

**Решения на задачите от
Националното пролетно състезание по физика,
Велико Търново, март, 2004 г.**

Специална тема

Задача 1. а) Нека отместването на тялото в даден момент е $x(t)$, а на точката на окачване – $x_O(t)$,
Тогава удължение то на пружината в дадения момент е:

$$l(t) = x_O(t) - x(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

От закона на Хук силата, която действа на тялото е:

$$F_x = k \cdot l(t) = k x_O(t) - k x(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

От 2. принцип на Нютон:

$$(1.1) \quad m a_x(t) = -k x(t) + k x_O(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

При хармонично трептене:

$$(1.2) \quad a_x(t) = -\omega^2 x(t) = -4 \pi^2 \nu^2 x(t), \quad [0,5 \text{ т}]$$

където ν е честотата на принуденото трептене. Освен това:

$$(1.3) \quad k = 4 \pi^2 m \nu_0^2, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където ν_0 е честотата на свободното трептене. От уравнения (1.1) – (1.3) намираме:

$$(1.4) \quad x(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} x_O(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

Оттук следва, че максималното отклонение (амплитудата) на тялото е:

$$(1.5) \quad A = \left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right| A_O. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) От уравнение (1.4) следва, че когато $\omega < \omega_0$, знаменателят е положителен и:

$$x(t) = A \sin(2 \pi \nu t),$$

т.е. $\varphi = 0$. [0,5 т]

Когато $\omega > \omega_0$, знаменателят в уравнение (1.4) е отрицателен и следователно:

$$x(t) = -A \sin(2 \pi \nu t) = A \sin(2 \pi \nu t + \pi).$$

В този случай фазовото отместване между трептенията на тялото и на точката на окачване е

$$\varphi = \pi. \quad [0,5 \text{ т}]$$

в) Според уравнение (1.5) условието $A > 2A_O$ е еквивалентно на следните две неравенства:

$$\left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right| > 2 \quad \text{или} \quad \left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right| > 2. \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук намираме:

$$\omega_0 / \sqrt{2} < \omega < \omega_0 \sqrt{3/2}$$

или $7,07 \text{ Hz} < \nu < 12,25 \text{ Hz}$. [0,5 т]

г) Записваме втория принцип на Нютон при като отчитаме силата на триене:

$$m a_x(t) = -k x(t) + k x_O(t) - r v. \quad [0,5 \text{ т}]$$

При принудено трептене с честота ν_0 е в сила съотношението:

$$m a_x = -m(2 \pi \nu_0)^2 x = -k x, \quad [0,5 \text{ т}]$$

което ни помага да определим закона за скоростта:

$$v(t) = \frac{k x_O(t)}{r} - \frac{m(2 \pi \nu_0)^2 A_O \sin(2 \pi \nu_0 t)}{r}. \quad [1 \text{ т}]$$

От закона за скоростта намираме закона за движение:

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{2 \pi \nu_0 m A_O}{r} \cos(2 \pi \nu_0 t) - \frac{2 \pi \nu_0 m A_O}{r} \sin 2 \pi \nu_0 t + \frac{1}{2}. \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук следва, че при резонанс амплитудата на трептене на топчето е:

Задача 2. а) За време t компресорът извършва работа:

$$A = Pt, \quad [0,5 \text{ т}]$$

а работното вещество отнема от камерата количество топлина:

$$Q_0 = m \cdot c_p \cdot (T_1 - T_0), \quad [0,5 \text{ т}]$$

Хладилникът отдава на околната среда количество топлина:

$$Q_1 = Q_0 + A = m \cdot c_p \cdot (T_1 - T_0) + Pt, \quad [0,5 \text{ т}]$$

От условието за равенство на приве дените топлини:

$$(2.1) \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} \quad [1 \text{ т}]$$

намираме:

$$t = \frac{m(T_1 - T_0)}{PT_0} \quad [1 \text{ т}]$$

или

$$t = \frac{3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 20 \text{ K}}{80 \text{ W} \cdot 273 \text{ K}} = 300 \text{ s} = 5 \text{ min}. \quad [1 \text{ т}]$$

б) От уравнение (2.1) намираме, че въздухът в състоята получава количество топлина:

$$(2.2) \quad Q_1 = mT_1. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Обемът на въздуха не се променя при неговото нагряване. Следователно:

$$(2.3) \quad Q_1 = nC_V T. \quad [1 \text{ т}]$$

Броя молекул определяме от уравнението на Клапейрон–Менделеев:

$$(2.4) \quad n = \frac{p_0 V}{RT_1}. \quad [1 \text{ т}]$$

За идеален двуатомен газ:

$$(2.5) \quad C_V = \frac{5}{2} R. \quad [1 \text{ т}]$$

От уравнения (2.2) – (2.5) намираме:

$$T = \frac{2 m T_1^2}{5 p_a V T_0} \quad [1 \text{ т}]$$

или

$$T = \frac{2 \cdot 3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (293 \text{ K})^2}{5 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 100 \text{ m}^3 \cdot 273 \text{ K}} = 4,2 \text{ K}. \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 3. а) От условието на Бор следва:

$$2 \pi r = n \frac{h}{p}. \quad [1 \text{ т}]$$

При движение с релативистки скорости:

$$(1.1) \quad p = \frac{mV}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad [1 \text{ т}]$$

откъдето следва:

$$(1.2) \quad \frac{mv^2}{r\sqrt{1 - v/c^2}} = \frac{k(Ze)e}{r^2} \quad [0,5 \text{ т}]$$

От уравнения (1.1) и (1.2) получаваме:

$$(1.3) \quad \frac{v}{c} = \frac{2}{n} \frac{kZe^2}{hc}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) За водородния атом $Z = 1$. От уравнение (1.3) намираме при $n = 1$:

$$(1.4) \quad \frac{v}{c} = \frac{2}{n} \frac{ke^2}{hc} = 7,2969 \cdot 10^{-3}. \quad [1 \text{ т}]$$

в) Понеже $v/c < 1$ от уравнения (1.3) и (1.4) получавам е:

$$\frac{2}{n} \frac{kZe^2}{hc} = \frac{Z}{n} \quad 1. \quad [0,5 \text{ т}]$$

За да съществува орбита с $n = 1$ е необходимо:

$$Z \geq \frac{1}{137,04} \quad [0,5 \text{ т}]$$

или $Z_{\max} = 137$.

[0,5 т]

г) Кинетичната енергия на електрона е:

$E_k = (\text{пълна релативистка енергия}) - (\text{енергия в покой})$

$$\text{или} \quad E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Z^2/n^2}} - 1 \right). \quad [1 \text{ т}]$$

Потенциалната енергия на електрона е:

$$E_p = \frac{kZe^2}{r} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - Z^2/n^2}} \frac{Z}{n^2}. \quad [1 \text{ т}]$$

След алгебрични преобразования получаваме:

$$E = E_k + E_p = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Z^2/n^2}} - 1 \right). \quad [1 \text{ т}]$$

д) Тъй като $Z_{\max} = 1/137$, при $n = 1$ имаме: $E = -m_0 c^2$.

[0,5 т]

За да може фотонът да избие електрон от атома е необходимо:

$$\frac{hc}{\lambda} \geq |E| \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$\text{или} \quad \lambda_{\min} = \frac{hc}{m_0 c^2} = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ nm}. \quad [0,5 \text{ т}]$$