. \quad [0,2 \text{ т}]$$

От дефиницията на относителна влажност следва, че парциалното налягане на водните пари във въздуха е:

$$P_v = \eta P_s = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Pa}. \quad [0,2 \text{ т}]$$

За определен обем V въздух, от закона на Клапейрон-Менделеев следва:

$$P_v V = n_v R T_0, \quad [0,2 \text{ т}]$$

където n_v е броят молове водни пари, които се съдържат в обема. Понеже масата на водните пари в избрания обем, е

$$m_v = n_v M,$$

получаваме:

$$m_v = \frac{P_v M V}{R T_0} \quad [0,2 \text{ т}]$$

и намираме абсолютната влажност на въздуха:

$$\rho = \frac{P_v M}{R T_0} \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$\rho = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Според закона на Далтон, налягането P_0 на въздуха в дадения обем V се определя от общия брой молове n в обема:

$$P_0 V = n R T_0. \quad [0,2 \text{ т}]$$

Следователно, относителната моларна концентрация на водните пари е:

$$x = \frac{n_v}{n} = \frac{P_v}{P_0} \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$x = 1,8 \cdot 10^{-2} = 1,8 \%. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Б) Разглеждаме обем въздух V_0 на морското ниво, където неговото налягане е P_0 , а абсолютната му температура – T_0 . На дадена височина h , където атмосферното налягане е P , същото количество въздух заема обем V , такъв че:

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже $V \sim T/P$, където T е температурата на въздуха на същата височина, намираме:

$$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \frac{T_0^\gamma}{P_0^{\gamma-1}}$$

или

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{7}{2}}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже относителната моларна концентрация на парите не се променя при издигане на въздуха, за парциалното налягане на водните пари при температура T получаваме:

$$(1) \quad P_v = xP = xP_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{7}{2}}. \quad [1,0 \text{ т}]$$

В) Облаци започват да се образуват, когато въздухът се охлади до температура T , такава, че:

$$P_v(T) = P_s(T).$$

За да определим температурата на въздуха, при която парите кондензират, преобразуваме зависимостта (1) в зависимост от Целзиевата температура t :

$$P_v = 1,8 \cdot 10^3 \left(\frac{t + 273}{300} \right)^{3,5} \text{ Pa}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Ако разгледаме относителното изменение на температурата $(t - 27)/300$ като малка величина, получаваме приблизително:

$$P_v \approx 1,8 \cdot 10^3 \left(1 + 3,5 \frac{(t - 27)}{300} \right) \text{ Pa}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Построяваме графика на тази функция на фиг. 2, а, и по пресечната ѝ точка с графиката на зависимостта $P_s(t)$ намираме температурата на кондензация:

$$t \approx 13^\circ \text{C} \quad [1,0 \text{ т}]$$

и съответното парциално налягане на водните пари:

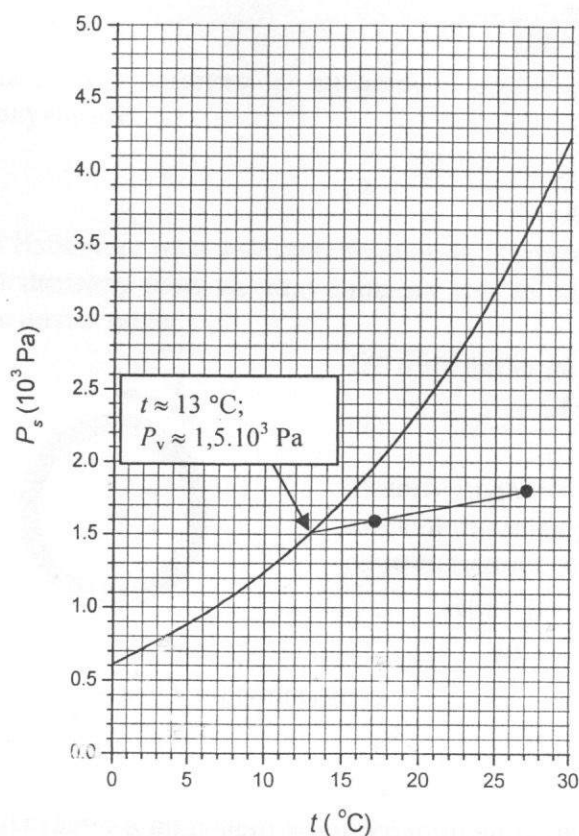
$$P_v \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Атмосферното налягане съответно е:

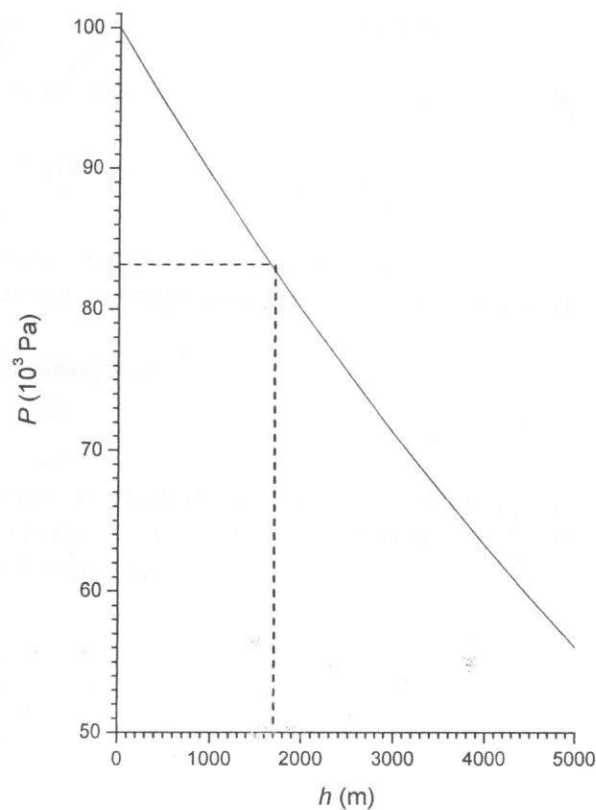
$$P = \frac{P_v}{x} \approx 83 \cdot 10^3 \text{ Pa}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

От фиг. 2, б намираме височината, на която атмосферното налягане има тази стойност, т. е. височината, на която парите кондензират и се образуват облаци:

$$h \approx 1700 \text{ m}. \quad [0,5 \text{ т}]$$



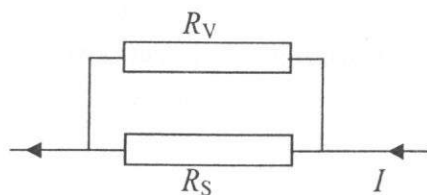
Фиг. 2, а



Фиг. 2, б

Задача 3. Свръхпроводящ ли е свръхпроводникът?

А) Даденият тип свързване е еквивалентен на следната схема:



[0,2 т]

където:

$$R_s = \frac{\rho d}{ab}$$

[0,2 т]

е съпротивлението на слоя свръхпроводящо вещество между двата електрода. Следователно, при зададен ток I напрежението между електродите е:

$$U = \frac{R_s R_v}{R_s + R_v} I.$$

[0,2 т]

Понеже $U < U_{\min}$, получаваме

$$\frac{R_s R_v}{R_s + R_v} I < U_{\min}$$

[0,2 т]

или

$$R_s < \frac{U_{\min} R_v}{IR_v - U_{\min}}.$$

[0,2 т]

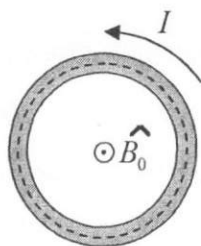
От последното неравенство намираме:

$$\rho < \frac{U_{\min} R_V ab}{(IR_V - U_{\min})d}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

След като заметим с числените стойности, и като вземем предвид, че $U_{\min} \ll IR_V$, получаваме:

$$\rho < \frac{1,0 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{0,1 \text{ A} \cdot 0,01 \text{ m}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \Omega \cdot \text{m}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Б) Избираме положителна посока на индуцирания ток, съобразена с правилото на Ленц, т. е. магнитното поле на индуцирания ток се стреми да компенсира намаляването на външното магнитно поле:



От II правило на Кирхов намираме:

$$(1) \quad RI = -\frac{d(\pi r^2 B)}{dt} - L \frac{dI}{dt}, \quad [1 \text{ т}]$$

където първото събираемо в дясната част е ЕДН, индуцирано поради промяна на външното магнитно поле, а второто – ЕДН на самоиндукция. Като вземем предвид, че:

$$\frac{d(\pi r^2 B)}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{B_0}{t_0} \quad [0,5 \text{ т}]$$

и заместим в (1), получаваме:

$$(2) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = \frac{\pi r^2 B_0}{t_0} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Заместваме в полученото диференциално уравнение израза за тока $I(t)$, зададен в условието, и получаваме следното равенство:

$$(3) \quad (\lambda L - R) A e^{-\lambda t} + AR = \frac{\pi r^2 B_0}{t_0}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже изразът в дясната страна не зависи от времето, за коефициента λ е изпълнено:

$$(4) \quad \lambda = \frac{R}{L}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

От друга страна, за да бъде изпълнено равенството (3), е необходимо:

$$(5) \quad A = \frac{\pi r^2 B_0}{R t_0}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

В момента на изключване на магнитното поле ($t = t_0$) големината на тока през намотката е:

$$(6) \quad I_0 = \frac{\pi r^2 B_0}{R t_0} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t_0} \right). \quad [0,5 \text{ т}]$$

Ако съпротивлението на намотката е много малко, изразът в скобите е приблизително:

$$1 - e^{-\frac{R}{L} t_0} \approx \frac{R t_0}{L},$$

и след като заместим в (6) намираме:

$$(7) \quad I_0 = \frac{\pi r^2 B_0}{L}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

При зададения размер на жичката, намираме, че индуктивността на намотката е:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot (\ln(20) + 0,23) \approx 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ H},$$

откъдето пресмятаме тока I_0 :

$$I_0 = 7,7 \text{ A}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

В) След изключване на магнитното поле, ЕДН в намотката се дължи единствено на самоиндукция и промяната на тока се описва с уравнението:

$$(8) \quad RI = -L \frac{dI}{dt}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно, токът намалява по експоненциален закон:

$$(9) \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже относителното изменение на тока е малко, можем да запишем:

$$e^{-\frac{R}{L}t} \approx 1 - \frac{R}{L}t,$$

откъдето получаваме:

$$(10) \quad \frac{RI_0 t}{L} \approx I_0 - I. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Тъй като $I_0 - I < 0,01I$, следва, че:

$$(11) \quad \frac{Rt}{L} < 0,01. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $R = \frac{\rho(2\pi r)}{\pi a^2} = \frac{2\rho r}{a^2}$, за горната граница на ρ получаваме:

$$(12) \quad \rho < \frac{0,005La^2}{rt}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

При $L = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ Н}$ и $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, намираме:

$$\rho < 1,4 \cdot 10^{-18} \Omega \cdot \text{m} \quad [0,5 \text{ т}]$$