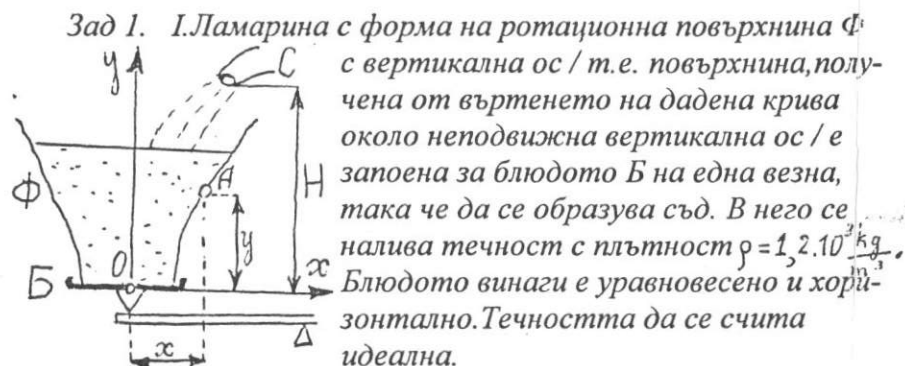


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
 23.03.2001 – 25.03.2001 гр.Пловдив

СПЕЦИАЛНА ТЕМА

Темата съдържа четири задачи. Участниците решават ТРИ задачи ПО ИЗБОР.



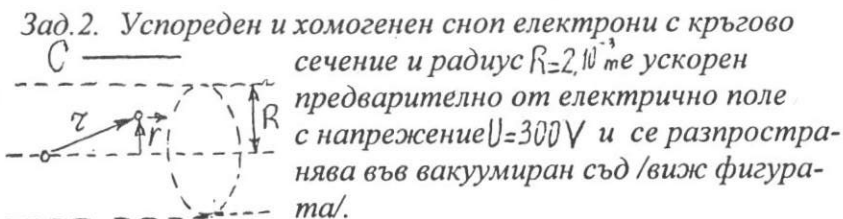
А/ На дъното на съда се отваря не голям отвор с площ $\sigma = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Каква зависимост трябва да съществува между координатите x и y на произволна точка А от повърхнината Φ , че падането на нивото на течността в съда в следствие на изтичане на течността от отвора да става с постоянна скорост с големина $v_0 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$. Пресечната точка О на оста на симетрия на повърхнината Φ е избрана за начало на координатна система, абсцисната ѝ ос Ох е хоризонтална, а ординатната ѝ ос Оу е вертикална. /виж Фигурата/.

Б/ С каква скорост изтича течността от отвора, когато височината на течността в съда е $y = 0,3 \text{ m}$.

В/ След като отворът се затвори върху дъното на съда се излива струя от същата течност от тръба С със сечение $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ край на която се намира на разстояние $H = 1 \text{ m}$ от блюдото. Големината на скоростта, с която изтича течността от края на тръбата С е $v_1 = 0,7 \text{ m/s}$. Как зависи от височината y на нивото на течността в съда налягането ѝ върху дъното на съда? Какво е налягането върху дъното на съда при $y = 0,3 \text{ m}$?

II. Ще се промени ли силата, която уравновесява разглежданото блюдо на везната, когато отворът се отвори и течността в съда започне да изтича през отвора? С колко ще се промени големината на тази сила при отваряне на отвора в сравнение с уравновесяващата сила, когато отворът е затворен? И в двата случая височината на течността в съда е $y = 0,4 \text{ m}$.

40 точки



А/ Да се определи силата, която действа на един електрон от снопа с радиус-вектор $\vec{r}$ като началото О на координатната система е избрано върху оста ОО' на снопа. Да се има предвид, че /от съображения за симетрия/ интензитетът $\vec{E}$ на електричното поле на снопа в точката $\vec{r}$ е:

$$\vec{E} = -k\vec{r},$$

където k е положителна константа, а $\vec{r}$ е вектор, перпендикулярен на оста на снопа. Известно е също, че големината на вектора $\vec{E}$ в точка от повърхнината на снопа се определя чрез формулата:

$$E = \frac{n_0 e_0 R}{2 \varepsilon_0},$$

където $n_0 = 10^{10} \text{ m}^{-3}$ е концентрацията на електроните в снопа, e_0 е зарядът на електрона, а ε_0 е електричната константа.
 Б/ Какво обуславя действащата на електроните електрична сила и какво действащата им магнитна сила?
 В/ Праволинеен проводник C с дължина $l = 0.3 \text{ m}$, успореден на оста OO и намиращ се във от снопа се движи спрямо него със скорост V , чиято големина е пропорционална на $r = |\vec{r}|$ -

$$V = \omega_0 r, (\omega_0 = 0.5 \text{ s}^{-1}).$$

В каква посока трябва да се движи проводникът, че индуцираното в него ЕДН да е максимално. Да се определи това ЕДН.

Г/ Да си мислим, че в снопа се намират положителни йони всеки със заряд $2e_0$ и с маса 10^4 пъти по-голяма от масата на електрона m_0 . Каква трябва да бъде концентрацията на тези йони, че снопът да не се разширява? Да се счита, че газът от йони е идеален с температура $T = 273 \text{ K}$. Можем ли да пренебрегнем средно-квадратичната скорост на йоните в сравнение със скоростта на електроните от снопа и да ги считаме неподвижни?

Д. Да си мислим сега успореден и хомогенен сноп електрони с правоъгълно сечение, чиято дебелина $ed = 1 \text{ mm}$, а ширината му е много голяма. От съображения за симетрия е ясно, че интензитетът на електричното поле в

една точка от повърхнината на снопа е перпендикулярен на снопа, а големината му е:

$$E = \frac{n_0 e_0 d}{2 \varepsilon_0}.$$

Да се оцени разстоянието, на което дебелината на снопа се увеличава с 30%. Останалите числени данни са същите като в част I на задачата.

Дадени величини:

Абсолютна стойност на заряда на електрона $e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,
 Електрична константа $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$,
 Магнитна константа $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$,
 Маса в покой на електрона $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$,
 Скорост на светлината във вакуум $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 Константа на Болцман $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

50 точки

Зад.3. Фотон с честота $\nu = 6.1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ пада под ъгъл $\theta = 23^\circ$ на неголяма пластинка с площ $S = 1 \text{ mm}^2$. Съществуват две възможности: той да се отрази от пластинката или да се погълне от нея.

А. Нека преди фотонът да достигне до пластинката тя е неподвижна и масата ѝ е $m_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$. Неподвижен спрямо нея е и светлинният източник.

А/ Да се определи скоростта на пластинката, след като тя погълне фотона.

Б/ Каква част от енергията на фотона се превръща в механична енергия на пластинката?

В/ Да се определи скоростта на пластинката след като фотонът се отрази от нея. Каква е честотата ν' на отразения фотон? Каква относителна грешка се допуска,

ако се приеме, че честотата на отразения фотон е равна на γ ?

Г/ Върху пластинката, чийто коефициент на отражение е $R=0,8$ пада под ъгъл θ успореден сноп бяла светлина. Плътността на енергията в снопа е $u=6,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$. Да се определи нормалното налягане на снопа върху пластинката. Движението на пластинката да не се отчита. Да се определи и предадения на пластинката импулс за единица време.

II. Да си мислим, че пластинката се движи с постоянна скорост $\vec{V}$ спрямо източника на светлина. Големината ѝ е $V=\frac{2}{3}c$, а посоката на $\vec{V}$ е перпендикулярна на пластинката и $\vec{V}$ е противоположна на посоката от нея към източника на светлина.

Д/ Каква е честотата спрямо пластинката на фотон, който спрямо източника има честота γ ?

Е/ Да се определи предадения на пластинката импулс от фотон, който се отразява от нея спрямо отправна система, свързана с пластинката.

Упътване: За по-лесно извършване на пресмятанията използвайте приблизителните равенства:

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x, \quad (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2, \\ \text{валидни при } |x| \ll 1.$$

Стойности на величините:

$$\text{Скорост на светлината във вакуум } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

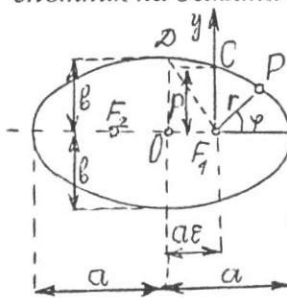
$$\text{Константа на Планк } h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

60 точки

Зад.4.

I. Както е известно траекторията на един изкуствен

спътник на Земята с маса m е елипса в един от фокусите F_1 на която се намира центърът на Земята с маса M . (виж фигурата). Сумата от разстоянията от всяка точка на елипсата до фокусите F_1 и F_2 е постоянна величина $2a$, където a се нарича голяма полуос на елипсата. Координатите r и φ на една точка P от елипсата удовлетворяват уравнението:



$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi, \quad (1)$$

в което величината p се нарича параметър, а ε – ексцентрицитет на елипсата. Като използвате законите на физиката и имате предвид, че частен случай на елипса е окръжността, изразете голямата полуос a , малката полуос b , параметър p , ексцентрицитета ε и периода T на спътника чрез енергията му E ($E < 0$) и големината на момента на импулса му M .

Б/ Да се изрази чрез първата космическа скорост v_1 скоростта на една ракета, изстреляна от Земята, която на безкрайно голямо разстояние има скорост 0.

В/ Максималното отдалечение от повърхността на Земята на един спътник е $h_2=320 \text{ km}$, а минималното му отдалечение е $h_1=160 \text{ km}$. Да се определят енергията, моментът на импулса и скоростта на спътника в точката на минималното му отдалечение и ексцентрицитета на орбитата му. Радиусът на Земята е $R=6370 \text{ km}$, а масата на спътника е $m=1000 \text{ kg}$.

Малък ракетен двигател е монтиран на спътника и когато той е минимално отдалечен от Земята

двигателят работи за кратко време. Какво трябва да бъде изменението на скоростта на спътника, че той да се движи по кръгова орбита на височина h_1 от Земята?

II. Нека една ракета се изстрелва от Земята със скорост $\vec{v}$ и нека $\vec{v}_\infty$ е скоростта ѝ в място, където земното привличане е незначително и се компенсира от слънчевото привличане. Изразете $\vec{v}_\infty$ чрез скоростта $\vec{u}'$ на движението на Земята около Слънцето $/u' = 298 \text{ km/s}/$ и ъгъла θ , който сключват $\vec{v}_\infty$ и $\vec{u}'$.

Като използвате получения резултат оценете третата космическа скорост

60 точки

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
 23.03.2001 – 25.03.2001 гр. Пловдив

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ СПЕЦИАЛНА ТЕМА

Решение на задача 1:

А/ От уравнението на Бернули и уравнението за непрекъснатостта имаме:

$$6\tau. \quad p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g y = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}, \quad v_0 \pi x^2 = v \sigma, \quad (g = 9,8 \frac{m}{s^2}),$$

където p_0 е атмосферното налягане. Като решим тази система получаваме:

$$2\tau \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\pi^2 x^4}{\sigma^2} - 1 \right)$$

Б/

$$2\tau \quad v = \sqrt{\frac{2gy}{1 - \frac{\pi^2 x^4}{\sigma^2}}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2gy}{v_0^2}} \approx 2,4 \frac{m}{s}$$

В/ Нека y е височината на течността в съда в произволен момент. Скоростта на течността, изтичаща от тръбата С в този момент до нивото на течността в съда е:

$$2\tau \quad v' = \sqrt{2g(H-y)}.$$

Количеството течност, което достига за време Δt до нивото на течността в съда е: $\rho v_1 S \Delta t$

3τ и импулсът му е: $\rho v_1 S \Delta t \cdot v'$, а

1τ За единица време е предаден импулс: $\rho v_1 S v'$

който е равен на големината на действащата сила F' .

Резултатната сила, действаща на дъното е:

$$4\tau \quad F = \rho g y \pi x_0^2 + \rho v_1 S \sqrt{2g(H-y)}$$

където

$$3\tau \quad x_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}},$$

е абсцисата на една точка от повърхнината Φ с ордината $y=0$.

Следователно налягането е:

$$1\tau \quad p = \rho g y + \frac{\rho v_1 S}{\sigma} \sqrt{2g(H-y)} \approx 7466,5 \text{ Pa}.$$

II. Нека в даден момент височината на течността в съда е y и отворът е отворен. Тогава, поради изтичането на течността, изменението на импулса на съда за единица време е:

$$6\tau. \quad \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -\rho \pi v \vec{v} = -\vec{F}.$$

Силата $\vec{F}$ има посока на оста Oy , а големината ѝ е:

$$5\tau. \quad F = \rho \pi v^2 = \rho \pi v_0^2 \left(1 + \frac{2gy}{v_0^2} \right) \approx 0,74 \text{ N}.$$

Следователно сила, която уравновесява блюдото при отворен отвор е 4τ. по-малка от силата, която го уравновесява при затворен отвор, при условие, че височината на течността в съда и в двата случая е една и съща.

Решение на задача 2:

А/ От дадените две формули получаваме:

$$1_T \quad k = \frac{n_0 e_0}{2 \epsilon_0}, \quad \vec{E} = - \frac{n_0 e_0}{2 \epsilon_0} \vec{r}.$$

Да си представим коаксиален цилиндър в снопа с радиус $r = |\vec{r}|$. От формулата за интензитет на магнитно поле на праволинеен ток, за интензитета на магнитното поле H в точка τ получаваме:

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\pi r^2 v n_0 e_0}{2\pi r}, \quad v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m_0}},$$

Така че

$$3_T \quad |\vec{H}| = r n_0 \sqrt{\frac{e_0^3 U}{2 m_0}} \quad \text{Виж фигурата, където:}$$

— H е перпендикуларен вектор на равнината на листа, насочен към нас.
Тогава силата, действаща на един електрон от снопа е:

$$5_T \quad \vec{F} = -e_0 \vec{E} - e_0 \mu_0 v |\vec{H}| \vec{r} = \frac{e_0^2 n_0}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{r} = \frac{e_0^2 n_0}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{2e_0 U}{m_0 c^2}\right) \vec{r} \approx 1,44 \cdot 10^{-17} \vec{r} \text{ N.}$$

4_T Б/ Електричната сила обуславя разширение, а магнитната сила свиване на снопа..

В/ Магнитните индукционни линии са окръжности, перпендикулярни на оста OO' .

Вън от снопа:

$$5_T \quad |\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\pi R^2 v n_0 e_0}{2\pi r} = \frac{R^2 v n_0 e_0}{2r}.$$

Индукцираното ЕДН е максимално, когато посоката на $\vec{V}$ е радиална. То е равно на работата на силата, с която магнитното поле действа на единичен положителен заряд при пренасянето му от единия край на проводника до другия:

$$5_T \quad \mathcal{E} = \mu_0 I H l V = \mu_0 I \omega R^2 n_0 \sqrt{\frac{e_0^3 U}{2 m_0}} \approx 6,2 \cdot 10^{-15} \text{ V.}$$

Г/ Отношението на средно-квадратичната скорост на йоните към $(v_{\text{и}})^2 = \frac{2kT}{m_{\text{и}}}$ скоростта на електроните е $1,085 \cdot 10^{-4}$. Следователно можем да считаме йоните неподвижни.

Интензитетът на електричното поле на снопа не зависи от скоростта на частиците в него, така че силата, с която действат положителните йони на един електрон е:

$$5_T \quad \vec{F}_+ = -e_0 \vec{E}_+ = -e_0 \frac{2e_0 n_+}{2 \epsilon_0} \vec{r} = -\frac{n_+ e_0^2}{\epsilon_0} \vec{r}.$$

Снопът няма да се разширява, ако:

$$2_T \quad \vec{F}_+ + \vec{F} = 0.$$

Т.е. ако:

$$n_+ = \frac{n_0}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{n_0}{2} \left(1 - \frac{2e_0 U}{m_0 c^2}\right) \approx 5 \cdot 10^9 \text{ m}^{-3}.$$

II. Понеже $v \ll c$ действието на магнитната сила може да не се отчита.

Разширението на снопа е малко в сравнение с разстоянието L , на което става това разширение. Следователно ъгълът $\alpha \approx \arctg \frac{0,15 \cdot l}{L} \ll 1$ и можем да считаме, че векторът $\vec{F}$ остава постоянен. /виж фигурата/

Силата, с която снопът действа на един електрон от снопа на повърхността му има големина

$$4_T \quad F = e_0 E = \frac{n_0 e_0^2 d}{2 \epsilon_0}$$

Ускорението, което тя му предава е:

$$1_T \quad a = \frac{n_0 e_0^2 d}{2 \epsilon_0 m_0}$$

Времето, за което ширината на снопа се увеличава с 30% е:

$$2_T \quad \tau = \sqrt{\frac{0,3d}{a}} = \sqrt{\frac{0,6 \epsilon_0 m_0}{n_0 e_0^2}}.$$

Разстоянието, на което става това разширение е:

$$1_T \quad L = v \tau = \sqrt{\frac{1,2 \epsilon_0 U}{n_0 e_0}} \approx 1,4 \text{ m}$$

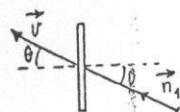
Решение на задача 3:

I. Да положим:

$$x = \frac{h\nu}{\mu_0 c^2}, \quad (\alpha = 8,97 \cdot 10^{-31})$$

А/ Когато се поглъща фотона енергията на покой на пластинката нараства.

Тогава от ЗЗИ и ЗЗЕ имаме:



6T

$$\frac{h\nu}{c} \vec{n}_1 = \frac{\mu'_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

или

$$x \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{\mu'_0}{\mu_0} \frac{v}{c}$$

/1/

$$h\nu + \mu_0 c^2 = \frac{\mu'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$(x+1) \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{\mu'_0}{\mu_0}$$

където $\vec{n}_1$ е единичният вектор на посоката на падащия фотон, $\vec{v}$ е скоростта на пластинката/ $v = |\vec{v}|$ /.

Като разделим уравненията / 1 / получаваме:

2T

$$v = \frac{cx}{x+1},$$

след което намираме решението на системата / 1 /:

2T

$$v = \frac{cx}{x+1} \approx \frac{h\nu}{\mu_0 c}, \quad \mu'_0 = \mu_0 \sqrt{1+2x} \approx \mu_0 \left(1 + \frac{h\nu}{\mu_0 c^2}\right).$$

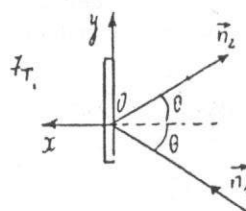
Б/ Частта от енергията на фотона, превърнала се в механична енергия на пластинката е:

3T

$$\eta = \frac{1}{h\nu} \left(\frac{\mu'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} - \mu'_0 c^2 \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x+1)^2}}} - 1 \right) \approx \frac{x}{2}.$$

В/ При отражение на фотона от пластинката ЗЗИ и ЗЗЕ са:

/виж фигура/



$$\frac{h\nu}{c} \vec{n}_1 - \frac{h\nu'}{c} \vec{n}_2 = \frac{\mu_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

или

$$h\nu + \mu_0 c^2 = h\nu' + \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x \vec{n}_1 - x' \vec{n}_2 = \frac{\vec{v}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(2)

$$x - x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1,$$

където:

$$x' = \frac{h\nu'}{\mu_0 c^2}$$

Като повдигнем уравненията / 2 / на квадрат получаваме системата:

7T

$$x^2 + x'^2 + 2xx' \cos 2\theta = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2},$$

(3)

$$x^2 + x'^2 - 2xx' = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(2 - \frac{v^2}{c^2} - 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

Като извадим уравненията на системата /3/ получаваме:

$$2xx' \cos^2 \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 = x - x'.$$

(4)

От /4/ намираме:

$$x' = \frac{x}{1 + 2x \cos^2 \theta}$$

2T

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{2h\nu}{\mu_0 c^2} \cos^2 \theta \right) \approx \nu \left(1 - \frac{2h\nu}{\mu_0 c^2} \cos^2 \theta \right) = 6,1 \cdot 10^{14} (1 - 5,09 \cdot 10^{-31}) \text{ Hz}.$$

Като заместим получения израз в първото равенство на / 3 / получаваме:

2T

$$v \approx 2 \frac{h\nu}{\mu_0 c^2} \cos \theta \approx 1,8 \cdot 10^{-30} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Относителната грешка, която се допуска, ако се приеме, че $\nu' = \nu$ е:

- 2T

$$\eta = \frac{|\nu - \nu'|}{\nu} = 5,09 \cdot 10^{-29} \%$$

Г/ Да се пренебрегне движението на пластинката означава да не се отчита изменението на честотата на отразения фотон.

Нека да вземем броя фотони, които се намират в единица обем от снопа и имат честоти между ν и $\nu + \Delta\nu$, където $\Delta\nu$ е малък честотен интервал. От тях $R\Delta N(\nu)$ се отразяват и предават импулс

$$7\text{т.} \quad \vec{p}_1 = R \Delta N(\nu) \left(\frac{2h\nu \cos \theta}{c}, 0 \right)$$

а $(1-R)\Delta N(\nu)$ се поглъщат, предавайки импулс

$$5\text{т.} \quad \vec{p}_2 = (1-R) \Delta N(\nu) \left(\frac{h\nu \cos \theta}{c}, \frac{h\nu \sin \theta}{c} \right).$$

Предаденият импулс ще получим като сумираме $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ по всички честоти.

Очевидно сумата от величините $\frac{h\nu \Delta N(\nu)}{c}$ е равна на u .

За предаденият импулс за единица време получаваме:

$$4\text{т.} \quad |\Delta \vec{p}| = \frac{uS}{c} \sqrt{(1+R)^2 \cos^2 \theta + (1-R)^2 \sin^2 \theta} \cos \theta = uS \sqrt{1+R^2 + 2R \cos 2\theta} \cos \theta = 6,53 \cdot 10^{-12} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Предаденият импулс за единица време върху единична площ, т.е. нормалното налягане е:

$$4\text{т.} \quad P = (1+R)u \cos^2 \theta \approx 3,42 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}. \quad (5)$$

II. Спрямо отправна система, свързана с пластинката, източникът се движи със скорост $-\vec{V}$, значи със скорост с големина $V = |\vec{V}|$.

Плоска вълна спрямо K' е:

$$2\text{т.} \quad u' = A' \cos \left[2\pi \nu' \left(t' + \frac{x'}{c} \right) + \delta' \right] \quad (6)$$

С помощта на трансформациите на Лоренц

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

От /6/ имаме:

$$u' = A' \cos \left[\nu' \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \left(t + \frac{x}{c} \right) + \delta' \right]. \quad (7)$$

Вълната /6/ в K е:

$$1\text{т.} \quad u = A \cos \left[2\pi \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) + \delta \right].$$

И тя е същата като /7/.

Следователно:

Д/

$$2\text{т.} \quad \nu_0 = \nu \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} = 2,73 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Е/ Предаденият импулс от отразен фотон е:

$$7\text{т.} \quad |\Delta \vec{p}| = \frac{2h\nu_0}{c} = \frac{2h\nu}{c} \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} = 1,2 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Вместо да се извежда /9/ може да се използва формула от теорията на ефекта на Доплер.

Решение на задача 4:

А/ Както е известно E и M са постоянни и

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{R+h} = -|E|, \quad M = a(1-\varepsilon)vm, \quad \frac{v^2}{R+h} = \frac{\alpha}{m(R+h)^2}, \quad (12)$$

където:

$$\alpha = \gamma m M,$$

R е радиусът на Земята

h е височината на спътника над Земята.

В частния случай, когато траекторията е окръжност $a = R+h$ и $\varepsilon = 0$.

От /1/ за γ при $\varphi = 0$ получаваме:

$$1\tau \quad r = a(1-\varepsilon) = \frac{P}{1+\varepsilon},$$

а от първото и третото уравнения на /2/ получаваме:

$$4\tau \quad a = \frac{P}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (13)$$

Записваме сега първите две уравнения на /2/ така:

$$1\tau \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{a(1-\varepsilon)} = -|E|, \quad M = a(1-\varepsilon)vm, \quad (13')$$

и изключваме v . Получаваме квадратното уравнение:

$$2\tau \quad (1-\varepsilon)^2 - 2(1-\varepsilon) + \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2} = 0$$

Така намираме, че

$$4\tau \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}}. \quad (14)$$

Тогава от /3/ имаме:

$$2 \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}.$$

Най-сетне от правоъгълния триъгълник ODF_1 имаме ($F_1 2 = a$)

$$2\tau \quad b = \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (16)$$

От втория закон на Кеплер имаме, че площната скорост

$$2\tau \quad \sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{M}{m} = \text{const.}$$

Тогава лицето на елипсата

$$2\tau \quad \pi ab = \frac{M}{2m} T, \quad \text{и} \quad T = \pi a \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Б/ Търсената скорост определяме от уравнението:

$$2\tau \quad \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M_3}{R} = 0.$$

Получаваме:

$$1\tau \quad v = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R}} = \sqrt{2} \sqrt{\gamma R} = \sqrt{2} v_T.$$

В/ От /1/ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ получаваме:

$$4\tau \quad r_{\min} = a(1-\varepsilon) = R+h_1, \quad r_{\max} = a(1+\varepsilon) = R+h_2, \\ 2a = 2R+h_1+h_2.$$

От /3'/ получаваме:

$$6\tau \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{R+h_1} = -E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\alpha}{2R+h_1+h_2}, \\ v = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}} \sqrt{\frac{1 + \frac{h_2}{R}}{\left(1 + \frac{h_1+h_2}{2R}\right)\left(1 + \frac{h_1}{R}\right)}},$$

$$6\tau \quad \frac{mv''^2}{R+h_1} = \frac{\alpha}{(R+h_1)^2}, \quad v'' = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}} : \sqrt{1 + \frac{h_1}{R}}.$$

Откъдето следва, че

$$v'' = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}} : \sqrt{1 + \frac{h_1}{R}}.$$

(При работата на двигателя изменението на потенциалната енергия е пренебрежимо малко.)

Така намираме:

$$2\tau. \Delta v = v'' - v = \sqrt{\frac{\alpha}{m R (1 + \frac{h_1}{R})}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{h_2}{R}}{1 + \frac{h_1 + h_2}{2R}}} \right\} = \sqrt{\frac{g R}{1 + \frac{h_1}{R}}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{h_2}{R}}{1 + \frac{h_1 + h_2}{2R}}} \right\} \approx -48,08 \frac{m}{s}.$$

II. От 33Е:

$$4\tau. v_{\infty}^2 = v^2 - 2v_I^2. \quad |7|$$

Спрямо отправна система K_0 , свързана със Слънцето от закона на Галилей следва формулата:

$$6\tau. \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}_{\infty}, \quad |7|$$

където $\vec{u}$ е скоростта на ракетата спрямо K_0 .
Повдигаме /7/ на квадрат:

$$4\tau. u^2 = u'^2 + v_{\infty}^2 + 2u'v_{\infty} \cos \theta. \quad |8|$$

Като използваме Б/ можем да положим

$$2\tau. u = \sqrt{2} u'.$$

Уравнението /8/ добива вида:

$$v_{\infty}^2 + 2u'v_{\infty} \cos \theta - u'^2 = 0.$$

Корен на това уравнение е:

$$5\tau. v_{\infty} = u' (\sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta).$$

Като заместим последния израз в /7/ получаваме:

$$v_{III} = \sqrt{u'^2 (\sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta)^2 + 2v_I^2}$$

При $\theta = 0$

$$v_{III} \approx 16,6 \frac{km}{s},$$

а при $\theta = \pi$

$$v_{III} \approx 72,8 \frac{km}{s}.$$