

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**  
**НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА**

**Казанлък, 25–27 април 2025 г.**

**Решения на темата за IV състезателна група (10. клас)**

**Задача 1. Студени дни и работа на отоплителна печка с реле**

**А)** При изключен нагревател стаята се охлажда от  $t + \Delta t/2$  до  $t - \Delta t/2$  за време  $T$ . Отделеното от стаята в околната среда количество топлина е:

$$Q = C\Delta t = \alpha(t - t_0)T,$$

откъдето изразяваме времето, през което нагревателят е изключен:

$$(1) \quad T = \frac{C\Delta t}{\alpha(t - t_0)}. \quad (1 \text{ т})$$

При включен нагревател стаята се загрява от  $t - \Delta t/2$  до  $t + \Delta t/2$  за време  $\tau$ . За това време нагревателят отделя количество топлина  $P_0\tau$  на въздуха в стаята, а стаята губи количество топлина  $\alpha(t - t_0)T$  в околната среда. От уравнението за топлинен баланс следва:

$$C\Delta t = P_0\tau - \alpha(t - t_0)\tau,$$

откъдето изразяваме времето, през което нагревателят е включен:

$$(2) \quad \tau = \frac{C\Delta t}{P_0 - \alpha(t - t_0)}. \quad (1 \text{ т})$$

Нека първоначално температурата в стаята е била  $t = t_1$ , при което  $\tau = 2T$ . От уравнения (1) и (2) получаваме:

$$(3) \quad t_1 = t_0 + \frac{2P_0}{3\alpha}. \quad (1 \text{ т})$$

Във втория случай, при  $t = t_2$ ,  $2\tau = T$  и отчитайки отново (1) и (2):

$$(4) \quad t_2 = t_0 + \frac{P_0}{3\alpha}. \quad (1 \text{ т})$$

Като вземем предвид, че  $t_1 - t_2 = \Delta\theta$ , получаваме:

$$(5) \quad \frac{P_0}{\alpha} = 3\Delta\theta.$$

От уравнение (3) намираме:

$$(6) \quad t_1 = t_0 + 2\Delta\theta = 16^\circ\text{C}, \quad (0.5 \text{ т})$$

а от уравнение (4):

$$(7) \quad t_2 = t_0 + \Delta\theta = 14^\circ\text{C}. \quad (0.5 \text{ т})$$

**Б)** Нагревателят ще работи непрекъснато, ако отделената от него топлинна мощност е равна или по-малка от мощността на топлинни загуби от стаята:

$$P_0 \leq \alpha(t - t_0) \quad (0,5 \text{ т})$$

т.е., когато е зададена температура:

$$t \geq t_0 + \frac{P_0}{\alpha}. \quad (0,5 \text{ т})$$

Като вземем предвид уравнение (5), намираме:

$$t_M = t_0 + 3\Delta\theta = 18^\circ\text{C}. \quad (1 \text{ т})$$

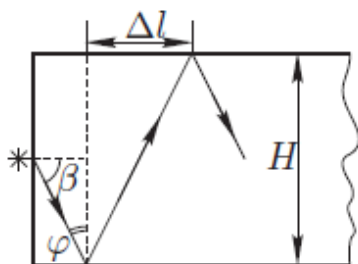
**В)** От уравнения (1) и (2) в първата подточка следва, че времето между две последователни включвания на нагревателя е:

$$(2) \quad \tau + T = \frac{C\Delta t}{P_0 - \alpha(t - t_0)} + \frac{C\Delta t}{\alpha(t - t_0)} = \frac{P_0 C \Delta t}{\alpha(t - t_0)[P_0 - \alpha(t - t_0)]} \quad (1 \text{ т})$$

Честотата на включванията е максимална, когато изразът  $y = \alpha(t - t_0)[P_0 - \alpha(t - t_0)]$  в знаменателя е най-голям **(1 т)**. За удобство означаваме  $x = t - t_0$ . Графиката на функцията  $y = \alpha P_0 x - \alpha^2 x^2$  е парабола с връх, обърнат нагоре. Върхът на параболата съответства на стойност на променливата  $x_{\max} = P_0/(2\alpha) = 3\Delta\theta/2$ . Това означава, че:

$$t_4 = t_0 + \frac{3}{2} \Delta\theta = 15^\circ\text{C}. \quad (1 \text{ т})$$

## Задача 2.



Максималният ъгъл на падане на лъчите от източника върху лявата повърхност е  $\alpha_{\max} = 90^\circ$ . От закона на Снелиус следва, че максималният ъгъл  $\beta_{\max}$  на пречупване при навлизане в пластината е такъв, че:

$$\sin \beta_{\max} = \frac{1}{n} \quad (0,5 \text{ т})$$

т.е.  $\beta_{\max}$  съответства на граничния ъгъл за пълно вътрешно отражение между стъклото и въздуха. Съответно минималният ъгъл на падане на лъчите върху горната/долната повърхност е:

$$\varphi_{\min} = 90^\circ - \beta_{\max} \quad (0,5 \text{ т})$$

Понеже  $n = 1,73 > \sqrt{2}$ , следва, че:

$$\sin \beta_{\max} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0,5 \text{ т})$$

Съответно  $\beta_{\max} < 45^\circ$  (0,5 т) и  $\varphi_{\min} > \beta_{\max}$  (1 т). Следователно всички лъчи, падащи дърху горната или долната повърхност ще претърпят пълно вътрешно отражение (1 т).

Минималното разстояние  $\Delta l$  в хоризонтална посока между две съседни отражения на лъчите от противоположните стени е:

$$\Delta l_{\min} = H \operatorname{tg} \varphi_{\min} = H \frac{\cos \beta_{\max}}{\sin \beta_{\max}} = H \sqrt{n^2 - 1}. \quad (1 \text{ т})$$

Ако  $N$  е броят отражения на даден лъч, то:

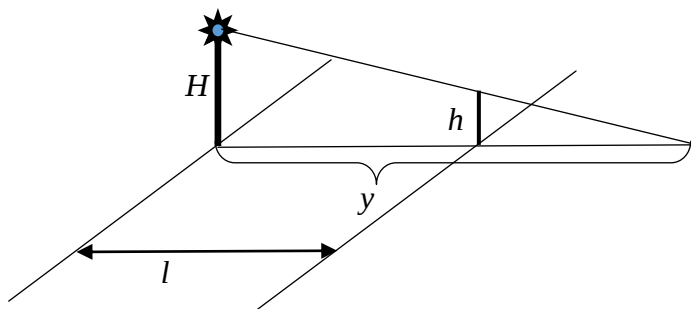
$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \Delta l_{\min} \leq L$$

Добавката (1/2) се получава защото преди първото отражение лъчът изминава от лявата повърхност разстояние  $\Delta l/2$  в хоризонтална посока. Максималният брой отражения е най-голямото цяло число, за което е в сила горното неравенство. Следователно:

$$N = \left[ \frac{L}{\Delta l_{\min}} - \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{L}{H \sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{2} \right]. \quad (1 \text{ т})$$

Като заместим с числените данни, получаваме:

$$N = 69 \quad (0,5 \text{ т})$$

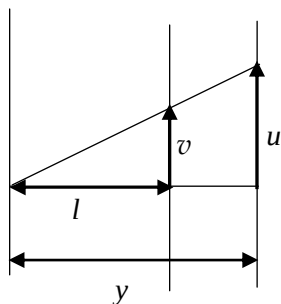


**Част 2. Поглед отстрани:** Да проверим с каква скорост се движи сянката по направление перпендикулярно на тротоара. За тази цел използваме подобни триъгълници:

$$\frac{y-l}{y} = \frac{h}{H} \quad (0,5 \text{ т})$$

$$y = \frac{lH}{H-h} = \text{const} \quad (0,5 \text{ т})$$

т.е. няма преместване в това направление и следователно скорост на сянката в тази посока е равна на нула.



**Поглед отгоре:** Да изследваме скоростта на сянката в направление правата, свързана с тротоара. Нека Иван се е преместил на разстояние  $x$  по тротоара, а сянката му на разстояние  $s$ . От подобни триъгълници следва:

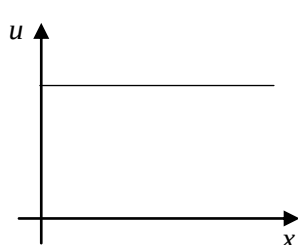
$$\frac{x}{s} = \frac{l}{y} \quad (0,5 \text{ т})$$

Като използваме полученото за  $y$  и след елементарни математически преобразувания:

$$s = \frac{xH}{H-h} \quad (0,5 \text{ т})$$

След почленно деление на интервал от време  $t$ :

$$u = \frac{vH}{H-h} = \text{const} \quad (1 \text{ т})$$



Б) Графиката  $u = u(x)$  е права успоредна на абсцисната ос **(0,5 т)**.

### Задача 3. Пружини

#### Част 1.

А) Понеже имаме 20 кубчета това означава, че те са свързани с 19 пружини. **(0,5 т)**

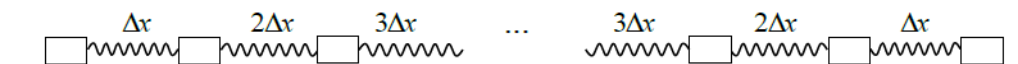
Б) За да се намира едно от тяло в покой, в контекста на задачата, е необходимо „еквивалентната“ сила на еластичност да е равна на силата на триене.

$$F_1 - F_2 = k(\Delta x_1 - \Delta x_2) = \mu mg, \quad (1 \text{ т})$$

където  $\Delta x_1, \Delta x_2$  са деформациите на двете пружини. Поради това максималното удължение на последните крайни пружини (крайна лява и крайна дясна) е:

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{k} \quad (0,5 \text{ т})$$

За вторите крайни (втора пружина от дясната страна на веригата и втора лява от лявата страна на веригата) е  $2\Delta x$ , за третите  $3\Delta x$  и т.н. **(0,5 т)**



Понеже имаме 20 тела това означава, че разполагаме с 19 пружини, т.е. 9 двойки плюс една пружина. Максималната сумарна деформация на пружините е:

$$\Delta l = 2(\Delta x + 2\Delta x + 3\Delta x + \dots 9\Delta x) + 10\Delta x \quad (0,5 \text{ т})$$

Използваме формулата:

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Максималната сумарна деформация е:

$$\Delta l = 90\Delta x + 10\Delta x = 100\Delta x \quad (0,5 \text{ т})$$

Максималната дължина на веригата е:

$$l = 19l_0 + 100 \frac{\mu mg}{k} \quad (0,5 \text{ т})$$

## Част 2.

А) Нека разгледаме малък интервал от време  $\Delta t$ . Понеже макарата се движи с постоянна скорост  $v$ , то за този интервал от време ще се придвижи надолу  $\Delta x = v\Delta t$ . Тогава общата деформация на всички пружини трябва да бъде  $2\Delta x$ . От друга страна пружините се разтеглят с еднаква сила и следователно деформацията на всяка отделна пружина е обратнопропорционална на коефициента на еластичност. Това означава, че пружината с коефициент на еластичност  $k$  ще се разтегли с  $\Delta x_1$ , пружината с  $2k$  ще се разтегли  $\Delta x_1/2$ , пружината с  $3k$  ще се разтегли с  $\Delta x_1/3$ . (0,5 т) Поради това:

$$\Delta x_1 + \frac{\Delta x_1}{2} + \frac{\Delta x_1}{3} = 2v\Delta t \quad (1 \text{ т})$$

$$\Delta x_1 = \frac{12}{11} v\Delta t \quad (0,5 \text{ т})$$

От друга страна преместването на т.А за разглеждания интервал от време е равно на деформацията на пружините  $k$  и  $2k$ .

$$\Delta x_A = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_1}{2} = \frac{3\Delta x_1}{2} = \frac{18}{11} v\Delta t \quad (0,5 \text{ т})$$

$$v_A = \frac{18v}{11} \quad (0,5 \text{ т})$$

Скоростта е постоянна с времето.

Б) Тъй като макарата се движи равномерно, във всеки момент външната сила  $F$  трябва да уравниравнява удвоената сила  $T$  на опън на нишката:

$$F = 2T \quad (1 \text{ т})$$

В момента  $t$  след началото на движението макарата се е преместила с  $vt$ , а пружината с коефициент на еластичност  $k$  се е разтегнала с:

$$\Delta x_1 = \frac{12}{11} vt \quad (0,5 \text{ т})$$

Силата на опън на всички нишки е еднаква и равна на силата на еластичност на разтегнатите пружини:

$$T = k\Delta x_1 = \frac{12kvt}{11} \quad (0,5 \text{ т})$$

Следователно външната сила е:

$$F = \frac{24kvt}{11} \quad (0,5 \text{ т})$$

Силата  $F$  трябва да нараства линейно с времето  $t$ . (0,5 т)