

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално състезание по физика, Хисаря, 16 март 2013 г.
Специална тема

Задача 1. Алпийски тролей.

“Алпийският тролей” е техника в алпинизма за придвижване (бързо спускане) по въже. Алпинистът е закачен за носещото въже посредством стоманено устройство, съдържащо малки макари, наречено “десандъор”. Така триенето може се сведе до минимум.

В тази задача моделът е следния: Неразтегливо въже с пренебрежима маса и дължина l е закачено в двата си края на две точки, намиращи се на една и съща височина и на разстояние d една от друга ($d < l$). Земното ускорение е g . Материална точка (тяло) с маса m се хлъзга без триене по въжето. Траекторията на движението на тялото е елипса.

а) Изразете двете полуоси a и b на елипсата чрез l и d . [1 т.]

б) Нека преди началото на движението тялото се намира в покой точно под едната точка на окачване. Този покой се осигурява от второ спомагателно хоризонтално въже (за което е вързано тялото). Намерете силата на опън T_1 на носещото въже и силата на опън T_2 на спомагателното въже. [2 т.]

в) Тялото се отвързва от спомагателното въже. Колко е силата на опън T_3 на носещото въже в този момент? [1 т.]

г) С каква скорост v тялото преминава през най-ниската точка от траекторията си? [2 т.]

д) При каква стойност на отношението d/l , скоростта v ще е максимална? [2 т.]

е) След време тялото извършва малки трептения около най-ниската точка от траекторията си. Какъв е периодът T_0 на тези трептения? [2 т.]

Задача 2. Електростатичен (кондензаторен) микрофон.

Електростатичният (кондензаторен) микрофон е изобретен през 1916 г. в Bell Labs. И досега се използва широко заради добрите му технически характеристики: слаба честотна зависимост на чувствителността му и нисък шум. Има един недостатък – цената му е висока.

В тази задача моделът е следния: Електрична верига е съставена от последователно свързани идеален източник на напрежение с електродвижещо напрежение $E = 9,00$ V, резистор с електрично съпротивление $R = 2,00$ G Ω и плосък кондензатор с капацитет $C_0 = 10,0$ pF. Равновесното разстояние между плочите на кондензатора е d_0 . Едната плоча на кондензатора е много лека и може да се разтрепти от падаща звукова вълна. Окачването на тази плоча е такова, че възвръщащата сила може да се пренебрегне.

а) Нека заради падаща звукова вълна разстоянието между плочите на кондензатора се мени по закона $d(t) = d_0[1 + \alpha \sin(\omega t)]$, където $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ е кръговата честота на

монохроматичния звук, а $\alpha \ll 1$. Оказва се, че тогава върху резистора може да се измери променливо напрежение $U_R(t) = U_{R0} \sin(\omega t + \varphi)$. Получете изрази за U_{R0} и φ .

[3 т.]

б) Получете приближена формула за $U_R(t)$, валидна за областта на чуване (20 Hz ÷ 20 kHz). [1 т.]

в) Нека падащият върху микрофона звук представлява надлъжна бягаща монохроматична вълна, описвана от уравнението

$u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$, където u_0 е амплитудата на трептене на

частиците на въздуха, а λ и T – съответно дължината и периода на вълната. Ако предположите, че звукът предизвиква адиабатни разширения и свивания на въздуха ($\gamma = 1,4$ е показателят на адиабатата за въздуха), такива, че налягането на въздуха се мени по закона $p(t) = p_0 + p_1 \sin(\omega t + \varphi)$, намерете израз за p_1 . [2 т.]

г) Нека подвижната плоча на кондензатора има маса $m = 0,500$ g и площ $S = 10,0$ cm². Нека описваме енергията, пренесена от звука през единица площ за единица време с понятието интензитет I на звука. Той зависи от скоростта c на разпространение на звука, плътността ρ на въздуха, кръговата честота ω и амплитудата u_0 на звука така: $I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 u_0^2$. Вместо да се мери в единици W/m² обаче, интензитетът на звука

обикновено се дава в децибели (dB), като $I[\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{I[\text{W/m}^2]}{I_0} \right)$, където $I_0 = 1.10^{-12}$

W/m² (точно) е така наречения “праг на чуване”. Нека върху микрофона пада звук с интензитет $I = 50,0$ dB и честота $\nu = 1,00$ kHz. Каква амплитуда U_0 на напрежението ще се измери върху резистора? Плътността на въздуха е $\rho = 1,20$ kg/m³. Скоростта на звука във въздуха е $c = 340$ m/s. Атмосферното налягане е $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Pa. Приемете, че налягането на въздуха между двете плочи на кондензатора не се променя. Също така приемете, че звукът изцяло се поглъща от плочата на кондензатора (няма отразена вълна) [3 т.]

д) Изчислете разстоянието d_0 между плочите на кондензатора? [0.5 т.]

е) Изчислете дебелината h на подвижната плоча на кондензатора, ако е направена от сплав с плътност $\rho_C = 5,00 \cdot 10^3$ kg/m³? [0.5 т.]

Навсякъде в тази задача ефектите от електростатичното привличане между двете плочи на кондензатора се пренебрегват.

Задача 3. Вълнички в басейн.

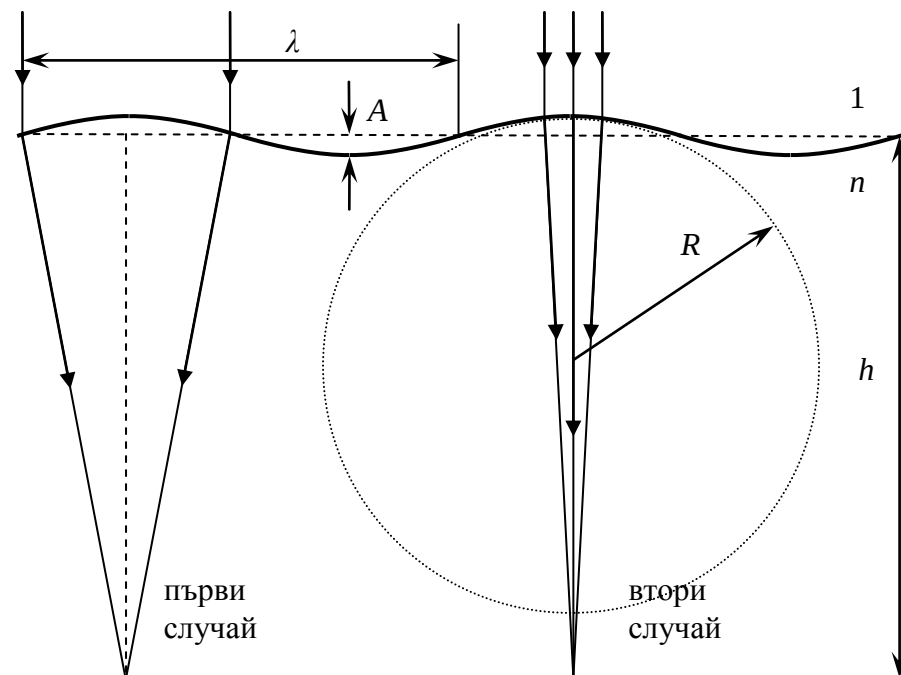
В хубав слънчев ден може да се забележи, че по дъното на басейн се образуват красиви постоянно движещи се светли ивици (петна). Причината за тяхната поява е пречупването на светлината от нагънатата от вълнички водна повърхност. Тук ще се разгледат два частни случая. Басейнът е пълен с вода с показател на пречупване $n = 1,33$, над него има въздух, чиито показател на пречупване може да се приеме за единица. Дълбочината на басейна е $h = 2,00$ m. Нека по повърхността на водата се разпространява една единствена вълна. Да предположим, че тя създава вертикални отклонения на водната повърхност $z(x) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$, където A е амплитудата на

вълната, а λ и T – съответно дължината и периода на вълната, x – хоризонтална координата, z – вертикално отклонение. $\lambda = 20,0$ cm. Приемете, че $A \ll \lambda \ll h$.

а) Първи случай. Изчислете амплитудата A_1 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи върху двете “плоски” наклонени страни на един връх на вълната, ще достигат дъното в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната. [4 т.]

б) Нека да си представим, че повърхността около върха на вълната може да се апроксимира (приближено да се описва) с цилиндрична повърхност с радиус R . Намерете радиуса $R = f(\lambda, A)$ [2 т.]

в) Втори случай. Изчислете амплитудата A_2 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи около и във върха на вълната, ще достигат дъното на басейна в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната. (т.е. върхът на вълната ще работи като цилиндрична леща с фокус, намиращ се на дъното на басейна) [4 т.]



Чертежът е само за илюстрация. Отношенията на дадените размери h, λ, A, R не са верни! Освен това двата случая не са възможни за една и съща амплитуда A .

Полезна математика:

1. Елипсата е такава крива, че сумата от разстоянията от произволна точка на елипсата до две точки, наречени фокуси на елипсата, е константа. В декартова координатна система с начало в центъра на елипсата и оси, ориентирани по осите на симетрия на елипсата, уравнението на елипсата е $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, където a и b са двете полуоси на елипсата. Интересно "оптично" свойство на елипсата е, че лъч, тръгнал от единия фокус, след "отражение" от елипсата минава през другия фокус на елипсата.

2. Равенството $A \sin x + B \cos x = 0$ е твърдение за всяко x тогава и само тогава, когато $A \equiv 0 \wedge B \equiv 0$.

3. Радиус ρ на кривината на крива, описвана с уравнението $y(x)$ в точка от кривата с

$$\text{координати } (x_0, y(x_0)), \text{ е } \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \bigg|_{x=x_0} \quad 4. (1+x)^n \approx 1+nx, \quad x \ll 1$$

$$5. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$6. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$7. \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}, \quad \frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a \sin(ax), \quad \frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a \cos(ax)$$

$$8. \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] g(x) + f(x) \left[\frac{d}{dx} g(x) \right] \quad 9. \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha, \quad \alpha \ll 1$$