

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Казанлък, 25–27 април 2025 г.

Тема за V състезателна група (11.-12. клас)

Задача 1. Трептяща система

а) Пълната енергия е $E = E_k + E_n$, където кинетичната енергия E_k е

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}, \text{ [0,25 т.]}$$

а потенциалната енергия E_n , свързана с деформацията на пружините, се дава с израза

$$E_n = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k_1}{2}(x_1 - x_2)^2. \text{ [0,5 т.]}$$

б) По определение отклонението

$$X_C = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ [0,25 т.]}$$

а скоростта на центъра на масите е

$$V_C = \frac{v_1 + v_2}{2}. \text{ [0,25 т.]}$$

Относителното отместване и относителната скорост съответно са

$$x = x_1 - x_2, \text{ [0,25 т.]} \quad v = v_1 - v_2. \text{ [0,25 т.]}$$

Тогава отклоненията на частиците и техните скорости се дават с изразите

$$(1) \quad x_1 = X_C + \frac{1}{2}x, \text{ [0,25 т.]} \quad v_1 = V_C + \frac{1}{2}v, \text{ [0,25 т.]}$$

$$(2) \quad x_2 = X_C - \frac{1}{2}x, \text{ [0,25 т.]} \quad v_2 = V_C - \frac{1}{2}v. \text{ [0,25 т.]}$$

Като заместим тези равенства в израза за енергията, намираме

$$E = E_1 + E_2, \text{ [0,25 т.]}$$

където

$$E_1 = \frac{1}{2}(2m)V_C^2 + \frac{1}{2}(2k)X_C^2, \text{ [0,5 т.]}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k/2)x^2. \text{ [0,5 т.]}$$

в) Енергията на трептящата система е сума от енергиите на две независими хармонични трептения. Първото е трептене на „частица“ с маса $2m$, разположена в центъра на масите, под действие на еластична сила с коефициент на еластичност $2k$. [0,25 т.] Кръговата честота на това хармонично трептене е

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \text{ [0,25 т.]}$$

Ще приемем, че $X_c(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ [0,25 т.]. Тогава след диференциране по времето имаме $V_c(t) = \omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ [0,25 т.]. {Този резултат може също да се получи, като се използва изразът за енергията

$$E_1 = kA^2 = mV^2 + kA^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1),$$

откъдето следва резултатът за $V_c(t) = \omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ }.

Второто хармонично трептене е трептене на „частица“ с маса $m/2$ под действие на еластична сила с коефициент на еластичност $k_1 + k/2$ [0,25 т.]. Кръговата честота на това хармонично трептене е

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k/2}{m/2}} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}. \text{ [0,25 т.]}$$

Аналогично можем да запишем

$$x(t) = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \text{ [0,25 т.]} \quad v(t) = \omega_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \text{ [0,25 т.]}$$

Когато частиците трептят с една и съща честота ω_1 , имаме

$$X(t) \neq 0, \text{ [0,25 т.]} \quad x = 0. \text{ [0,25 т.]}$$

Следователно $x_1(t) = x_2(t)$ [0,25 т.], т.е. двете частици трептят във фаза, при което пружината с коефициент на еластичност k_1 остава недеформирана [0,25 т.]. Когато частиците трептят с една и съща честота ω_2 , имаме

$$X(t) = 0, \text{ [0,25 т.]} \quad x \neq 0. \text{ [0,25 т.]}$$

Следователно $x_1(t) = -x_2(t)$ [0,25 т.], т.е. двете частици трептят в противофаза. В този случай средната пружина се деформира, а центърът на масата е неподвижен [0,25 т.].

г) Като отчетем изразите (1) и (2), намираме

$$x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{2} B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \text{ [0,25 т.]}$$

$$x_2(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2} B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \text{ [0,25 т.]}$$

$$v_1(t) = \omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{2} \omega_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \text{ [0,25 т.]}$$

$$v_2(t) = \omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{2} \omega_2 B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \text{ [0,25 т.]}$$

Удовлетворяването на началните условия дава системата уравнения

$$a = A \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} B \sin \varphi_2, \text{ [0,25 т.]}$$

$$0 = A \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} B \sin \varphi_2, \text{ [0,25 т.]}$$

откъдето намираме $A \sin \varphi_1 = a/2$ [0,25 т.]. $B \sin \varphi_2 = a$ [0,25 т.]. От началните условия за скоростите следва

$$0 = \omega_1 A \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \omega_2 B \cos \varphi_2, \text{ [0,25 т.]}$$

$$0 = \omega_1 A \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} \omega_2 B \cos \varphi_2, \text{ [0,25 т.]}$$

от които получаваме

$$A \cos \varphi_1 = 0 \rightarrow \varphi_1 = \pi/2, \text{ [0,25 т.]} \quad B \cos \varphi_2 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \pi/2. \text{ [0,25 т.]}$$

Окончателно намираме следните закони за отместванията на частиците

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \text{ [0,5 т.]}$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \text{ [0,5 т.]}$$

д) Получените отклонения на частиците могат да се преобразуват с формулите за сума и разлика на два косинуса. Тогава намираме

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = a \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right], \text{ [0,25 т.]}$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = a \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t \right] \sin \left[\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t \right]. \text{ [0,25 т.]}$$

Като отчетем условието $k_1 \ll k$, намираме следните приближени изрази

$$\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{k+2k_1}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1+2\frac{k_1}{k}} - 1 \right) \approx \frac{k_1}{2k} \omega_1 = \varepsilon, \text{ [0,25 т.]}$$

$$\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1+2\frac{k_1}{k}} + 1 \right) \approx \left(1 + \frac{k_1}{2k} \right) \omega_1 = \omega. \text{ [0,25 т.]}$$

Следователно окончателно имаме

$$x_1(t) = a \cos \varepsilon t \cos \omega t, \text{ [0,5 т.]}$$

$$x_2(t) = a \sin \varepsilon t \sin \omega t. \text{ [0,5 т.]}$$

Последните равенства показват, че в този случай всяка от частиците трепти с честота ω [0,25 т.], но с променлива амплитуда [0,25 т.]. В интервала $0 \leq t \leq \pi/2\varepsilon$ амплитудата на първата частица намалява от максималната стойност a до нула [0,25 т.], докато амплитудата на втората частица се увеличава от нула до a [0,25 т.]. След това амплитудата на първата частица нараства с времето, а на втората намалява и т.н. (Явлението, при което става прехвърляне на енергия от първата към втората частица и обратно се нарича биене в трептящата система).

Задача 2. Жичка върху релси

а)

a1	$\Phi = B\ell x$	$f = qvB$	0.5
a2	$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta x}{\Delta t}$	$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q}$	1.0
a3	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$A^* = f\ell = qvB\ell$	0.5
a4	$\mathcal{E} = B\ell v$		1.0
Общо			3.0

a5	$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{v_{\Gamma} B \ell}{R}$	$P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(v_{\Gamma} B \ell)^2}{R}$	1.0
a6	$mg = IB \ell$	$P_R = mg v_{\Gamma}$	1.0
a7	$v_{\Gamma} = \frac{mgR}{B^2 \ell^2}$		1.0
Общо			3.0

б)

61	$E = \frac{CU^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}(m + CB^2\ell^2)v^2$	$ma = mg - IB\ell$	1.0
62	$E = A_G = mgx$	$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C\Delta U}{\Delta t}$	1.0
63	$v^2 = 2ax$	$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta v}{\Delta t} = B\ell a$	1.0
64	$a = \frac{mg}{m + CB^2\ell^2}$		1.0
Общо			4.0

в)

в1	$B\ell v - \frac{L\Delta I}{\Delta t} = 0$		1.0
в2	$v\Delta t = \Delta x$		0.5
в3	$I = \frac{B\ell x}{L}$		0.5
в4	$ma = mg - IB\ell = mg - \frac{B^2\ell^2}{L}x$	$E = \frac{mv^2}{2} - mgx + \frac{LI^2}{2} =$ $= \frac{mv^2}{2} - mgx + \frac{B^2\ell^2 x^2}{2} = \text{const}$	1.0

в5	$k_{\text{eff}} = \frac{B^2 \ell^2}{L}$		0.5
в6	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} = \frac{2\pi}{B\ell} \sqrt{mL}$		0.5
в7	$mg - \frac{B^2 \ell^2}{L} x_0 = 0$	$-mgx_{\text{max}} + \frac{B^2 \ell^2 x_{\text{max}}^2}{2} = 0$	0.5
в8	$A = x_0 = \frac{mgL}{B^2 \ell^2}$	$A = \frac{x_{\text{max}}}{2} = \frac{mgL}{B^2 \ell^2}$	0.5
Общо			5.0

Задача 3. Налягане на слънчевата светлина

а) Когато спътникът се намира на максималното разстояние r_2 от звездата, скоростта му v_2 е перпендикулярна на радиус-вектора r_2 . Тъй като в началния момент спътникът се е движел по кръгова орбита с радиус r_1 , скоростта му v_1 също е била перпендикулярна на радиус-вектора r_1 . Така излиза, че точки 1 и 2 лежат на голямата полуос на елиптичната орбита, по която ще се движи спътникът. **[0.3 т.]** От закона за запазване на момента на импулса следва, че $mr_1v_1 = mr_2v_2$. **[0.3 т.]** (1) От закона за запазване на енергията следва, че $\frac{mv_1^2}{2} - \gamma' \frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma' \frac{Mm}{r_2}$. **[0.4 т.]** (2) Преобразувайки (2) до $v_2^2 - v_1^2 = 2\gamma' M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$ (3) и изразявайки v_2 от (1), $v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$ и замествайки го в (3), се получава $(v_1 \frac{r_1}{r_2})^2 - v_1^2 = 2\gamma' M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$. **[0.3 т.]** След опростяване $r_2 = \frac{r_1}{\frac{2\gamma' M}{v_1^2 r_1} - 1}$. (4) **[0.5 т.]** Тъй като първоначално спътникът се е движел по кръгова орбита, $\frac{mv_1^2}{r_1} = \gamma' \frac{Mm}{r_1^2}$, то $v_1^2 = \gamma' \frac{M}{r_1}$. (5) **[0.5 т.]** Замествайки (5) в (4), $r_2 = \frac{r_1}{\frac{2\gamma'}{\gamma} - 1}$. (6) **[0.5 т.]** Тъй като $\gamma' < \gamma$, то $r_2 > r_1$. **[0.2 т.]**

б) Можем да приложим (4)

за новата орбита, като заменим γ' с γ , $r_3 = \frac{r_2}{\frac{2\gamma M}{v_2^2 r_2} - 1}$. **[0.5 т.]** (7) Изразявайки отново v_2 чрез v_1 и използвайки (5), $r_3 = \frac{r_2}{\frac{2\gamma M r_2}{v_1^2 r_1^2} - 1} = \frac{1}{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$. **[0.8 т.]** (8) След заместване с (6), $r_3 = \frac{r_1}{3 - 2\frac{\gamma'}{\gamma}}$. **[0.5 т.]** (9) Тъй като $\gamma' < \gamma$, то $r_3 < r_1$. **[0.2 т.]**

в) Когато спътникът се намира на произволно разстояние r от звездата $W(r) = W(r_1) \frac{r_1^2}{r^2}$. **[0.2 т.]** Тогава действащата му резултантна сила е $F = \gamma' \frac{Mm}{r^2} - \frac{\Delta p}{\Delta t}$, **[0.4 т.]** (10) където Δp е импулсът на погълнатата светлина от спътника за време Δt . Тъй като за фотона връзката енергия-импулс е $E = pc$, **[0.2 т.]** то при поглъщане на светлината $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{c} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{c} W(r)S =$

$W(r_1) \frac{r_1^2 S}{cr^2}$. [0.5 т]. Така (10) се преобразува до $F = \gamma \frac{Mm}{r^2} - W(r_1) \frac{r_1^2 S}{cr^2}$ или $F = \gamma \left(1 - W(r_1) \frac{r_1^2 S}{\gamma c M m} \right) \frac{Mm}{r^2}$. [0.5 т.] Следователно $\gamma' = \gamma \left(1 - W(r_1) \frac{r_1^2 S}{\gamma c M m} \right)$. (11) [0.2 т.]

г) Тъй като в този случай повърхността не поглъща светлината, а я отразява напълно и то в перпендикулярно на нея направление, промяната на импулса ѝ заради действието на светлината ще е 2 пъти по-голямо в сравнение със случая в подусловие в). [0.3 т.] Затова

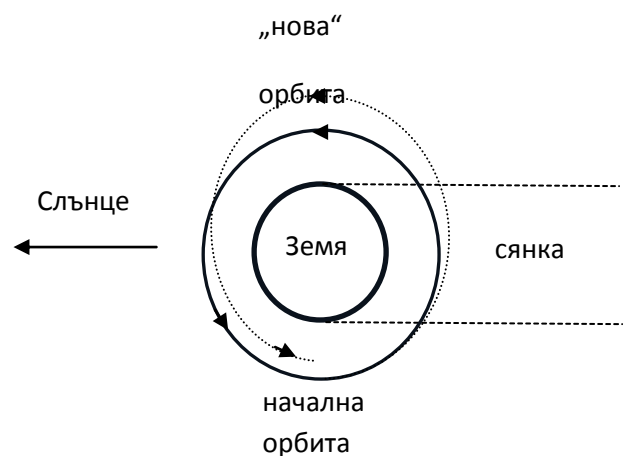
сега (11) ще се промени така $\gamma' = \gamma \left(1 - 2W(r_1) \frac{r_1^2 S}{\gamma c M m} \right)$. [0.2 т.] (12) Тъй като γ и M не са дадени, тяхното произведение можем да намерим от параметрите на орбитата на спътника (всъщност земната орбита): $\gamma \frac{Mm}{r_1^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1$, откъдето $\gamma M = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1^3$. [0.3 т.]

Замествайки в (11) $\gamma' = \gamma \left(1 - \frac{2W(r_1)S}{c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1 m} \right)$. [0.2 т.] Замествайки в (6)

$r_2 = \frac{r_1}{2 \left(1 - \frac{2W(r_1)S}{c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1 m} \right) - 1} = \frac{r_1}{1 - \frac{4W(r_1)S}{c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1 m}}$ или $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{1 - \frac{4W(r_1)S}{c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1 m}}$. [0.2 т.] Замествайки с дадените стойности $\frac{r_2}{r_1} \approx 1,00305$. [0.8 т.] (13)

д) Тъй като вече сме изчислили $\frac{r_2}{r_1}$, равенство (8) може да се преобразува до $r_3 = \frac{1}{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1}{2 - \frac{r_1}{r_2}}$, и $\frac{r_3}{r_1} = \frac{1}{2 - \frac{r_1}{r_2}}$. [1 т.] Замествайки с резултата (13), $\frac{r_3}{r_1} \approx 0,99696$. [1 т.]

е) Нека гледаме Земята откъм северното полукуълбо (виж фигурата). Тогава спътникът ще обикаля в посока, обратна на часовниковата стрелка. Когато минава през сянката на Земята, ще му действа само гравитацията. Когато преминава през противоположната (осветената) страна на Земята, към гравитацията ще се добави и силата на налягането на слънчевата светлина. Така отляво ще има по-силна „ефективна“ гравитация. [0.5 т.] Тогава съгласно резултатите, получени в подусловия а) и б) кръговата орбита ще се



преобразува в елиптична с все по-голяма „елиптичност“, т.е. с апогей по-далеч и перигей по-близо от кръговата орбита. [0.5 т.] Посоката към апогея ще е такава, че посоката към Слънцето, векторът на ъгловата скорост на спътника и посоката към апогея ще са взаимно перпендикулярни [0.5 т.] и ще образуват дясна тройка. [0.5 т.]

ж) За да „издуха“ слънчевата светлина частиците далеч от Слънцето, действащата сила, причинена от налягането на светлината, трябва да е по-голяма от гравитационната: $W(r_1) \frac{r_1^2 S}{cr^2} > \gamma \frac{Mm}{r^2}$. [0.3 т.] $S = \pi r_c^2$ и $m = \rho \frac{4}{3} \pi r_c^3$. Тъй като γ и M не са дадени, тяхното произведение можем да намерим от параметрите на орбитата на спътника (всъщност земната орбита, както в подусловие г)): $\gamma \frac{Mm}{r_1^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1$, откъдето $\gamma M = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1^3$. [0.3 т.] Така получаваме, че $W(r_1) \frac{r_1^2 \pi r_c^2}{c} > \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r_1^3 \rho \frac{4}{3} \pi r_c^3$, откъдето $r_c < \frac{3W(r_1)}{4c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho r_1}$. [0.5 т.]

Така $r_{kp} = \frac{3W(r_1)}{4c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \rho r_1} = 0,29 \mu\text{m}$. [0.9 т.]

Допълнителни източници:

<https://www.nasa.gov/mission/acs3/>

<https://www.youtube.com/watch?v=AVO42b7QLNM>

Задача 4. Разширяващата се Вселена

а) Като диференцираме двете страни на равенството: $R(t) = a(t)r$, получаваме: $\dot{R}(t) = v(t) = \dot{a}(t)r$. След очевидни алгебрични преобразования:

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t)r = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} R(t) = H(t)R(t),$$

където константата на Хъбъл е: $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. [3 т]

б) Избираме едната галактика за начало на координатната система. Уравнението за движение на втората галактика с маса m на разстояние $R(t)$ от първата галактика, е:

$$m\ddot{R}(t) = -\frac{GMm}{R(t)^2} = -\frac{4\pi\rho(t)R(t)^3}{3R(t)^2}m = -\frac{4\pi\rho(t)}{3}R(t)m$$

където M е масата на материята, съдържаща се в кълбо с радиус R около първата галактика (фиг. 1), а ρ – нейната плътност. Като отчетем, че $R(t) = a(t)r$, получаваме:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi}{3}G\rho(t)a(t) \quad (1) \quad [3 \text{ т}]$$

в) Очевидно е, че $\rho_m(t) = \frac{M}{V(t)} = \frac{3M}{4\pi R(t)^3} = \frac{3M}{4\pi a(t)^3 r^3} = \frac{A}{a(t)^3}$, защото обхванатата маса M от сферата не се променя, дори докато Вселената се разширява (не допускаме, че се

създава спонтанно материя). Смисълът на A е плътността на тежката материя в избрания начален момент. В такъв случай от уравнение (1) имаме:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi GA}{3a^2} = -\frac{\mu}{a^2} \quad (2)$$

Където $\mu = \frac{4\pi GA}{3} = \text{const}$. Математически това прилича на уравнение за движение на материална точка, падаща към гравитационен център. Наистина нека сравним движението по оста x на произволна материална точка към някаква планета. Законът за движение е:

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{x^2} \quad (3)$$

За да решим такова движение, обикновено използваме закона за запазване на енергията:

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{GMm}{x} = E$, където E е енергията на частицата. Тук E може да е положителна, отрицателна или нула. Ако $E = 0$, частицата има енергия, точно необходима за да напусне планетата, т.е. има втора космическа скорост. Еко $E < 0$, частицата няма достатъчно енергия да напусне планетата и пада върху нея. Ако пък $E > 0$ частицата може да напусне планетата. Като направим аналогия между (2) и (3) заключаваме, че:

$$\frac{1}{2}\dot{a}(t)^2 - \frac{\mu}{a(t)} = -\frac{k}{2} = \text{const} \quad (4)$$

където $-k/2$ е константа, аналогична на енергията на частицата. Делим на a^2 уравнение (4) и получаваме:

$$\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = \frac{2\mu}{a(t)^3} - \frac{k}{a(t)^2}$$

Като вземем предвид израза за H и за плътността, получаваме уравнението на Фридман:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k}{a(t)^2}$$

Понеже $-k/2$ играе същата роля, като енергията за частица, падаща върху планета, ако $k = 0$, Вселената все едно има „втора космическа скорост” и $a(t)$ расте неограничено – тоест вечно разширяваща се Вселена. Ако $k < 0$ (съответстващо на $E > 0$), Вселената се разширява неограничено. При $k > 0$ (т.е. $E < 0$), Вселената няма достатъчно енергия, за да се разширява вечно и в крайна сметка се свива обратно в точка.

За $k=0$ от уравнение (4) имаме: $da(t)/dt = \sqrt{2\mu/a(t)}$. Разделяме на променливите и интегрираме двете страни: $\int_0^a \sqrt{a} da = \sqrt{2\mu} \int_0^t dt$, откъдето следва $2/3 a(t)^{3/2} = \sqrt{2\mu} t$, т.е.

Вселената расте както $a(t) \propto t^{2/3}$ [5 т.]

г) Ако има само излъчване и $k=0$, получаваме: $H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{B}{a(t)^4}$ или след коренуване

на двете страни: $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{8\pi GB}{3}} \frac{1}{a(t)^2}$. След разделяне на променливите и интегриране на

двете страни $\int_0^a \frac{da}{a^3} = \sqrt{8\pi GB/3} \int_0^t dt$, получаваме, че за Вселена, в която преобладава лъчението: $a(t) \propto t^{1/2}$.

При наличие на тежка материя и лъчение, пълното уравнение на Фридман има вида:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{A}{a^3} + \frac{B}{a^4} \right) - \frac{k}{a^2}$$

Веднага след Големия взрив Вселената е била с много малки размери. Тогава радиационният член е бил най-значим и той е определял растежа на Вселената. [2 т.]

д) Пълното уравнение на Фридман при наличие на тъмна енергия става:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{A}{a^3} + \frac{B}{a^4} \right) + \frac{1}{3} \Lambda - \frac{k}{a^2}$$

Ясно е, че ако Вселената се разширява неограничено, на по-късните етапи от нейното развитие, когато мащабиращият множител $a(t)$ е много голям, тъмната енергия взема превес над останалите събираеми. Затова след достатъчно дълго време: $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \text{const.}$

В този случай уравнението за мащабиращия множител става: $\dot{a}(t)/a(t) = H = \text{const.}$ След интегриране намираме $a(t) \propto \exp(Ht)$, т.е. наблюдава се ускоряващо се експоненциално разширение на Вселената. [2 т.]