

Национално пролетно състезание по физика
Велико Търново, 13 – 14 март 2004 г
Специална тема

Задача 1. Собствената честота на пружинно махало е $\nu_0 = 10$ Hz при маса на окаченото топче $m = 0,10$ kg. Под действие на периодична външна сила точката на окачване O на махалото започва да трепти хармонично в хоризонтално направление по закона:

$$x_O = A_O \sin(2\pi \nu t),$$

където x_O е отклонението на точката на окачване спрямо равновесното ѝ положение, $A_O = 1$ cm е амплитудата ѝ на трептене, а честотата ν може да се регулира. След достатъчно дълго време топчето започва да трепти принудено със същата честота ν като тази на външната сила. Като начало ще разгледаме случая, когато $\nu \neq \nu_0$ и ще пренебрегнем силите на триене и съпротивление.

а) Изразете амплитудата A на принуденото трептене на топчето чрез A_O , ν и ν_0 . [3,5 т]

б) Намерете фазовата разлика $\Delta\phi$ между трептенето на топчето и трептенето на точката на окачване в два случая: $\nu < \nu_0$ и $\nu > \nu_0$. [1 т]

в) В какъв интервал от стойности трябва да лежи честотата на външната сила така, че $A > 2A_0$? [1,5 т]

г) Когато $\nu = \nu_0$, амплитудата на трептене на топчето става толкова голяма, че силите на съпротивление оказват съществено влияние върху неговото движение. Приемете, че върху топчето действа сила на съпротивление, пропорционална на скоростта: $\vec{f} = -r\vec{v}$, където $r = 0,5$ kg/s е коефициент на пропорционалност. Намерете в този случай амплитудата на трептене на топчето и фазовата разлика между трептенето на топчето и трептенето на точката на окачване? [4 т]



➤ **Задача 2.** В камерата на хладилник, който работи по цикъла на Карно, е поставен съд с $m = 1$ kg вода с температура $t_0 = 0$ °C. Хладилникът консумира постоянна мощност $P = 80$ W от електрическата мрежа, която се трансформира изцяло в механична работа, необходима за протичане на работния цикъл на хладилника. Хладилникът е поставен в стая с обем $V = 100$ m³, с начална температура на въздуха $t_1 = 20$ °C и начално налягане $p_a = 1,0 \cdot 10^5$ Pa.

➤ а) Колко време след включване на хладилника водата в камерата ще замръзне? [4,5 т]

➤ б) С колко ще се повиши температурата на въздуха в стаята, докато водата замръзне? [1,5 т]

Топлината на топенето на лед е $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ J/kg. Саята е термически изолірана и херметично затворена, т.е. не обменя въздух с околната среда. Разгледайте въздуха като идеален двуатомен газ. Приемете, че относителното изменение на абсолютната температура в стаята е много малко.

Задача 3. Съгласно с модела на Бор електронът във водородния атом може да обикаля около ядрото по т. нар. стационарни орбити, които се определят от условието, че дължината на орбитата s е целочислено кратна на дължината λ на вълната на дьо Бройл за електрона:

$$s = n\lambda.$$

Числото $n = 1, 2, 3, \dots$ се нарича главно квантово число на орбитата.

Скоростта, с която обикаля електронът във водородния атом е значително по-малка от скоростта на светлината. Ако обаче електронът обикаля около ядро, което съдържа голям брой протони, е възможно неговата скорост да стане съпоставима със скоростта на светлината. В този случай електронът трябва да се разглежда като релативистка частица с маса, по-голяма от масата му в покой.

а) Разгледайте движението на електрон по кръгова орбита около неподвижно ядро, съдържащо Z протона. Като използвате модела на Бор изразете отношението v/c на скоростта на електрона към скоростта на светлината чрез броя на протоните Z , главното квантово число на орбитата n и фундаментални константи от дадените в края на задачата. [3 т]

б) Отношението v/c за основната орбита ($n = 1$) в атома на водорода се нарича **константа на фината структура** и се бележи с α . Като използвате резултата от т. а) пресметнете с минимум четири значещи цифри стойността на константата α . [1 т]

в) Какъв е максималният брой протони $Z_{\max}$ в ядрото, при който съществува електронна орбита с главно квантово число $n = 1$? [1,5 т]

г) Изразете пълната механична енергия E на електрон (сумата от кинетичната и потенциалната му енергии) за орбита с главно квантово число n в атом с пореден номер Z чрез α , масата в покой m_0 на електрона и скоростта c на светлината. [3 т]

д) Колко нанометра е максималната дължина на вълната на фотон, който може да избие електрон от основната орбита ($n = 1$) в атом с пореден номер $Z = Z_{\max}$? [1,5 т]

Фундаментални константи:

Кулонова константа: $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8,9876 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$;

Скорост на светлината във вакуум: $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$;

Константа на Планк: $h = 6,6268 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$;

Елементарен електричен заряд: $e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

Маса на електрона в покой: $m_0 = 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

22

Национално пролетно състезание по физика
Велико Търново, 13 – 14 март 2004 г
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. а) Нека отместването на тялото в даден момент е $x(t)$, а на точката на окачване – $x_0(t)$, Тогава удължението на пружината в дадения момент е:

$$\Delta l(t) = x_0(t) - x(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

От закона на Хук силата, която действа на тялото е:

$$F_x = k\Delta l(t) = kx_0(t) - kx(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

От 2. принцип на Нютон:

$$(1.1) \quad m a_x(t) = -kx(t) + kx_0(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

При хармонично трептене:

$$(1.2) \quad a_x(t) = -\omega^2 x(t) = -4\pi^2 \nu^2 x(t), \quad [0,5 \text{ т}]$$

където ν е честотата на принуденото трептене. Освен това:

$$(1.3) \quad k = 4\pi^2 \nu_0^2 m, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където ν_0 е честотата на свободното трептене. От уравнения (1.1) – (1.3) намираме:

$$(1.4) \quad x(t) = \frac{\nu_0^2}{\nu_0^2 - \nu^2} x_0(t). \quad [0,5 \text{ т}]$$

Оттук следва, че максималното отклонение (амплитудата) на тялото е:

$$(1.5) \quad A = \frac{\nu_0^2}{|\nu_0^2 - \nu^2|} A_0. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) От уравнение (1.4) следва, че когато $\nu < \nu_0$, знаменателят е положителен и:

$$x(t) = A \sin(2\pi \nu t),$$

т.е. $\Delta \phi = 0$.

[0,5 т]

Когато $\nu > \nu_0$, знаменателят в уравнение (1.4) е отрицателен и следователно:

$$x(t) = -A \sin(2\pi \nu t) = A \sin(2\pi \nu t + \pi).$$

В този случай фазовото отместване между трептенията на тялото и на точката на окачване е $\Delta \phi = \pi$.

[0,5 т]

в) Според уравнение (1.5) условието $A > 2A_0$ е еквивалентно на следните две неравенства:

$$\begin{cases} \nu_0^2 > 2(\nu^2 - \nu_0^2) \\ \nu_0^2 > 2(\nu_0^2 - \nu^2) \end{cases} \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук намираме:

$$\nu_0 / \sqrt{2} < \nu < \nu_0 \sqrt{3/2}$$

или $7,07 \text{ Hz} < \nu < 12,25 \text{ Hz}$.

[0,5 т]

г) Записваме втория принцип на Нютон при като отчитаме силата на трение:

$$m a_x(t) = -kx(t) + kx_0(t) - r v. \quad [0,5 \text{ т}]$$

При принудено трептене с честота ν_0 е в сила съотношението:

$$m a_x = -m(2\pi \nu_0)^2 x = -kx, \quad [0,5 \text{ т}]$$

което ни помага да определим закона за скоростта:

$$v(t) = \frac{kx_0(t)}{r} = \frac{m(2\pi \nu_0)^2 A_0 \sin(2\pi \nu_0 t)}{r} \quad [1 \text{ т}]$$

От закона за скоростта намираме закона за движение:

$$x(t) = \int v(t) dt = -\frac{2\pi\nu_0 mA_0}{r} \cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{2\pi\nu_0 mA_0}{r} \sin\left(2\pi\nu_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук следва, че при резонанс амплитудата на трептене на топчето е:

$$A = \frac{2\pi\nu_0 mA_0}{r} \approx 12,6 \text{ cm}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

а фазовата разлика между трептенията на топчето и на точката на окачване:

$$\Delta\phi = \pi/2. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Задача 2. а) За време t компресорът извършва работа:

$$A = Pt, \quad [0,5 \text{ т}]$$

а работното вещество отнема от камерата количество топлина:

$$Q_0 = \lambda m. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Хладилникът отдава на околната среда количество топлина:

$$Q_1 = Q_0 + A = \lambda m + Pt. \quad [0,5 \text{ т}]$$

От условието за равенство на приведените топлини:

$$(2.1) \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} \quad [1 \text{ т}]$$

намираме:

$$t = \frac{\lambda m(T_1 - T_0)}{PT_0} \quad [1 \text{ т}]$$

или

$$t = \frac{3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 20 \text{ K}}{80 \text{ W} \cdot 273 \text{ K}} \approx 300 \text{ s} = 5 \text{ min}. \quad [1 \text{ т}]$$

б) От уравнение (2.1) намираме, че въздухът в стаята получава количество топлина:

$$(2.2) \quad Q_1 = \frac{\lambda m T_1}{T_0}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Обемът на въздуха не се променя при неговото нагряване. Следователно:

$$(2.3) \quad Q_1 = n C_V \Delta T. \quad [1 \text{ т}]$$

Броя молове определяме от уравнението на Клапейрон–Менделеев:

$$(2.4) \quad n = \frac{p_0 V}{RT_1}. \quad [1 \text{ т}]$$

За идеален двуатомен газ:

$$(2.5) \quad C_V = \frac{5}{2} R. \quad [1 \text{ т}]$$

От уравнения (2.2) – (2.5) намираме:

$$\Delta T = \frac{2\lambda m T_1^2}{5 p_0 V T_0} \quad [1 \text{ т}]$$

или

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (293 \text{ K})^2}{5 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 100 \text{ m}^3 \cdot 273 \text{ K}} \approx 4,2 \text{ K}. \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 3. а) От условието на Бор следва, че:

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \quad [1 \text{ т}]$$

При движение с релативистки скорости:

$$(1.1) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad [1 \text{ т}]$$

откъдето следва:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{nh}{2\pi r}.$$

От условието $ma_n = F$ намираме:

$$(1.2) \quad \frac{mv^2}{r\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{k(Ze)e}{r^2} \quad [0,5 \text{ т}]$$

От уравненията (1.1) и (1.2) получаваме:

$$(1.3) \quad \frac{v}{c} = \frac{2\pi kZe^2}{nhc}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) За водородния атом $Z = 1$. От уравнение (1.3) намираме при $n = 1$:

$$(1.4) \quad \alpha = \frac{v}{c} = \frac{2\pi ke^2}{hc} = 7,2969 \cdot 10^{-3}. \quad [1 \text{ т}]$$

в) Понеже $v/c < 1$ от уравнения (1.3) и (1.4) получаваме:

$$\frac{2\pi kZe^2}{nhc} = \frac{Z\alpha}{n} < 1. \quad [0,5 \text{ т}]$$

За да съществува орбита с $n = 1$ е необходимо:

$$Z < \frac{1}{\alpha} = 137,04 \quad [0,5 \text{ т}]$$

или $Z_{\max} = 137$. [0,5 т]

г) Кинетичната енергия на електрона е:

$E_k = (\text{пълна релативистка енергия}) - (\text{енергия в покой})$

$$\text{или} \quad E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2}} - 1 \right). \quad [1 \text{ т}]$$

Потенциалната енергия на електрона е:

$$E_p = -\frac{kZe^2}{r} = -\frac{m_0 c^2 (Z\alpha/n)^2}{\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2}}. \quad [1 \text{ т}]$$

След алгебрични преобразования получаваме:

$$E = E_k + E_p = m_0 c^2 \left(\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2} - 1 \right). \quad [1 \text{ т}]$$

д) Тъй като $Z_{\max} \approx 1/\alpha$, при $n = 1$ имаме: $E \approx -m_0 c^2$. [0,5 т]

За да може фотонът да избие електрон от атома е необходимо:

$$\frac{hc}{\lambda} \geq |E| \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$\text{или} \quad \lambda_{\min} = \frac{h}{m_0 c} = 2,46 \cdot 10^{-3} \text{ nm}. \quad [0,5 \text{ т}]$$