

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 - 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Специална тема

Задача 1. Монте Карло симулация на Брауново движение.

Брауновото движение е хаотичното движение на макрочастица от твърдо вещество (с размери от порядъка на микрометър) под действие на некомпенсираните удари от страна на околните атоми или молекули на газа или течността, в която тя е потопена.

През 1905 г. Айнщайн е получил, че средноквадратичното преместване $\sqrt{l^2}$ на една частица е пропорционално на времето, за което то е измерено, на някаква степен k , т.е. $\sqrt{l^2} = c \cdot t^k$. Константата c зависи от температурата на средата, радиуса на частицата и вискозитета на газа или течността. Средноквадратичното преместване $\sqrt{l^2}$ се дефинира така: $\sqrt{l^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N l_i^2}{N}}$, където l_i е преместването при i -тото измерване, а N е броят на измерванията.

Тук ще намерите опитно неизвестната степен k като използвате т. нар. Монте Карло симулация. За целта ще изследвате случайното движение на обект по възлите на една квадратна решетка и ще получите как зависи средноквадратичното преместване $\sqrt{l^2}$ от броя стъпки m (в този модел m има смисъл на времето). Разполагате с квадратна решетка (на отделен лист), обект (стотинка или пионка), зарче и чашка, в която да го хвърляте. Тръгвате всеки път от центъра на решетката (0,0). На всяко хвърляне на зарчето правите случаен ход (нагоре, надолу, наляво или надясно) до съседен възел.

а) Опишете как избирате да превръщате показанието на зарчето в посока (нагоре, надолу, наляво или надясно)? [1 т.]

б) Хвърляйки зарчето извършете 10 последователни случайни хода с обекта като записвате всичките му 10 положения. Повторете това 10 пъти. Нанесете резултатите в предоставената ви таблица. Предварително помислете как да ги нанесете, за да ги обработвате после най-лесно (разполагате само с една резервна таблица). [3 т.]

в) Пресметнете средноквадратичното преместване $\sqrt{l_m^2}$ за всяка стойност m на броя стъпки ($m = 1, 2, 3, \dots, 10$). Табулирайте тази зависимост отделно. [1 т.]

г) Ако предположите, че зависимостта $\sqrt{l_m^2} = f(m)$ е от типа $\sqrt{l_m^2} = c \cdot m^k$, начертайте графиката на тази зависимост, използвайки такива променливи, че лесно да намерите графично неизвестната степен k и константата c . Разстоянието между съседни възли приемете за единица. [3 т.]

д) Изчислете от графиката неизвестната степен k . [1.5 т.]

е) Изчислете от графиката константата c . [0.5 т.]

Задача 2. Пренос на топлина през прозорец.

Преносът на топлина от по-топли към по-студени части на едно вещество се нарича топлопроводимост. Ако в направлението x температурата T с променя с ΔT при промяна на координатата с Δx , то преминалото количество топлина ΔQ за интервал време Δt през площ ΔS , перпендикулярна на x , е $\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x}$. χ се нарича коефициент на топлопроводност на веществото.

а) Стая има един прозорец от единично стъкло с дебелина $d = 4 \text{ mm}$ и площ $S = 2 \text{ m}^2$. Навън температурата на въздуха е $T_{\text{out}} = 0^\circ\text{C}$. Коефициентът на топлопроводност на

стъклото е $\chi_{\text{gl}} = 0,96 \frac{\text{W}}{\text{m.K}}$. Изчислете с каква топлинна мощност P_1 електрическа печка трябва да нагрява въздуха в стаята, така че температурата вътре да е постоянна и да е равна на $T_{\text{in}} = 20^\circ\text{C}$. Теплопроводимостта на стените се пренебрегва. [1 т.]

б) Нека в този случай стаята има прозорец от стъклопакет със същата площ, съдържащ две еднакви стъкла, всяко с дебелина $d = 4 \text{ mm}$ и въздушна междина между тях с широчина $l = 16 \text{ mm}$. Приемете, че въздухът в стъклопакета е неподвижен. Коефициентът на теплопроводност на въздуха е $\chi_{\text{air}} = 0,024 \frac{\text{W}}{\text{m.K}}$. Изчислете с каква топлинна мощност P_2 електрическа печка трябва да нагрява въздуха в стаята, така че температурата вътре да е постоянна и да е равна на $T_{\text{in}} = 20^\circ\text{C}$. [3 т.]

в) Изчислете температурата T_1 на външната страна на вътрешното стъкло и температурата T_2 на вътрешната страна на външното стъкло. [1 т.]

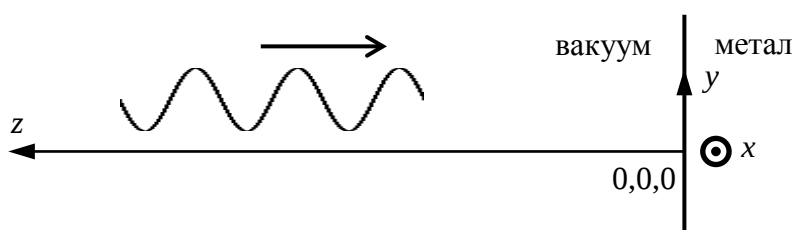
г) Ако за газове коефициентът на теплопроводност χ зависи от техни други характеристики така: $\chi = \text{const} \cdot c_V^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot \bar{v}^\gamma \cdot \lambda^\delta$, където const е число, c_V е специфичният топлинен капацитет на газа при постоянен обем, ρ е плътността му, $\bar{v}$ е средната скорост на молекулите му, а λ е средната им дължина на свободен пробег, то намерете неизвестните степени α, β, γ и δ . [2 т.]

д) Използвайки получения резултат от предното подусловие и предполагайки, че благородните газове при нормални условия добре се описват от модела на идеалния газ, изчислете коефициента на теплопроводност на газа криптон χ_{Kr} при стайни условия. Дадени стойности: коефициент на теплопроводност на газа аргон $\chi_{\text{Ar}} = 17,7 \cdot 10^{-3} \text{ W/m.K}$ (при стайни условия), моларна маса на газа аргон $\mu_{\text{Ar}} = 39,9 \text{ g/mol}$, моларна маса на газа криптон $\mu_{\text{Kr}} = 83,8 \text{ g/mol}$, атомен радиус на аргона $r_{\text{Ar}} = 188 \text{ pm}$, атомен радиус на криптона $r_{\text{Kr}} = 202 \text{ pm}$. Какъв ще е ефектът върху преноса на топлина през стъклопакета, ако въздухът в междината между двете стъкла се замени с газ аргон (или газ криптон)? [3 т.]

Задача 3. Стояща електромагнитна вълна и микровълнова печка. (Задачата се състои от две независими подусловия)

А. Стояща електромагнитна вълна

Известно е, че в свободно пространство (вакуум) плоската бягаща електромагнитна вълна е напречна, векторите на посоката на разпространение, на интензитета на електричното поле и на индукцията на магнитното поле образуват дясна тройка и последните два вектора трептят във фаза. Амплитудите им са свързани така: $E_0 = cB_0$, където $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ е скоростта на светлината. Ако обаче една бягаща вълна пада перпендикулярно върху метал (идеален проводник), тя се отразява напълно и в обратна посока започва да се разпространява втора бягаща вълна. Тези две бягащи в противоположни посоки вълни образуват стояща вълна. От факта, че отразяващата повърхност е проводяща, следва че тангенциалната компонента на вектора на интензитета на електричното поле на границата вакуум-метал трябва да е нула (това са т. нар. гранични условия). Това налага характерни ограничения върху разпределението на електричното и магнитното поле на възникващата стояща вълна.



Нека надясно към границата вакуум-метал се разпространява плоска бягаща линейно-поляризирана монохроматична вълна с интензитет на електричното поле $\vec{E}_1 =$

$(E_{1x}, 0, 0)$, $E_{1x} = E_{10} \cos(kz + \omega t + \varphi)$, където $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$, λ – дължина на вълната, ν – честота на вълната. Изразете чрез дадените параметри E_{10} , k , ω и φ :

- а) вектора на магнитната индукция $\vec{B}_1$ на падащата вълна [0.5 т.]
- б) вектора на интензитета на електричното поле $\vec{E}_2$ на отразената вълна [0.5 т.]
- в) вектора на магнитната индукция $\vec{B}_2$ на отразената вълна [0.5 т.]
- г) вектора на интензитета на електричното поле $\vec{E}_3$ на стоящата вълна [1 т.]
- д) вектора на магнитната индукция $\vec{B}_3$ на стоящата вълна [1 т.]
- е) Къде се намират възлите на електричното и на магнитното поле на стоящата вълна? [0.5 т.]

ж) Колко е стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време, когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е максимална? [0.5 т.]

з) Колко е стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време, когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е нула? [0.5 т.]

Б) Микровълнова печка.

В куха метална правоъгълна призма, каквато е пешта на микровълновата печка, могат да съществуват различни стоящи електромагнитни вълни с различно разпределение на техните електрични и магнитни полета. По-нататък ще описваме само електричното им поле. Нека размерите на пешта са $a = 29$ cm (по x), $b = 29$ cm (по y) и $h = 19$ cm (по z). Центърът на координатната система е избран в единия от ъглите на пешта. Граничните условия налагат ограничения върху разпределението на електричното поле и за стояща електромагнитна вълна то трябва да има следния вид:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z),$$

$$E_x = E_{0x} \cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi lz}{h}\right) \cos(\omega t + \varphi),$$

$$E_y = E_{0y} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi lz}{h}\right) \cos(\omega t + \varphi),$$

$$E_z = E_{0z} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi lz}{h}\right) \cos(\omega t + \varphi).$$

Числата m , n и l са цели, а $\omega = 2\pi\nu$. Съответно тази стояща вълна се нарича мод (m, n, l) . Резонансната честота ν и числата m , n и l трябва да удовлетворяват следното равенство $\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{h}\right)^2 = 4\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$

а) Кой мод (m, n, l) има минимална честота ν ? [0.5 т.] Изчислете нейната стойност. [0.5 т.] Опишете (или нарисуйте) разпределението на електричното поле в този мод. [0.5 т.]

б) Източникът на микровълновото лъчение в микровълновата печка е магнетрон, излъчващ електромагнитна вълна с честота $\nu = 2,450$ GHz. Намерете модовете (m, n, l) , чиито резонансни честоти лежат в интервала (2,400 GHz, 2,500 GHz) и изчислете тези честоти с точност 5 знака. [2 т.] Кой от тях има честота, най-близка до тази на магнетрона (т.е. е най-вероятно този мод да се възбуди в пешта)? [0.5 т.]

в) Опитът на Винер показва, че стоящата електромагнитна вълна отдава своята енергия на поглъщащо вещество най-много там, където са върховете на нейното електрично поле. Ако в микровълновата печка се е възбудил само модът с честота, най-близка до тази на магнетрона и неговото електрично поле е от типа $\vec{E} = (0, 0, E_z)$, къде трябва да поставим тънка пица, за да се стопли най-бързо? [0.5 т.] Къде ще се стопли най-бавно? [0.5 т.]

Полезна математика: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;
 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

