

20

РЕГИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
БУРГАС
23.03.2002 г.
ТЕМА ПО ПРОГРАМАТА НА МОФ

Задача 1. Катер (фиг. 1) използва следния принцип за придвижване. Турбина изпомпва вода от езерото и я изхвърля назад, в хоризонтална посока, през тръба с площ на напречното сечение $S = 0,01 \text{ m}^2$. Възникващата реактивна сила тласка катера напред.

- а) Получете израз за масата μ на водата, изхвърлена от тръбата за единица време, ако скоростта на изхвърлената вода спрямо катера е u , а плътността на водата – ρ ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$).
- б) Върху катера действа сила на съпротивление $F = kv^2$, където v е скоростта на катера, а $k = 20 \text{ kg/m}$ е коефициент на пропорционалност. С каква скорост u спрямо катера трябва да се изхвърля водата през тръбата така, че катерът да се движи със скорост $v = 10 \text{ m/s}$?
- в) Каква е минималната мощност на двигателя при тази скорост на катера?

Задача 2. Топлинен двигател извършва равновесен цикличен процес, изобразен на фиг. 2. Работното вещество на двигателя е 1 mol идеален едноатомен газ.

- а) Изразете максималната и минималната температури на работното вещество чрез p_0 и V_0 .
- б) Намерете КПД на двигателя.
- в) Какъв би бил КПД на двигател работещ по цикъла на Карно при същите максимална и минимална температури?

Задача 3. Две успоредни метални релси, разположени на разстояние $l = 0,1 \text{ m}$ една от друга, са наклонени под ъгъл $\alpha = 30^\circ$ спрямо хоризонта (вж. фиг. 3). Релсите се намират в еднородно магнитно поле с индукция $B = 0,10 \text{ T}$, насочено вертикално нагоре. Към горните краища на релсите е свързана намотка с индуктивност $L = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ H}$. По релсите започва да се хлъзга без триене метална жичка PQ с маса $m = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$. Жичката, релсите и намотката образуват затворена електрическа верига с пренебрежимо малко съпротивление.

- а) В началния момент жичката се намира в горния край на релсите ($x = 0$) с нулева начална скорост. Получете израз за големината на електричния ток, който протича във веригата като функция на преместването x на жичката. В каква посока, от т. P към т. Q или от т. Q към т. P , тече токът през жичката?
- б) На какво максимално разстояние x_{max} ще се отдалечи жичката от своето начално положение?
- в) Движението на жичката по релсите представлява хармонично трептене. Намерете неговата амплитуда A и период T .

Приемете, че ускорението на свободно падане е $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Задача 4. На фиг. 4 е представена експериментално установената зависимост на скоростта u на вълните върху водната повърхност от дължината на вълната λ . Дълбочината на съда h е много по-голяма от λ .

- а) В съда е потопен вибратор, който трепти с честота $\nu = 5 \text{ Hz}$. Намерете дължината на вълната, породена от трептенето на вибратора. Оценете грешката на вашето пресмятане.

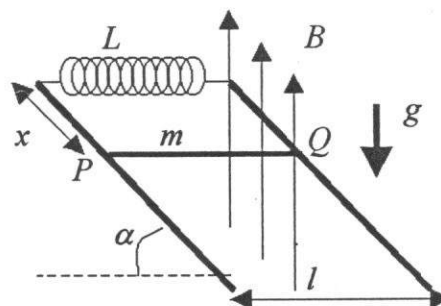
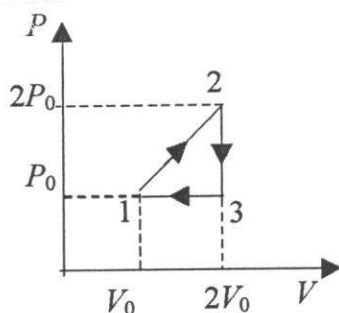
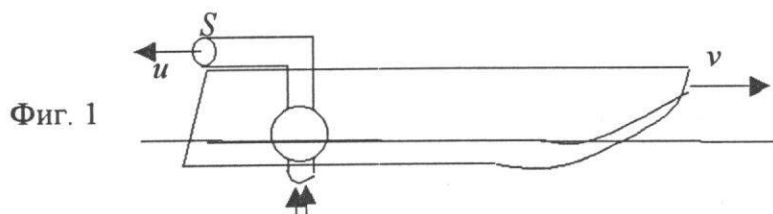
б) Теоретичните разглеждания показват, че при $\lambda \geq 5$ cm, скоростта на вълните по повърхността на водата би могла да зависи само от три параметъра: дължината на вълната, плътността на течността ρ и земното ускорение g . В този случай функционалната зависимост има следния вид:

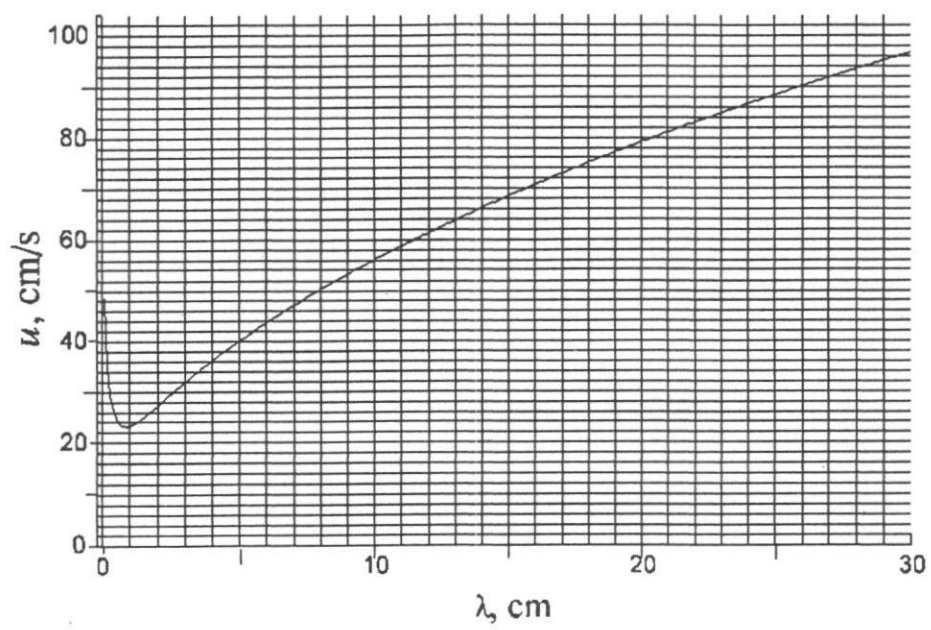
$$u = C\lambda^p \rho^q g^r,$$

където C е безразмерна константа, а p , q и r са неизвестни степенни показатели. Като използвате факта, че размерностите на двете страни в уравнението са еднакви, намерете степенните показатели p , q и r .

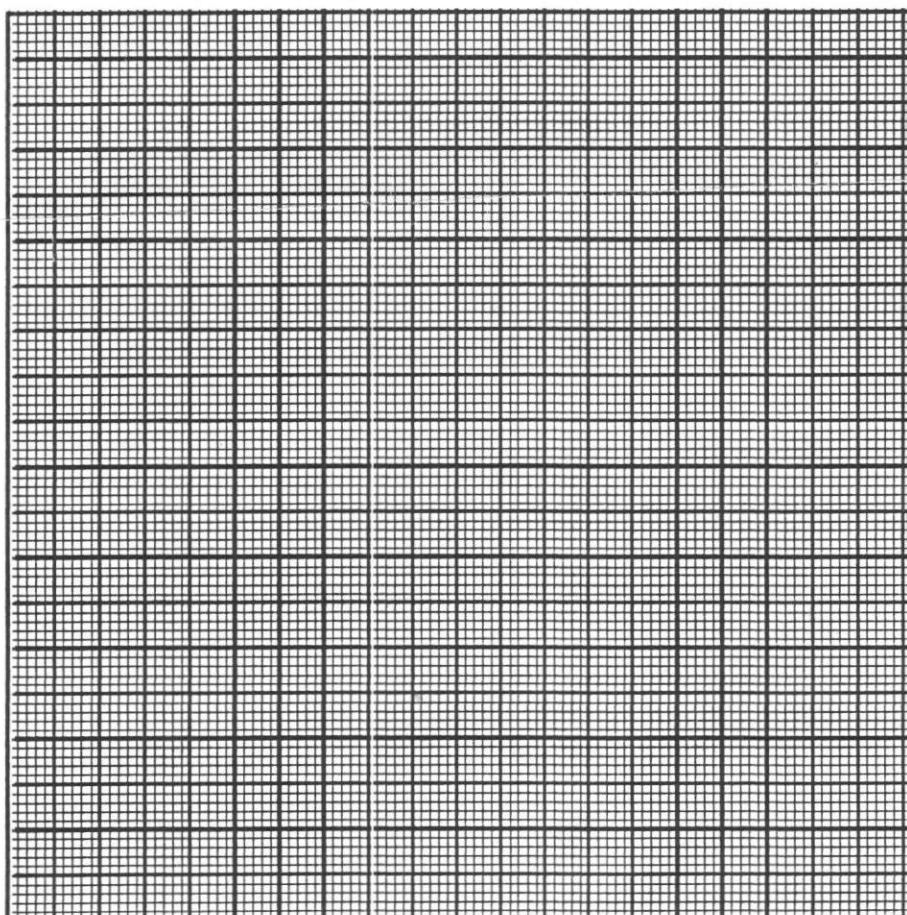
в) Като използвате експерименталните данни от фиг. 4, постройте върху приложената милиметрова скала (под фиг. 4) подходяща графика, с която да докажете получената от вас степенна зависимост на u от λ . Намерете също така стойността на константата C . Приемете, че земното ускорение е $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Указание: Ако решението налага, можете да извършвате графични построения директно върху фиг. 4. Милиметровата скала е предназначена за да представите решението на т. в). Допълнителна милиметрова хартия няма да бъде раздавана. След като завършите работа, предайте листа, на който се намират фиг. 4 и милиметровата скала.





Фиг. 4



РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕМАТА ПО ПРОГРАМАТА НА МОФ

Задача 1. а) За време t през изходния отвор на тръбата ще преминат всички водни частици, които се намират на разстояние по-малко от ut от отвора, т. е. в цилиндър с обем $V = uSt$ [1]. Следователно масата на водата, преминала за единица време през отвора, е:

$$\mu = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho u S. [1]$$

б) Нека разгледаме движението на определено количество вода с маса m през тръбата. В началото водата в езерото е неподвижна и следователно нейният импулс е нула. След излизане от тръбата водата се движи със скорост $u - v$ спрямо езерото и има импулс $p = m(u - v)$ [1], насочен хоризонтално в противоположна посока спрямо движението на катера. Съгласно със закона за изменение на пълния импулс на една система силата, с която тръбата действа върху водата, е:

$$F = \frac{P}{t} = \mu(u - v) = \rho u(u - v)S [2]$$

и е насочена противоположно спрямо движението на катера. Съгласно с третия принцип на Нютон водата действа върху тръбата, а следователно и върху катера като цяло, със същата по големина сила, но насочена по-посока на движението – т. нар. реактивна сила. За да се движи катерът равномерно е необходимо реактивната сила да уравновесява силата на съпротивление:

$$\rho u(u - v)S = kv^2 \text{ или } u^2 - vu - \frac{k}{\rho S} v^2 = 0. [2]$$

Полученото уравнение за u има два корена – един положителен и един отрицателен. Отговорът на задачата се дава с положителния, корен:

$$u = \frac{v \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{\rho S}} \right)}{2} = 2v = 20 \text{ m/s}. [2]$$

в) Минималната мощност $P_{\min}$ на двигателя е равна на механичната работа, която двигателят извършва за единица време [1]. Тя се състои от две части:

- Работа, която извършва реактивната сила върху катера за единица време:

$$P_1 = Fv = \rho u(u - v)vS. [1]$$

- Изменение на кинетичната енергия на изхвърляната вода за единица време:

$$P_2 = \frac{m(u - v)^2}{2t} = \frac{\rho u(u - v)^2 S}{2}. [2]$$

Оттук намираме минималната мощност на двигателя:

$$P_{\min} = P_1 + P_2 = \frac{\rho u(u^2 - v^2)S}{2} = 30 \text{ kW}. [2]$$

Задача 2. а) Температурата на газа е

$$T = \frac{PV}{R}, [1]$$

където R е газовата константа. Максималната (минималната) температура съответства на максимално (минимално) произведение PV . От PV диаграмата се вижда, че:

$$T_{\min} = T_1 = \frac{P_0 V_0}{R} \quad [1] \text{ и } T_{\max} = T_2 = \frac{4P_0 V_0}{R} \quad [1].$$

б) Механичната работа на двигателя за един цикъл съответства на площта, която загражда PV диаграмата на кръговия процес:

$$A = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{P_0 V_0}{2} \quad [1]$$

Работното вещество поглъща топлина само по време на процеса 1 – 2:

$$Q_{12} = \Delta U + A_{12}, \quad [2]$$

където $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$ [2] е изменението на вътрешната енергия на газа, а

$$A_{12} = \frac{(P_2 + P_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{3P_0 V_0}{2} \quad [2] \text{ е механичната работа, която газът извършва.}$$

Като отчетем, че за едноатомен газ моларният топлинен капацитет при постоянен обем е $C_V = 3/2 R$ [1], намираме погълнатото количество топлина:

$$Q_{12} = 6P_0 V_0 \quad [1].$$

Оттук определяме коефициента на полезно действие:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{1}{12} \quad [2].$$

в) За двигател на Карно, който работи при същите $T_{\min}$ и $T_{\max}$, получаваме:

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{3}{4} \quad [1].$$

Коментар: Фактът, че $\eta < \eta_{\text{Карно}}$ следва от т. нар. теорема на Карно, която гласи: “От всички циклични топлинни машини, които работят при еднакви минимални и еднакви максимални температури на работното вещество, най-голям КПД има двигател, който работи по цикъла на Карно.”

Задача 3. а) Потокът на външното магнитно поле през контура, съставен от жичката, релсите и намотката, е $\Phi = Blx \cos \alpha$. При движение на жичката потокът се променя и това води до индуциране на електродвижещо напрежение с големина:

$$U_1^* = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos \alpha = Blv \cos \alpha, \quad [1]$$

където v е скоростта на жичката. Съгласно с правилото на Ленц посоката на тока, породен от индуцираното ЕДН, е такава, че магнитното поле $\vec{B}'$, което създава този ток компенсира нарастването на външния магнитен поток. От правилото на дясната ръка следва, че посоката на индуцирания ток I през жичката е от т. Q към т. P . [1]

В намотката поради самоиндукция възниква ЕДН:

$$U_2^* = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad [1]$$

Знакът “–” означава, че U_2^* има противоположна посока спрямо U_1^* . Тъй като веригата има нулево съпротивление, е изпълнено равенството $U_1^* + U_2^* = 0$.

Оттук следва, че:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} \cos \alpha \quad [1] \text{ или}$$

$$I = \frac{Blx}{L} \cos \alpha. [1]$$

б) Пълната енергия на системата жичка + релси + намотка е съставена от три събираеми: $E = K + U + W$, където:

$$K = \frac{mv^2}{2} \text{ е кинетичната енергия на жичката; } [0,5]$$

$U = -mgh = -mgx \sin \alpha$ е потенциалната енергия на жичката. Знакът минус възниква, защото приемаме, че горният край на релсите е нулево ниво за отчитане на потенциалната енергия; [0,5]

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{(Blx \cos \alpha)^2}{2L} \text{ е енергията на магнитното поле в намотката. } [1]$$

Тъй като в началния момент $v = 0$ и $x = 0$, пълната енергия е нула. Поради липсата на триене пълната енергия на системата се запазва. В момента на максимално отклонение ($x = x_{\max}$) скоростта на жичката е нула, т. е. $K = 0$. От закона за запазване на енергията следва, че:

$$\frac{(Blx_{\max} \cos \alpha)^2}{2L} - mgx_{\max} \sin \alpha = 0, [1]$$

откъдето намираме:

$$x_{\max} = \frac{2mgL \sin \alpha}{(Bl \cos \alpha)^2} \approx 13 \text{ cm. } [1]$$

в) I метод

Записваме израза за пълната енергия на системата:

$$E = \frac{(Blx \cos \alpha)^2}{2L} + \frac{mv^2}{2} - mgx \sin \alpha.$$

От ЗЗЕ следва, че първата производна на енергията $E'(t)$ по времето е равна на нула:

$$E' = \frac{(Bl \cos \alpha)^2}{L} xx' + mvv' - mgx' \sin \alpha = 0. [1]$$

Като вземем предвид, че $v = x'$ и съкратим на скоростта, получаваме:

$$(1) \quad ma = -\frac{(Bl \cos \alpha)^2}{L} x + mg \sin \alpha, [1]$$

където $a = v'$ е ускорението на жичката. Полученото уравнение описва хармонично трептене с кръгова честота:

$$\omega = \frac{Bl \cos \alpha}{\sqrt{mL}} \text{ и период: } [1]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bl \cos \alpha} \approx 0,73 \text{ s. } [1]$$

II метод

На жичката действа в хоризонтална посока магнитната сила $F_m = IBl$, чиято проекция върху оста x е $-IBl \cos \alpha$. Като отчетем, че проекцията на силата на тежестта върху оста x е $mg \sin \alpha$, получаваме уравнението за хармонично трептене (1).

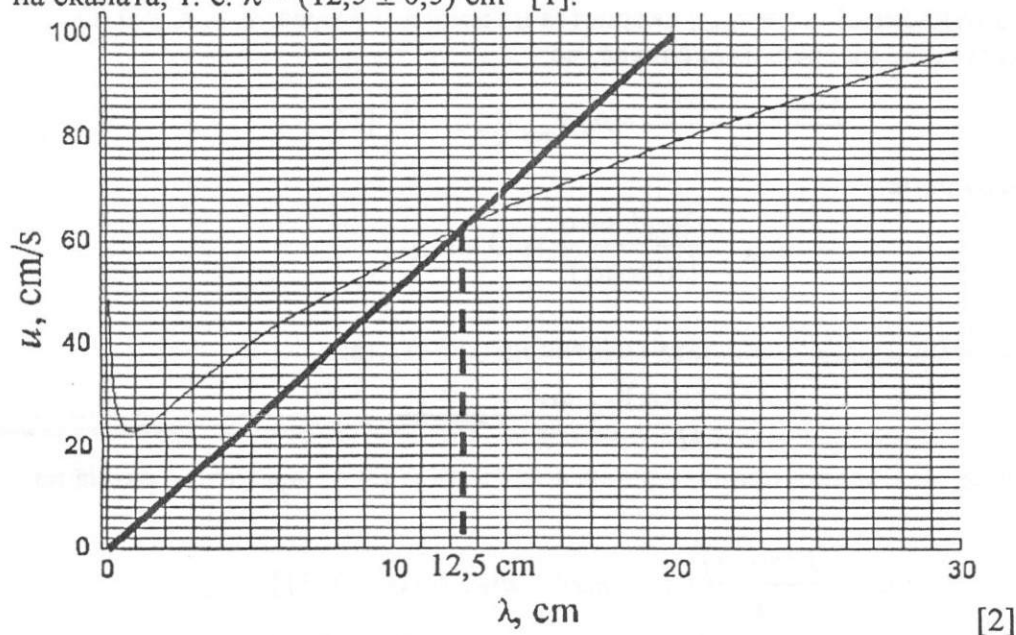
Равновесното положение x_0 , спрямо което трепти жичката, се определя от условието $a = 0$. От уравнението за движение намираме:

$$x_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{(Bl \cos \alpha)^2} = \frac{x_{\max}}{2}. [1]$$

Амплитудата е равна на максималното отклонение спрямо равновесното положение:

$$A = |x_{\max} - x_0| = x_{\max}/2 \approx 7,5 \text{ cm}. [1]$$

Задача 4. а) Връзката между скоростта, дължината и честотата на вълната се дава с уравнението $u = v\lambda$ [1]. При зададена честота $v = 5 \text{ Hz}$ допустимите стойности на u в cm/s и на λ в cm лежат върху права, която се задава с уравнението $u = 5\lambda$. Дължината на вълната се определя от пресечната точка на тази права с графиката на експерименталната зависимост $u = f(\lambda)$. Така определяме $\lambda \approx 12,5 \text{ cm}$. Грешката е равна на $1/2$ от разделителната способност на скалата, т. е. $\lambda = (12,5 \pm 0,5) \text{ cm}$ [1].



б) Изразяваме размерностите на зададените величини чрез основните мерни единици:

$$[u] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}; [\lambda] = \text{m}; [\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ и } [g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}. [1]$$

След като заместим в уравнението $u = C\lambda^p \rho^q g^r$, получаваме:

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^{p-3q+r} \cdot \text{kg}^q \cdot \text{s}^{-2r}. [1]$$

За да бъдат размерностите в двете страни на уравнението еднакви е необходимо степенните показатели на съответните основни единици да бъдат равни:

$$p - 3q + r = 1$$

$$q = 0$$

$$[1]$$

$$2r = 1.$$

Оттук определяме $p = 1/2$, $q = 0$, $r = 1/2$, т. е. търсената зависимост има следния вид:

$$(1) \quad u = C\sqrt{\lambda g} \quad [2].$$

в) I метод

Ако изберем нова независима променлива $x = \sqrt{\lambda}$, зависимостта на u от x се изобразява с права линия, минаваща през началото на координатната система:

$$u = kx. [1]$$

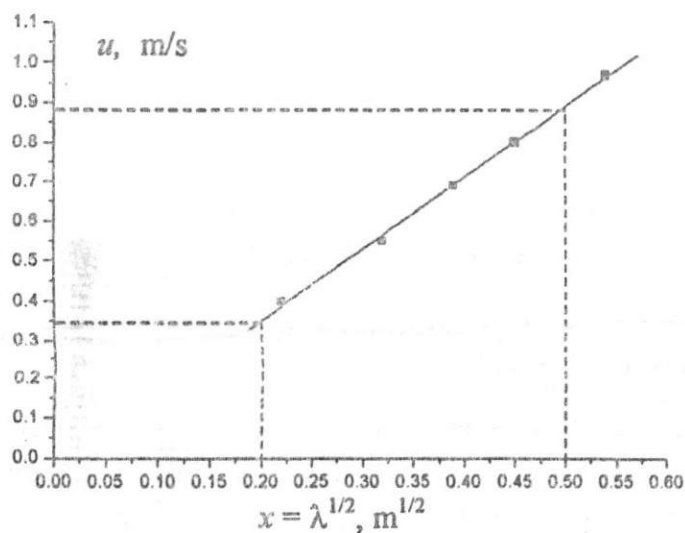
Неизвестната константа C се определя от ъгловия коефициент k на правата по формулата:

$$C = \frac{k}{\sqrt{g}}.$$

От графиката на фиг. 4 отчитаме поне 5 числени стойности за λ и u и ги нанасяме в таблица: [1]

λ, m	$x = \sqrt{\lambda}, \text{m}^{1/2}$	$u, \text{m/s}$
0,05	0,22	0,4
0,10	0,32	0,55
0,15	0,39	0,69
0,20	0,45	0,80
0,25	0,5	0,89
0,30	0,54	0,97

Нанасяме върху милиметровата скала точките, които съответстват на u и x :



[2]

Пресмятаме ъгловия коефициент като изберем две точки от построената права:

$$k = \frac{(0,88 \text{ m/s} - 0,35 \text{ m/s})}{(0,50 \text{ m}^{1/2} - 0,20 \text{ m}^{1/2})} \approx 1,8 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}, [1]$$

откъдето намираме търсения коефициент C :

$$C = \frac{k}{\sqrt{g}} \approx 0,57. [1]$$

II Метод

От функционалната зависимост $u = C\sqrt{\lambda g}$, след като логаритмуваме, получаваме:

$$\lg u = \lg C + \frac{1}{2} \lg g + \frac{1}{2} \lg \lambda.$$

Следователно ако използваме като променливи $x = \lg \lambda$ и $y = \lg u$, зависимостта между x и y е линейна: $y = a + kx$ с ъглов коефициент $k = \frac{1}{2}$ и свободен член a . Свободният член определяме от y – координатата на точката, в която графиката пресича ординатната ос. Константата C се пресмята като:

$$C = 10^a / g^{1/2}.$$

При този метод на работа може да се използва произволна основа на логаритъма.