

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Казанлък, 25–27 април 2025 г.

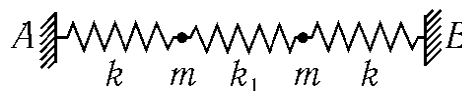
Тема за V състезателна група (11.-12. клас)

Физични константи, които можете да използвате във всички задачи:

Земно ускорение	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
Гравитационна константа	$\gamma \equiv G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Маси на частиците - електрон - протон - неутрон	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Елементарен електричен заряд	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Константа на Кулон	$k_C = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
Електрична константа	$\epsilon_0 = 1/4\pi k_C \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Магнитна константа	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$
Скорост на светлината	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Константа на Планк	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Редуцирана константа на Планк	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Атомна единица за маса	$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV.c}^{-2}$
Универсална газова константа	$R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$
Число на Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Константа на Болцман	$k_B = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Константа на Ридберг	$R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Задача 1. Трептяща система

На фиг. 1 е показана система от две частици с равни маси m , които са свързани с три пружини с коефициент на еластичност k на двете крайни пружини и k_1 на средната пружина. Частиците може да се движат само по правата AB .



Фиг. 1

В състояние на равновесие пружините са недеформирани. При отклонение на частиците от равновесие системата започва да трепти, като енергията ѝ остава постоянна. Ще означим с x_1 и v_1 съответно отклонението на лявата частица от равновесното ѝ положение и нейната скорост, а с x_2 и v_2 съответно отклонението и скоростта на дясната частица.

а) Изразете енергията E на системата чрез отклоненията на частиците и чрез техните скорости. **[0,75 т]**

б) Нека X_C и V_C са съответно отклонението и скоростта на центъра на масата на системата, а x и v – съответно относителното отместване и относителната скорост на първата частица

спрямо втората частица. Запишете енергията E чрез отклоненията X_C и x и скоростите V_C и v . [3,25 т]

в) Получете законите $X_C(t)$ и $V_C(t)$, по които се изменят във времето отклонението на центъра на масите и неговата скорост, а така също законите $x(t)$ и $v(t)$ за изменение на относителното отклонение и на относителната скорост. Опишете движението на двете частици, в случаите, когато трептят хармонично с еднаква честота? [4,00 т]

г) Намерете отклоненията $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на частиците, ако в началния момент отклонението на първата частица е $x_1(0) = a$, на втората – $x_2(0) = 0$, а началните им скорости са нулеви: $v_1(0) = v_2(0) = 0$. [4,00 т]

д) За отклоненията $x_1(t)$ и $x_2(t)$, намерени в т. г), получите приблизителни изрази при $k_1 \ll k$. Какъв е физическият смисъл на получените резултати? [3,00 т]

Полезни тригонометрични формули

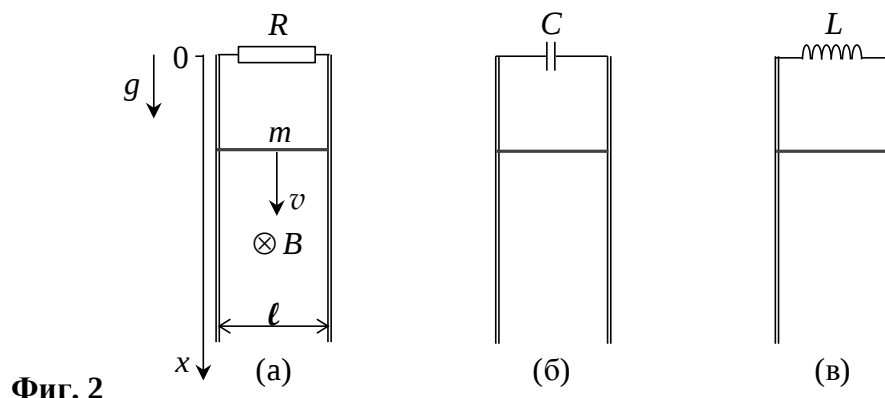
$$\cos(A+B) \pm \cos(A-B) = \begin{cases} 2 \cos A \cos B \\ -2 \sin A \sin B \end{cases}$$

Приближена формула: $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ при $|x| \ll 1$.

Задача 2. Жичка върху релси

Права метална жичка с маса m може да се хлъзга без триене по две вертикални метални релси, на разстояние ℓ една от друга, като през цялото време се намира в идеален електрически контакт с тях (фиг. 2 – а, б, в). Системата се намира в еднородно магнитно поле с индукция B , перпендикулярна на равнината, образувана от релсите. Във всички подточки на задачата можете да приемете, че:

- 1) В началния момент жичката се намира в горния край на релсите (т.е. $x_0 = 0$) и е оставена да се хлъзга надолу по тях с нулева начална скорост.
- 2) релсите са достатъчно дълги, така че в разглежданите интервали от време жичката не достига техния долен край;
- 3) електричното съпротивление на жичката и на релсите се пренебрегва.



Фиг. 2

а) Между горните краища на релсите е свързан резистор със съпротивление R (фиг. 2 а)

- Разгледайте момент, в който жичката е достигнала скорост v . Получете израз за индуцираното електродвижещо напрежение $\mathcal{E}$ в електрическата верига, образувана от жичката, релсите и резистора в този момент. [3,0 т]
- Получете израз за граничната скорост v_r която достига жичката след достатъчно дълго време. [3,0 т]

б) Вместо резистор, между горните краищата на релсите е свързан първоначално незареден кондензатор с капацитет C (фиг. 2 б). Докажете, че в този случай жичката ще се движи равноускорително и получите израз за нейното ускорение a . [4,0 т]

в) В последния случай между горните краища на релсите е свързана намотка с индуктивност L и с пренебрежимо електрично съпротивление (фиг. 2 в). След като жичката бъде освободена, тя започва да трепти във вертикално направление. Намерете периода T и амплитудата A на това трептене. [5,0 т]

Задача 3. Налягане на слънчевата светлина

а) Изкуствен спътник с маса m обикаля около звезда с маса M по кръгова орбита с радиус r_1 . Да предположим, че изведнъж гравитационната константа намалее до стойност γ' , по-малка от познатата ви таблична стойност γ . На какво максимално разстояние r_2 би се отдалечил спътникът от звездата, движейки се по новата си орбита? [3,0 т]

б) Нека, когато спътникът се намира на разстояние r_2 от звездата, гравитационната константа изведнъж наново възстанови първоначалната си стойност γ . На какво минимално разстояние r_3 ще се доближи спътникът до звездата? Сравнете r_3 и r_1 . [2,0 т]

в) Нека спътникът има напречно сечение S и поглъща напълно падащата върху него светлина от звездата. Енергията, падаща за единица време върху единица площ от сечението на спътника, когато той се намира на разстояние r_1 от звездата, е $W(r_1) = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S}$. Ако гравитационната константа е γ , покажете, че резултантната сила (сума на гравитационната сила и силата, дължаща се на налягането на светлината), действаща на спътника (ако той се намира на произволно разстояние r от звездата), е еквивалентна на гравитационна сила с ефективна гравитационна константа γ' . Изразете γ' чрез γ и дадените величини. [2,0 т]

г) Първоначално спътник се движи около Слънцето по кръгова с радиус $r_1 = 150 \cdot 10^6$ km и период $T = 365$ дни. Масата на спътника е $m = 100$ kg, а напречното му сечение е пренебрежимо малко. В даден момент от спътника се разгъва напълно отразяваща повърхност с форма на квадрат със страна 10,0 m, насочена винаги към Слънцето.

Известно е, че $W(r_1) = 1360 \text{ W/m}^2$. Изчислете отношението на разстоянията r_2/r_1 (виж подусловие а)). [2,0 т]

д) Когато спътникът достига разстоянието r_2 , отразяващата повърхност се сгъва и прибира напълно, така че сечението на спътника става отново пренебрежимо малко. Изчислете отношението на разстоянията r_3/r_1 (виж подусловие б)). [2,0 т]

е) Оказва се, че спътниците, обикалящи около Земята, летят по бавно променящи се орбити. За спътници, обикалящи около Земята на ниски орбити (на разстояние от земната повърхност $h < 700 \text{ km}$) основната причина за тази промяна е силата на челно съпротивление от атмосферата, която води до бавно „падане“ на спътника. За спътници, летящи на по-високи орбити ($h > 700 \text{ km}$) обаче основната причина за промяна на орбитата е налягането на слънчевата светлина. Нека си представим, че спътник лети по кръгова орбита с височина над земната повърхност $h \approx 1000 \text{ km}$. Равнината на орбитата на този спътник съвпада с равнината на орбитата на Земята около Слънцето. Обяснете качествено причината за промяната на орбитата на спътника и нарисуйте на чертеж посоката на промяната на орбитата („новата“ орбита или „новите“ орбити) и нейното (тяхното) положение (и ориентация) спрямо старата орбита и посоката Земя-Слънце. Машабът на разстоянията може да не е спазен. [2,0 т]

ж) Нашето Слънце се е образувало от облак от газ и прах чрез гравитационно уплътняване. В един момент плътността в центъра на облака става достатъчно голяма, за да протичат ядрени реакции, и той се превръща в звезда и започва да свети. Тогава слънчевата светлина ще започне да „издухва“ далеч от Слънцето всички частици с радиус, по-малък от някакъв критичен $r_{\text{кр}}$. Приемете, че частиците са сферични с плътност $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, и че поглъщат напълно падащата светлина (с $W(r_1) = 1360 \text{ W/m}^2$ виж подусловие г)). Изчислете $r_{\text{кр}}$. [2,0 т]

Задача 4. Разширяващата се Вселена

а) Нека в условно избран начален момент, след момента на Големия взрив, разстоянието между две галактики е r . В произволен друг момент t , поради разширяването на Вселената, разстоянието между галактиките е $R(t) = a(t)r$, където $a(t)$ е универсална за цялата Вселена функция, наречена *мащабиращ множител*. Докажете закона на Хъбъл: $v(t) = H(t)R(t)$, където $v(t)$ е относителната скорост на двете галактики една спрямо друга в момента t , а $H(t)$ е зависещата от времето константа на Хъбъл. Изразете $H(t)$ чрез мащабиращия множител и неговата производна $\dot{a}(t)$ по времето. [3,0 т]

б) Във Вселената има три вида „материя“, за които ще приемем, че изпълват равномерно пространството: (1) *тежка материя*, т.е. изграденото от масивни частици вещество със зависеща от времето плътност $\rho_m(t)$; (2) *излъчване* с плътност $\rho_r(t)$ и (3) т.нар. *тъмна*

енергия с независеща от времето плътност на масата ρ_Λ . Нека изберем една от двете галактики за неподвижно начало O на координатната система и да разгледаме движението на другата галактика спрямо нея. Като използвате законите на Нютоновата механика, изразете „ускорението”, т.е. втората производна $w = \ddot{a}(t)$ на мащабиращия множител по времето чрез моментната му стойност $a(t)$, фундаментални константи и общата плътност на материята $\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t)$. [3,0 т]

в) Ако приемете, че масата на тежката материя във Вселената се запазва, докажете, че нейната плътност се мени с времето по закона:

$$\rho_m(t) = A/a(t)^3,$$

където A е независеща от времето константа. Ако приемете, че във Вселената има само тежка материя, докажете, че константата на Хъбъл е свързана с плътността на тежката материя и с мащабиращия множител чрез уравнението:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m(t) - \frac{k}{a(t)^2} \quad (\text{т.нар. уравнение на Фридман}),$$

където G е гравитационната константа, а k е неизвестна константа. Определете как се разширява Вселената, т.е. как се променя с времето мащабиращия множител $a(t)$, ако $k = 0$. Какво е възможното бъдеще на Вселената в зависимост от различните стойности на константата k ? [5,0 т]

От Общата теория на относителността следва (не се опитвайте да го докажете), че при наличие на излъчване и тъмна енергия уравнението на Фридман се обобщава, просто като се замести плътността на тежката материя с общата плътност $\rho(t)$ на всички форми на материя:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k}{a(t)^2}$$

г) Чрез методи на квантовата механика се доказва, че плътността на излъчването се мени с времето по закона: $\rho_r(t) = B/a(t)^4$, където B е независеща от времето константа. Как би се разширявала Вселената, ако в нея имаше само излъчване (тоест няма тежка материя и тъмна енергия) и $k = 0$. Ако има и тежка материя, на кои етапи от развитието на Вселената има превес излъчването, и на кои – тежката материя? [2,0 т]

д) Съществуването на тъмната енергия е хипотеза, която обяснява ускорителното разширяване на Вселената. Прието е плътността на тъмната енергия да се представя във вида: $\rho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G) = \text{const}$, където $\Lambda > 0$ е т.нар. *космологична константа*. На кои етапи от развитието на Вселената доминира тъмната енергия? Как би се разширявала Вселената, ако в нея имаше само с тъмна енергия и ако $k = 0$. [2,0 т]