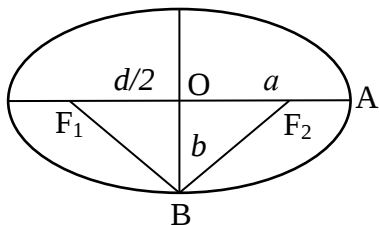
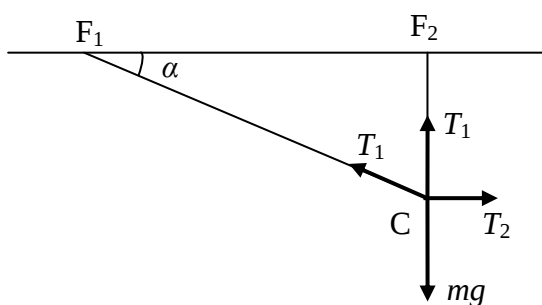


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално състезание по физика, Хисаря, 16 март 2013 г.
Решения на специалната тема

Задача 1. Алпийски тролей.



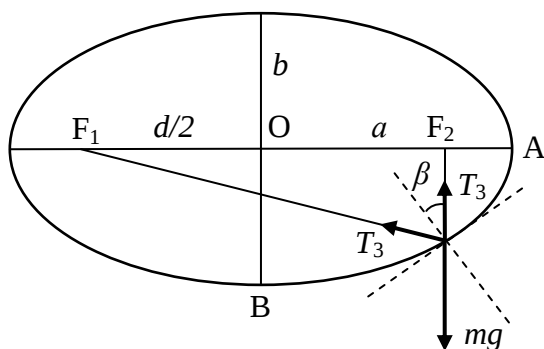
а) Нека a е хоризонталната полуос на елипсата, а b – вертикалната. От чертежа се вижда, че $F_2A + AF_1 = l = 2a$, следователно $a = l/2$. **[0.5 т.]** От триъгълника $OB F_2$ следва, че $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, откъдето $b = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}$ **(1.2).** **[0.5 т.]**



б) Тъй като тялото е в покой, сумата от действащите му сили е нула. Следователно $mg = T_1(1 + \sin \alpha)$ **[0.25 т.]** и $T_2 = T_1 \cos \alpha$. **[0.25 т.]** Нека бележим дължината на CF_2 с l_2 . Тогава $\sin \alpha = l_2 / l - l_2$ **[0.25 т.]** **(1.3).** От уравнението на елипсата следва $\left(\frac{d/2}{a}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{b}\right)^2 = 1$ **(1.4).** **[0.25 т.]** След заместването на a и b с изразите им от

(1.1) и **(1.2)**, **(1.4)** се преобразува до $l_2 = \frac{l^2 - d^2}{2l}$ **(1.5).** Замествайки **(1.5)** в **(1.3)**,

$\sin \alpha = \frac{l^2 - d^2}{l^2 + d^2}$. Така $T_1 = \frac{mg}{2} \left[1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2 \right]$ **[0.5 т.]**, а $T_2 = mg \frac{d}{l}$. **[0.5 т.]**



в) След отвързването на спомагателното въже, скоростта на тялото все още е нула. Следователно тялото започва да се движи с тангенциално към траекторията ускорение. Следователно сумата от проекциите на действащите сили върху нормалата е нула. Използвайки “оптичното” свойство на елипсата следва, че и двете сили на опън T_3 сключват един и същи ъгъл β с нормалата.

Следователно $2T_3 \cos \beta = mg \cos \beta$, или $T_3 = mg/2$ **[1 т.]**

г) Прилагайки закона за запазване на механичната енергия за началната точка и за най-ниската точка от траекторията, получаваме $mg(b - l_2) = mv^2/2$. **(1.6)** **[0.5 т.]**

Замествайки **(1.2)** и **(1.5)** в **(1.6)**, $v = \sqrt{2g(b - l_2)} = \sqrt{gl} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2}}$. **[1.5 т.]**

д) Замествайки отношението $(d/l)^2$ с z търсим максимум на функцията $f(z) = \sqrt[4]{1-z} \cdot \sqrt{1-\sqrt{1-z}}$. [0.5 т.] Нейната първа производна се нулира за $z = 3/4$.

[0.5 т.] Следователно търсеното отношение е $d/l = \sqrt{3}/2$ [1 т.]

е) Нека представим потенциалната енергия на тялото около най-ниската точка от траекторията: $E_p = mgy = mg \left(-b + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 \right) = mg \left(-b + \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} x^2 \right)$. [1 т.] Тъй като

кинетичната енергия е $E_k = \frac{1}{2} mv^2$, то периодът на трептене е $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mgb/a^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2}{bg}}$. Използвайки (1.1) и (1.2) $T_0 = \frac{l}{\sqrt{2g} \sqrt[4]{l^2 - d^2}}$. [1 т.]

Задача 2. Електростатичен (кондензаторен) микрофон.

а) Когато разстоянието между плочите на кондензатора се мени по закона $d(t) = d_0 [1 + \alpha \sin(\omega t)]$, (2.1) капацитетът на кондензатора се мени с времето така:

$C(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 [1 + \alpha \sin(\omega t)]} \approx \frac{\epsilon_0 S}{d_0} [1 - \alpha \sin(\omega t)]$. (2.2) От закона на Ом за цялата верига следва

$E = RI(t) + \frac{q(t)}{C(t)}$. (2.3) Нека допуснем, че зарядът върху плочите на кондензатора зависи

от времето така: $q(t) = q_0 [1 + \beta \sin(\omega t + \varphi)]$. (2.4) Тогава токът е

$I(t) = \dot{q}(t) = q_0 \beta \omega \cos(\omega t + \varphi)$. (2.5) Замествайки (2.2), (2.4) и (2.5) в (2.3), се получава

$$E = Rq_0 \beta \omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{q_0 [1 + \beta \sin(\omega t + \varphi)]}{\frac{\epsilon_0 S}{d_0} [1 - \alpha \sin(\omega t)]} \approx$$

$$\approx Rq_0 \beta \omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{q_0}{C_0} [1 + \beta \sin(\omega t + \varphi)] [1 + \alpha \sin(\omega t)].$$
 (2.6) След опростяване (2.6)

изглежда така: $RC_0 \beta \omega \cos(\omega t + \varphi) + \alpha \sin(\omega t) + \beta \sin(\omega t + \varphi) = 0$

Електростатичният (кондензаторен) микрофон е изобретен през 1916 г. в Bell Labs. И досега се използва широко заради добрите му технически характеристики: слаба честотна зависимост на чувствителността му и нисък шум. Има един недостатък – цената му е висока.

В тази задача моделът е следния: Електрична верига е съставена от последователно свързани идеален източник на напрежение с електродвижещо напрежение $E = 9,00$ V, резистор с електрично съпротивление $R = 2,00$ G Ω и плосък кондензатор с капацитет $C = 10,0$ pF. Равновесното разстояние между плочите на кондензатора е d_0 . Едната плоча на кондензатора е много лека и може да се разтрепти от падаща звукова вълна. Окачването на тази плоча е такова, че възвръщащата сила може да се пренебрегне.

а) Нека заради това трептене разстоянието между плочите на кондензатора се мени по закона $d(t) = d_0 [1 + \alpha \sin(\omega t)]$, където $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ е кръговата честота на

монохроматичния звук, а $\alpha \ll 1$. Оказва се, че тогава върху резистора може да се измери променливо напрежение $U_R(t) = U_{R0} \sin(\omega t + \varphi)$. Получете изрази за U_{R0} и φ .

[3 т.]

б) Получете приближена формула за U_{R0} , валидна за областта на чуване

(20 Hz ÷ 20 kHz). **[1 т.]**

в) Нека падащият върху микрофона звук представлява надлъжна бягаща монохроматична вълна, описвана от уравнението

$$u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right), \text{ където } u_0 \text{ е амплитудата на трептене на}$$

частиците на въздуха, а λ и T – съответно дължината и периода на вълната. Ако предположите, че звукът предизвиква адиабатни разширения и свивания на въздуха ($\gamma = 1,4$ е показателят на адиабатата за въздуха), такива, че налягането на въздуха се мени по закона $p(t) = p_0 + p_1 \sin(\omega t + \psi)$, намерете израз за p_1 . **[2 т.]**

г) Нека подвижната плоча на кондензатора има маса $m = 0,500$ g и площ $S = 10,0$ cm². Нека описваме енергията, пренесена от звука през единица площ за единица време с понятието интензитет I на звука. Той зависи от скоростта c на разпространение на звука, плътността ρ на въздуха, кръговата честота ω и амплитудата u_0 на звука така:

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 u_0^2. \text{ Вместо да се мери в единици W/m}^2 \text{ обаче, интензитетът на звука}$$

обикновено се дава в децибели (dB), като $I[\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{I[\text{W/m}^2]}{I_0} \right)$, където $I_0 = 1.10^{-12}$

W/m² (точно) е така наречения “праг на чуване”. Нека върху микрофона пада звук с интензитет $I = 50,0$ dB и честота $\nu = 1,00$ kHz. Каква амплитуда U_0 на напрежението ще се измери върху резистора? Плътността на въздуха е $\rho = 1,20$ kg/m³. Скоростта на звука във въздуха е $c = 340$ m/s. Атмосферното налягане е $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Pa. Приемете, че налягането на въздуха между двете плочи на кондензатора не се променя. Също така приемете, че звукът изцяло се поглъща от плочата на кондензатора (няма отразена вълна) **[3 т.]**

д) Изчислете разстоянието d_0 между плочите на кондензатора? **[0.5 т.]**

е) Изчислете дебелината h на подвижната плоча на кондензатора, ако е направена от сплав с плътност $\rho_C = 5,00 \cdot 10^3$ kg/m³? **[0.5 т.]**

Навсякъде в тази задача ефектите от електростатичното привличане между двете плочи на кондензатора се пренебрегват.

Задача 3. Вълнички в басейн.

а) Наклонът на водната повърхност в произволна точка е равен на производната $\frac{dz}{dx} = A_1 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$. **[0.5 т.]** Следователно “плоската” част на вълната сключва

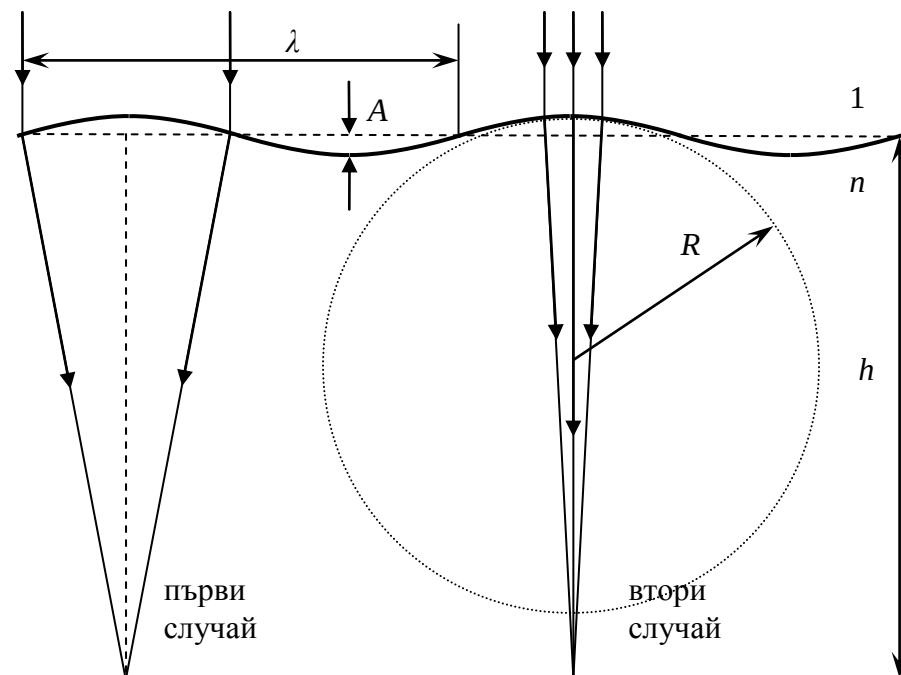
ъгъл α с хоризонталата, равен на $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{2\pi A_1}{\lambda}$. **[0.5 т.]** Това е и ъгълът, който

сключва падащият вертикален лъч с нормалата на “плоската” част на вълната. **[0.5 т.]**

От закона на Снелиус, следва: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n}{1} = n \approx \frac{\alpha}{\beta}$. **[0.5 т.]** От чертежа може да се намери,

че $\frac{\lambda/4}{h} = \tan(\alpha - \beta) \approx \alpha - \beta = \frac{n-1}{n} \alpha = \frac{(n-1)}{n} \frac{2\pi A_1}{\lambda}$. **[0.5 т.]** Следователно $A_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{n}{n-1} \frac{\lambda^2}{h}$

[1 т.] След заместване с дадените стойности, $A_1 \approx 2,39$ mm. **[0.5 т.]**



б) нека центърът на окръжността, апроксимираща върха на вълната се намира на дълбочина d ($d = R - A$) под водната повърхност. Тогава около върха на вълната, нейната повърхност може да се опише с уравнението $x^2 + (z + d)^2 = R^2$ (ако приемем, че началото на координатната система е под върха на вълната). След заместване, $x^2 + [z + (R - A)]^2 = R^2$ преобразования $z \approx A - \frac{x^2}{2R}$. (3.1) От друга страна около върха на

вълната $z(x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = A \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)} \approx A - A \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)^2 = A - \frac{2\pi^2 A x^2}{\lambda^2}$. (3.2) От

сравняването на (3.1) с (3.2), $\frac{x^2}{2R} = \frac{2\pi^2 A x^2}{\lambda^2}$, откъдето $R = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{A}$

а) Първи случай. Изчислете амплитудата A_1 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи от двете “плоски” наклонени страни на един връх на вълната, ще достигат дъното в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната. [4 т.]

б) Нека да си представим, че повърхността около върха на вълната може да се апроксимира (приближено да се описва) с цилиндрична повърхност с радиус R . Намерете радиуса $R = f(\lambda, A)$ [2 т.]

в) Втори случай. Изчислете амплитудата A_2 на вълната, при която вертикални лъчи, падащи около и във върха на вълната, ще достигат дъното на басейна в точка, намираща се точно под същия този връх на вълната. (т.е. върхът на вълната ще работи като цилиндрична леща с фокус, намиращ се на дъното на басейна) [4 т.]