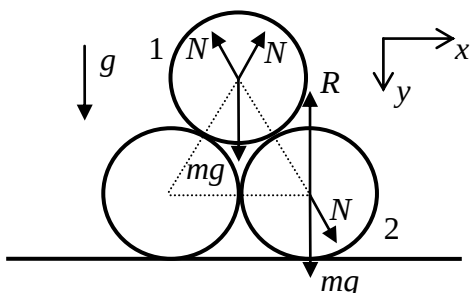


**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**  
**Национално състезание по физика, Шумен, 11 април 2012 г.**  
**Специална тема – решения на задачите**

**Задача 1. Пирамида от цилиндри.**



а) Силите, действащи на горния цилиндър - (1) и десния цилиндър - (2), са нарисувани на фигурата. Очевидно ускорението  $a_2$  е хоризонтално, докато от съображения за симетрия ускорението  $a_1$  е вертикално. Следователно

$$mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N = ma_1 \quad (1.1) \quad [0,25 \text{ т.}]$$

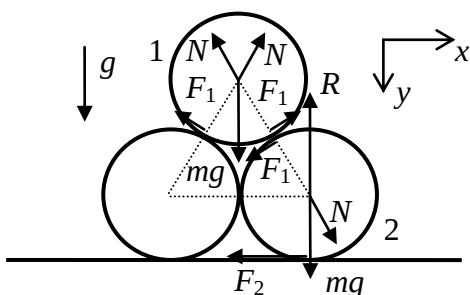
$$\frac{N}{2} = ma_2 \quad (1.2) \quad [0,25 \text{ т.}]$$

Тъй като цилиндрите се допират, при преместване на цилиндър 1 надолу на  $\Delta y$ ,

цилиндър 2 се премества надясно на  $\Delta x$ , като  $(r + \Delta x)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}2r - \Delta y\right)^2 = (2r)^2$  [0,25 т.],

откъдето  $r^2 + 2r\Delta x + \Delta x^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3}r\Delta y + \Delta y^2 = 4r^2$ . След пренебрегване на вторите степени на малките премествания и опростяване се получава  $\Delta x = \sqrt{3}\Delta y$ . Следователно и  $v_2 = \sqrt{3}v_1$ , откъдето и  $a_2 = \sqrt{3}a_1$  [0,25 т.] (1.3). Замествайки (1.3) в (1.2) и решавайки

системата уравнения (1.1) и (1.2), се получава  $a_1 = \frac{g}{7}$  [0,5 т.],  $a_2 = \frac{\sqrt{3}g}{7}$  [0,5 т.].



б) след като цилиндрите са в покой, резултантната сила и въртящ момент, действащи на всеки един от тях, трябва да са нула. За цилиндър 1:

$$(\text{по } y) \quad mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = 0 \quad (1.4), \quad F_1 \leq kN \quad (1.5)$$

За цилиндър 2:

$$(\text{по } x) \quad \frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.6), \quad F_2 \leq kR \quad (1.7),$$

$$(\text{по } y) \quad mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.8), \quad (\text{няма въртене}) \quad F_2 \cdot r - F_1 \cdot r = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.9).$$

От (1.9) следва, че  $F_1 = F_2 = F$  [0,25 т.]. Замествайки в (1.6) се получава

$$N = (2 + \sqrt{3})F \leq (2 + \sqrt{3})kN \quad (1.10) \quad [0,25 \text{ т.}], \quad \text{откъдето } k \geq \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \approx 0,268 \quad [0,5 \text{ т.}]. \text{ Остава}$$

да се провери, че при такива стойности на  $k$  е изпълнено и (1.7). Замествайки (1.10) в (1.8) се получава  $mg + N = R$ , следователно, когато  $F_1$  е сила на триене при покой,  $F_2$  също е сила на триене при покой. [0,25 т.]

в) Използвайки чертежа от подусловие б), написваме уравненията за движение на цилиндрите 1 и 2:

(за 1 по у)  $mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = ma_3$  (1.11) **[0,25 т.]**

(за 2 по х)  $\frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = ma_4$  (1.12) **[0,25 т.]**

(за 2 по у)  $mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0$  (1.13) **[0,25 т.]**

$F_1 = kN$  (1.14),  $F_2 = kR$  (1.15), и кинематичното условие от подусловие а)  $a_4 = \sqrt{3}a_3$  (1.16). (общо **[0,25 т.]**)

Замествайки (1.14) в (1.11) се получава  $N = \frac{m(g - a_3)}{k + \sqrt{3}}$  (1.17) **[0,5 т.]**. Замествайки (1.14),

(1.15) и (1.16) в (1.12) и (1.13), след преобразувания се получава:

$(1 - \sqrt{3}k)N - 2kR = m2\sqrt{3}a_3$  (1.12a) **[0,5 т.]**

$2kmg + k(k + \sqrt{3})N - 2kR = 0$  (1.13a). **[0,5 т.]**

Изваждайки (1.13a) от (1.12a) и замествайки  $N$  с израза от (1.17), след преобразувания се получава

$a_3 = g \frac{3k^2 + 4\sqrt{3}k - 1}{k^2 - 7}$  (1.18) **[0,5 т.]** и  $a_4 = \sqrt{3}a_3$ .

г) ускоренията  $a_3$  и  $a_4$  в подусловие в) са получени при допускане, че има хлъзгане както между цилиндрите, така и между цилиндрите и хоризонталната повърхност. Условието за хлъзгане между цилиндрите и хоризонталната повърхност е:  $\varepsilon < a_4$  (1.19) **[0,5 т.]**, където  $\varepsilon$  е ъгловото ускорение на цилиндър 2. То може да се получи от уравнението за въртливото движение на цилиндър 2:

$F_2r - F_1r = I\varepsilon$  **[0,25 т.]** (1.20), където  $I = \frac{1}{2}mr^2$  (инерчен момент на еднороден цилиндър). Използвайки (1.14), (1.15), (1.16) и (1.19), (1.20) се преобразува до

$k(R - N) < \frac{\sqrt{3}}{2}ma_3$  **[0,25 т.]** (1.20a). Замествайки (1.18) в (1.17) се получава

$N = \frac{2mg(k + \sqrt{3})}{7 - k^2}$  (1.21) **[0,25 т.]**. Използвайки (1.13a), се получава  $R = mg + \frac{k + \sqrt{3}}{2}N$

**[0,25 т.]**, и оттам, отчитайки (1.21):  $R - N = mg + \frac{(k + \sqrt{3} - 2)2mg(k + \sqrt{3})}{2(7 - k^2)}$  **[0,5 т.]** (1.22).

Замествайки (1.22) в (1.20a) и отчитайки (1.18), след преобразувания се получава неравенство за  $k$ :  $(7\sqrt{3} - 4)k^2 + 4(8 - \sqrt{3})k - \sqrt{3} < 0$  (1.23) **[0,5 т.]**. Тъй като  $k$  е положително, неравенството е изпълнено за  $k \in (0, k_1)$ , където

$k_1 = \frac{-2(8 - \sqrt{3}) + \sqrt{17^2 - 4 \cdot 17 \cdot \sqrt{3}}}{7\sqrt{3} - 4} \approx 0,0676$ . **[0,5 т.]**

## **Задача 2. Брауново движение**

А) Движението на центъра на масата на частицата е свързано с три степени на свобода и следователно средната кинетична енергия на това движение е:

(1)  $\bar{E}_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$

Като вземем предвид приближението за средната скорост:

(2)  $\bar{v}^2 \approx (\bar{v})^2$ ,

получаваме:

$$(3) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Понеже:

$$(4) \quad m = \frac{\pi \rho d^3}{6},$$

намираме:

$$(5) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{18k_B T}{\pi \rho d^3}} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Б) Общото преместване на частицата след  $N$  удара е:

$$(6) \quad \vec{R} = \vec{l}_1 + \dots + \vec{l}_N,$$

където  $\vec{l}_i$  е векторът на преместване от  $N$ -тия до  $N_1+1$ -вия удар, като по модул  $l_i = l$ .

Повдигаме равенството на квадрат и получаваме:

$$(7) \quad R^2 = Nl^2 + \sum_{i,j} \vec{l}_i \cdot \vec{l}_j.$$

Понеже  $\vec{l}_i \cdot \vec{l}_j = l^2 \cos \theta$ , а  $\theta$  приема случайни стойности от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , следва, че  $\cos \theta$  приема случайни стойности от  $-1$  до  $+1$ . Следователно:

$$(8) \quad \overline{\cos \theta} = 0.$$

Това означава, че средностатистически двойната сума от формула (15) е нула. Тогава за средното преместване след  $N$  удара имаме:

$$(9) \quad \overline{R_N^2} = Nl^2$$

или в рамките на приетото приближение:

$$(10) \quad \overline{R_N} = l\sqrt{N}$$

В) За време  $t$  частицата претърпява:

$$(11) \quad N = t/\tau$$

удара. От друга страна, средното време между два удара е:

$$(12) \quad \tau = l/\bar{v}.$$

Следователно зависимостта (9) се записва като следната функция на времето:

$$(13) \quad \overline{R^2(t)} = l\bar{v}t$$

Отчитаме по графиките координатите на частиците в различните моменти от време и пресмятаме средния квадрат на преместването на трите частици:

$$(14) \quad \overline{R^2(t)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (x_i^2(t) + y_i^2(t))$$

Резултатите са нанесени в таблицата по-долу:

| $t$ (s) | $x$ ( $\mu\text{m}$ ) | $y$ ( $\mu\text{m}$ ) | $R^2$ ( $\mu\text{m}^2$ ) | $\langle R^2 \rangle$ ( $\mu\text{m}^2$ ) | $D$ ( $\mu\text{m}^2/\text{s}$ ) |
|---------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------|
| 100     | 0                     | 5                     | 25                        | 1017                                      | 10.2                             |
|         | 10                    | -35                   | 1325                      |                                           |                                  |
|         | 40                    | -10                   | 1700                      |                                           |                                  |
| 200     | -45                   | 25                    | 2650                      | 1850                                      | 9.3                              |
|         | -25                   | 15                    | 850                       |                                           |                                  |
|         | -5                    | -45                   | 2050                      |                                           |                                  |
| 300     | 0                     | -30                   | 900                       | 4508                                      | 15.0                             |
|         | 60                    | -50                   | 6100                      |                                           |                                  |
|         | 75                    | -30                   | 6525                      |                                           |                                  |
| 400     | -45                   | 15                    | 2250                      | 5175                                      | 12.9                             |

|  |     |      |       |  |  |
|--|-----|------|-------|--|--|
|  | -45 | -35  | 3250  |  |  |
|  | -5  | -100 | 10025 |  |  |

Определянето на  $l$  може да стане по два начина.

#### I начин

За всеки от четирите момента пресмятаме:

$$(15) \quad D = \frac{\overline{R^2(t)}}{t},$$

където  $D = l\bar{v}$  и нанасяме резултатите в отделна колона на таблицата. Средната стойност на  $D$  за набора измервания е:

$$(16) \quad \bar{D} \approx 12 \mu\text{m}^2/\text{s} = 1.2 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

а средноквадратичната грешка:

$$(17) \quad \Delta D \approx 3 \mu\text{m}^2/\text{s} = 0.3 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

т.е.

$$(18) \quad D = (1.2 \pm 0.3) \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Така определяме свободния пробег  $l$ :

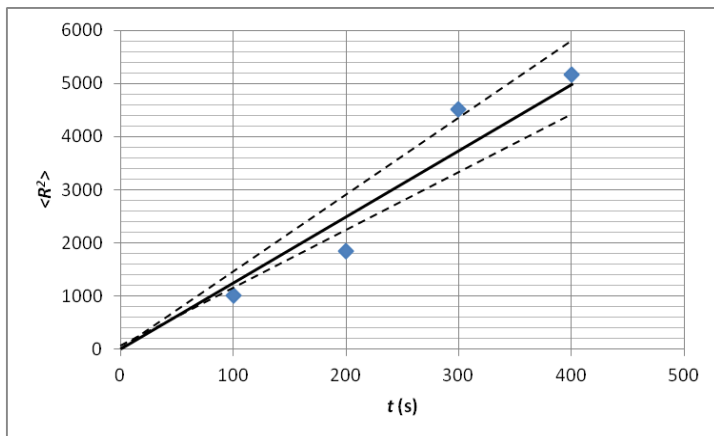
$$(19) \quad l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.4 \pm 0.6) \times 10^{-9} \text{ m}$$

и средното време между ударите:

$$(20) \quad \tau = \frac{l}{\bar{v}} = (4.9 \pm 1.2) \times 10^{-7} \text{ s}$$

#### II начин

Представяме графично зависимостта на  $\overline{R^2}$  от  $t$  и прекарваме по данните права линия, минаваща през координатното начало.



Определяме  $D$  като коефициент на наклона на правата:

$$(21) \quad D = (1.3 \pm 0.2) \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

а стойностите на  $l$  и на  $\tau$ , както по първия начин:

$$(22) \quad l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.7 \pm 0.4) \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$(23) \quad \tau = \frac{l}{\bar{v}} = (5.5 \pm 0.8) \times 10^{-7} \text{ s}$$

### Схема на оценяване на задача 2

| Елемент от решението / подусловие                                    | Точки       |
|----------------------------------------------------------------------|-------------|
| Прилага формулата за средна кинетична енергия с 3 степени на свобода | 1.0         |
| Изразява масата на частицата чрез плътността и диаметъра             | 0.5         |
| Получава израз за средната скорост                                   | 1.0         |
| Пресмята числено средната скорост                                    | 0.5         |
| <b>Общо по т. А</b>                                                  | <b>3.0</b>  |
| Представя общото преместване като сума от елементарни премествания   | 0.5         |
| Получава израз за квадрата на преместването                          | 1.0         |
| Обосновава, че $\overline{\cos \theta} = 0$                          | 1.0         |
| Получава израз за средното преместване                               | 0.5         |
| <b>Общо по т. Б</b>                                                  | <b>3.0</b>  |
| Изразява $\overline{R^2}$ като функция на $t$ , $l$ и $v$            | 0.5         |
| Снема данни за координатите и ги подрежда в таблица                  | 1.2         |
| Пресмята средни стойности на $R$ или на $R^2$                        | 0.4         |
| Обработва данните таблично или графично, за да пресметне $D$         | 0.5         |
| Обработва данните таблично или графично, за да пресметне $\Delta D$  | 0.2         |
| Определя $l$                                                         | 0.4         |
| Определя $\Delta l$                                                  | 0.2         |
| Определя $\tau$                                                      | 0.4         |
| Определя $\Delta \tau$                                               | 0.2         |
| <b>Общо по т. В</b>                                                  | <b>4.0</b>  |
| <b>Общо за задачата</b>                                              | <b>10.0</b> |

### Задача 3. Затихващи електромагнитни трептения.

а) за правилно начертана схема [0,5 т.]. Напрежението  $U_0 = E = 10,0 \text{ V}$  [0,25 т.], а токът  $I = E/R = 1,00 \text{ A}$ . [0,25 т.]

б) при пренебрегване на съпротивлението  $R$ , трептенията са незатихващи. Следователно периодът  $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 0,628 \text{ ms}$ , [0,5 т.] а от законът за запазване на енергията

$$\frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2, \text{ откъдето } U_{\max} = \sqrt{U_0^2 + \frac{LI_0^2}{C}} \approx 1000 \text{ V}, [0,75 \text{ т.}], \text{ а}$$

$$I_{\max} = \sqrt{I_0^2 + \frac{CU_{\max}^2}{L}} \approx 1,00 \text{ A}. [0,75 \text{ т.}]$$

в) ако  $x(t) = Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$ , то  $\frac{dx}{dt} = -\kappa Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi)$ , [0,25 т.] а

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \kappa^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + \kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) + \kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= (\kappa^2 - \omega^2) Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi). [0,25 \text{ т.}] \end{aligned}$$

Замествайки в даденото уравнение, се получава:

$$\begin{aligned} &(\kappa^2 - \omega^2) Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ 2\beta[-\kappa Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi)] + \omega_0^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{aligned}$$

След опростяване на уравнението:

$$(\kappa^2 - \omega^2 - 2\beta\kappa + \omega_0^2) Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2(\kappa - \beta)\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) = 0. [0,25 \text{ т.}]$$

Тъй като равенството трябва да е изпълнено за всеки момент време  $t$ , то това е възможно само, ако коефициентите пред тригонометричните функции са нули. [0,5 т.]

Тогава  $\kappa = \beta$  [0,25 т.] и  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  [0,5 т.].

г) тъй като сумата на напреженията по затворен контур трябва да е нула:

$$U_C + U_L + U_R = \frac{q(t)}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \text{ [0,25 т.]} \text{ Понеже } I = \frac{dq}{dt}, \text{ получаваме}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \text{ или } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \text{ [0,25 т.]} \text{ Използвайки решението от}$$

подусловие в), получаваме:  $q(t) = Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$ , където  $\kappa = \frac{R}{2L}$  [0,25 т.], а

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \text{ [0,25 т.]} \text{ Периодът } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \approx 0,628 \text{ ms [0,25 т.]} \text{ За да}$$

изчислим началната фаза, първо намираме  $q(0) = A \cos \varphi$  [0,25 т.], а

$\frac{dq}{dt}(0) = -A\kappa \cos \varphi - A\omega \sin \varphi$  [0,25 т.]. От тези две равенства намираме

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{dq}{dt}(0)}{\kappa + \frac{dq}{dt}(0)} \text{ [0,25 т.]} \text{ Тъй като } q(0) = CE \text{ [0,25 т.], а } \frac{dq}{dt}(0) = -\frac{E}{R} \text{ [0,25 т.], то}$$

$$\tan \varphi \approx 100 \text{ [0,25 т.], } \varphi \approx 89,4^\circ \text{ [0,25 т.]}.$$

д) тъй като в определени моменти  $t_i$  от време кондензаторът е зареден до максимални стойности и токът в тези моменти е нула, то енергията на системата в тези моменти

време ще бъде  $W(t_i) = \frac{q(t_i)^2}{2C}$  [0,25 т.], следователно енергията на системата ще зависи

от времето така:  $W(t) = W(0)e^{-\frac{R}{L}t}$  [0,25 т.]. Енергията ще намалее 2 пъти за време

$$\tau = \frac{L}{R} \ln 2 \approx 6,93 \text{ ms} \approx 11,0 T. \text{ [0,5 т.]}$$

е) Графиката на зависимостта на напрежението  $U(t)$  на кондензатора от времето изглежда така: [1 т.]

