

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ, 3 април 2018 г., Русе

Тема 10.-12. клас (четвърта състезателна група)

Теоретичен кръг

Примерни решения и критерии за оценяване

Задача 1. Механика

Част 1:

а) Използваме закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{\min}^2}{2} + mgH_{\max}. [0.25 \text{ т}]$$

Минималната скорост се постига, когато тялото е на максимална височина. Тогава то се движи хоризонтално със скорост, равна на хоризонталната компонента на v_0 . Имаме

$$v_{\min} = v_0 \cos \alpha. [0.25 \text{ т}]$$

Решаваме системата от две уравнения и получаваме

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. [0.5 \text{ т}]$$

Отговорът може да се получи и кинематично, за което се присъжда същият брой точки.

б) Тъй като тялото с маса m_2 пада в точката на изстрелване, скоростта му непосредствено след взрива е

$$v_2 = v_{\min} = v_0 \cos \alpha, [0.25 \text{ т}]$$

в посока обратна на оста x .

От закона за запазване на импулса

$$m_1 v_{\min} = -m_2 v_{\min} + m_3 v_3 [0.25 \text{ т}]$$

намираме

$$v_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_3} v_0 \cos \alpha. [0.5 \text{ т}]$$

в) За разстоянието имаме $x_{\max} = x_1 + x_2$, където x_1 и x_2 са изминатите разстояния преди

и след взрива. Имаме $x_1 = v_0 \cos \alpha t_1$ [0.5 т], където $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ [0.5 т] е времето за

издигане. Също така $x_2 = v_3 t_2$ [0.5 т], където $t_2 = t_1$ [0.5 т], тъй като движението по оста y е независимо от движението по оста x (времето за изкачване е равно на времето за спускане). Така намираме ($2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$):

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{m_3} \right) = \frac{m_1}{m_3} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. [1 \text{ т}]$$

Част 2:

а) Използваме закона за запазване на енергията $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv(\theta)^2}{2} + mgR(1 + \cos \theta)$. [1 т]

Така намираме

$$v(\theta) = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1 + \cos \theta)}. [1 \text{ т}]$$

б) Имаме $N(\theta) + mg \cos \theta = \frac{mv(\theta)^2}{R}$ [1 т]. Така намираме

$$N(\theta) = \frac{mv_1^2}{R} - mg(2 + 3 \cos \theta). [1 \text{ т}]$$

в) За да мине тялото през точка 3, трябва $N(0) \geq 0$ [0.5 т]. Следователно

$$v_1 \geq \sqrt{5gR}. [0.5 \text{ т}]$$

г) Височината на точка 4 над хоризонталната равнина е $H_4 = R(1 - \cos \alpha)$ [0.5 т]. За да намерим скоростта в точка 4, използваме закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_4^2}{2} + mgH_4 [0.5 \text{ т}], \text{ откъдето } v_4 = \sqrt{v_1^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)}. [0.5 \text{ т}]$$

Силата F , която действа на тялото, успоредно на повърхността на наклонената равнина, е сума от гравитационната сила и силата на триене. Имаме $F = mg \sin \alpha - mgk \cos \alpha = ma$ [0.5 т], където a е ускорението. Следователно $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$. Тъй като $k > \tan \alpha$, движението е равнозакъснително ($a < 0$).

От кинематичните закони намираме $L_{45} = \frac{v_4^2}{-2a}$ [0.5 т]. Окончателният израз е

$$L_{45} = \frac{v_1^2 - 2gR(1 - \cos \alpha)}{-2g(\sin \alpha - k \cos \alpha)}. [0.5 \text{ т}]$$

д) Тъй като силата на реакция е ортогонална на скоростта, тя не извършва работа, т.е. за A_N имаме

$$A_N = 0. [1 \text{ т}]$$

Така за A_G имаме, че е разлика между крайната и началната кинетични енергии:

$$A_G = \frac{mv_4^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. [1 \text{ т}]$$

Задача 2. Въздушна пружина

а) Понеже температурата на въздуха не се променя, прилагаме уравнението на изотермния процес за горната (1) и за долната (2) част на тръбата, съответно:

(1)	$p_1(\ell_0 + x)S = p_0 \ell_0 S$	1 точка
(2)	$p_2(\ell_0 - x)S = p_0 \ell_0 S$	1 точка

където p_1 и p_2 е налягането на въздуха съответно в горната и в долната част на тръбата, x е отместването на капката живак, а S – площта на напречното сечение на тръбата. Оттук намираме:

$$(3) \quad p_1 = \frac{p_0 \ell_0}{\ell_0 + x} \quad 0,5 \text{ точки}$$

$$(4) \quad p_2 = \frac{p_0 \ell_0}{\ell_0 - x} \quad 0,5 \text{ точки}$$

От условието за равновесие на капката следва, че налягането в долната част на тръбата е сума от налягането на въздуха в горната част и хидростатичното налягане на капката живак:

$$(5) \quad \frac{p_0 \ell_0}{\ell_0 - x} = \frac{p_0 \ell_0}{\ell_0 + x} + \rho g h. \quad 1 \text{ точка}$$

Така, за определяне на отместването на капката получаваме квадратно уравнение:

$$(6) \quad x^2 + \frac{2p_0 \ell_0}{\rho g h} x - \ell_0^2 = 0. \quad 1 \text{ точка}$$

Физически смисъл има само положителният корен, защото по абсолютна стойност отрицателният корен е по-голям от ℓ_0 , т.е. капката би се намирала извън тръбата.

$$(7) \quad x = \ell_0 \left(\sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g h} \right)^2 + 1} - \frac{p_0}{\rho g h} \right) \quad 1 \text{ точка}$$

От данните в условието намираме:

$$(8) \quad \frac{p_0}{\rho g h} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1,36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,05 \text{ m}} \approx 14,7.$$

Съответно за отместването пресмятаме:

$$(9) \quad x \approx 0,017 \text{ m} = 1,7 \text{ cm}. \quad 1 \text{ точка}$$

б) След като капката се върне по средата на тръбата, обемът на въздуха в двете части на тръбата става равен на началния обем, когато тръбата е била хоризонтална. Следователно за въздуха в долната половина може да бъде приложено уравнението за изохорен процес:

$$(10) \quad \frac{p_2}{T_0 + \Delta T} = \frac{p_0}{T_0} \quad 1 \text{ точка}$$

където $T_0 = 20^\circ\text{C} + 273 = 293 \text{ K}$ е началната абсолютна температура на въздуха, $\Delta T \equiv \Delta t$ е търсеното нарастване на температурата, а p_2 – налягането на загретия въздух в долната част на тръбата. Понеже температурата на въздуха в горната част не се променя, следва, че налягането на въздуха в нея става равно на началното налягане p_0 . От условието за хидростатично равновесие имаме:

$$(11) \quad p_2 = p_0 + \rho g h. \quad 1 \text{ точка}$$

Като комбинираме това уравнение с уравнение (10), намираме:

$$(12) \quad \Delta T = \frac{T_0 \rho g h}{p_0} \approx 20 \text{ K} \equiv 20^\circ\text{C}. \quad 1 \text{ точка}$$

в) Да разгледаме малко отместване x на капката вдясно от положението ѝ на равновесие. Понеже температурата на въздуха не се променя, наляганията в двете части се дават с уравнения (3) и (4) съответно, където p_1 е налягането в лявата половина, а p_2 – в дясната половина. Въздухът в двете части на тръбата упражнява върху капката съответно сили:

$$(13) \quad F_1 = p_1 S = \frac{p_0 \ell_0 S}{\ell_0 + x} \quad 0,5 \text{ точки}$$

$$(14) \quad F_2 = p_2 S = \frac{p_0 \ell_0 S}{\ell_0 - x} \quad 0,5 \text{ точки}$$

които са насочени в противоположни посоки. Лесно се съобразява, че $F_2 > F_1$, т.е. равнодействащата сила е насочена наляво, и големината ѝ е:

$$(15) \quad F = F_2 - F_1 = \frac{2p_0 \ell_0 S x}{\ell_0^2 - x^2} \quad 1 \text{ точка}$$

Като вземем предвид, че $x \ll \ell_0$, получаваме приблизително:

$$(16) \quad F \approx \frac{2p_0 S}{\ell_0} x \quad 0,5 \text{ точки}$$

т.е. за върщащата сила е изпълнен законът на Хук с коефициент на еластичност:

$$(17) \quad k = \frac{2p_0 S}{\ell_0} \quad 0,5 \text{ точки}$$

Следователно капката ще извършва хармонично трептене с период:

$$(18) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 0,5 \text{ точки}$$

където:

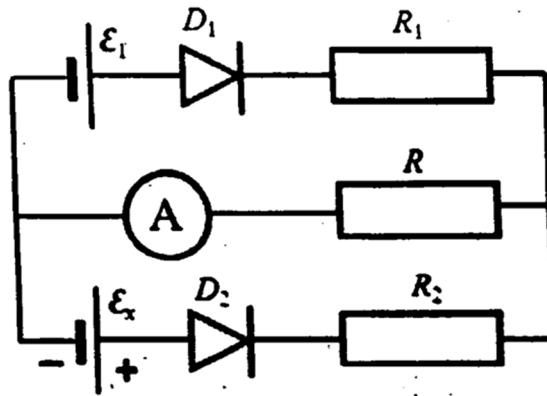
$$(19) \quad m = \rho h S \quad 0,5 \text{ точки}$$

е масата на капката. Като вземем предвид, че $\nu = 1/T$, окончателно намираме:

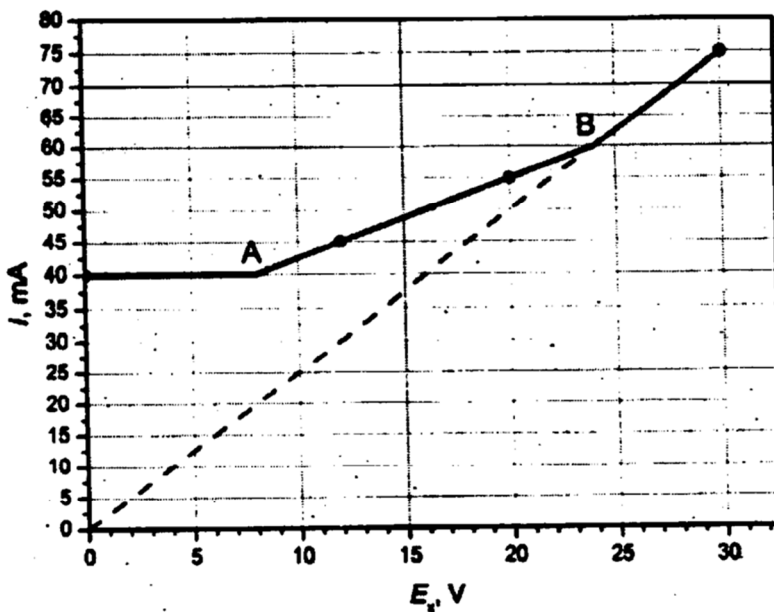
$$(20) \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho h \ell_0}} \approx 3,9 \text{ Hz} \quad 1 \text{ точка}$$

Задача 3. Електрическа схема с диоди и батерии

а) Когато E_x е по-малко от пада на напрежение върху резистора R , тогава D_2 е запушен и токът $I = \frac{E_1}{R+R_1}$. $E_x \in [0, \frac{RE_1}{R+R_1}]$. [2 т.] При много големи стойност на E_x , т.е. когато падът на напрежение върху резистора R е по-голям от E_1 , ще е запушен диода D_1 . Тогава $I = \frac{E_x}{R+R_2}$. Това ще е така, докато падът на напрежение върху резистора R се изравни с E_1 , т.е. формулата е валидна за $E_x \in [\frac{(R+R_2)E_1}{R}, +\infty]$. [2 т.] За междинни стойност на E_x , т.е. $E_x \in [\frac{RE_1}{R+R_1}, \frac{(R+R_2)E_1}{R}]$ и двата диода са отпушени и токът може да се намери от следните уравнения (закони на Кирхоф): $I = I_1 + I_2$, $E_1 = I_1 R_1 + IR$, $E_x = I_2 R_2 + IR$. Съвместното им решаване дава $I = (\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_x}{R_2}) / (1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2})$. [2 т.]



б) Данните от таблицата са представени на графиката по-долу. Тъй като според получените резултати в подусловие а) зависимостта $I = f(E_x)$ трябва да съдържа начален хоризонтален участък. Следва втори и трети участък с нарастващи наклони, като третият е пропорционалност (правата, минаваща през него, минава през центъра на координатната система). Единствената възможност е нарисувана на графиката. [3 т.]



E_x, V	I, mA
0,0	40,0
12,0	45,0
20,0	55,0
30,0	75,0

в) Съпротивлението R може да се изчисли от координатите на т. А – (8 V, 40 mA). Според формулите те са $(\frac{RE_1}{R+R_1}, \frac{E_1}{R+R_1})$. Тогава $R = 8 \text{ V} / 40 \text{ mA} = 200 \Omega$. [1 т.]

Съпротивлението R_2 може да се намери от наклона на третия участък, т.е. от отношението на координатите на т. В – (24 V, 60 mA). Тъй като наклона на третия участък е $\frac{1}{R+R_2}$, то $R_2 = \frac{24 \text{ V}}{60 \text{ mA}} - 200 \Omega = 200 \Omega$. [2 т.] Електродвижещото напрежение E_1 може да се намери също от координатите на т. В – (24 V, 60 mA). Тъй като $U_B = \frac{(R+R_2)E_1}{R}$, то $E_1 = \frac{200 \Omega \cdot 24 \text{ V}}{200 \Omega + 200 \Omega} = 12 \text{ V}$. [2 т.]

Съпротивлението R_1 може да се намери от координатите на т. А – (8 V, 40 mA). Тъй като $I_A = \frac{E_1}{R+R_1}$, то $R_1 = \frac{E_1}{I_A} - R = \frac{12 \text{ V}}{40 \text{ mA}} - 200 \Omega = 100 \Omega$. [1 т.]

Попълнената таблица изглежда така:

$I = f(E_x, R, R_1, R_2, E_1)$	за $E_x \in (?, ?)$, състояние на диоди? (запушен/отпушен)	величина	изчислена стойност
$I = \frac{E_1}{R+R_1}$	$E_x \in [0, \frac{RE_1}{R+R_1}]$, D_1 – отпушен, D_2 – запушен	R	200Ω
$I = (\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_x}{R_2}) / (1 + \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2})$	$E_x \in [\frac{RE_1}{R+R_1}, \frac{(R+R_2)E_1}{R}]$, D_1 – отпушен, D_2 – отпушен	R_1	100Ω
$I = \frac{E_x}{R+R_2}$	$E_x \in [\frac{(R+R_2)E_1}{R}, +\infty]$, D_1 – запушен, D_2 – отпушен	R_2	200Ω
---	няма ситуация, в която D_1 – запушен, D_2 – запушен	E_1	$12 V$

Задача 4. Задача – оценка

4.1. При отклонение x от равновесното положение тялото с маса m има потенциална енергия, която се определя от удължаването на пружината

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l = l(\sqrt{1 + (x/l)^2} - 1) \approx \frac{x^2}{2l}. \quad [1 \text{ т.}]$$

За еластична пружина имаме

$$U(x) = \frac{k}{2}(\Delta l)^2 \approx \frac{k}{8l^2} x^4. \quad [1 \text{ т.}]$$

При движение на тялото се запазва механичната му енергия, която съвпада с максималната потенциална енергия, а така също и с максималната кинетична енергия. Тогава имаме

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kA^4}{8l^2}, \quad [1 \text{ т.}]$$

където A е амплитудата на трептене. От последното равенство получаваме

$$v_{\max} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{k}{m}} A^2. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

За оценка на периода на трептене T ще използваме движението от крайно дясно до равновесното положение. Това движение е неравномерно, като скоростта на тялото нараства от нула до $v_{\max}$ и се извършва със средна скорост

$$v_{\text{ср}} = \beta v_{\max}, \quad \beta < 1. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Тогава имаме

$$\frac{T}{4} = \frac{A}{v_{cp}} \rightarrow T = \frac{4A}{\beta v_{max}} = \frac{8}{\beta} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{l}{A} \sim \frac{1}{A}, \quad [1 \text{ т.}]$$

т.е. периодът T е обратнопропорционален на амплитудата A и намалява с нарастване на амплитудата, когато $(A/l)^2 \ll 1$.

Възможно е и друго решение, използващо връщаща сила, под действие на която тялото трепти. Ако тялото е отклонено на малък ъгъл α , така че

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = x/l, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

за хоризонталната връщаща сила имаме равенството

$$F = k\Delta l \sin \alpha \approx k \frac{x^2}{2l} \frac{x}{l} = \frac{kx^3}{2l^2}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Движението от крайно положение до равновесното положение е ускорително. За оценка можем да го разглеждаме като равноускорително, което се извършва извършва под действие на силата

$$F_{cp} = \frac{1}{2} F_{max} \approx \frac{kA^3}{4l^2}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Тогава за постоянното ускорение на тялото с маса m и неговата максимална скорост имаме

$$a = \frac{F_{cp}}{m} = \frac{F_{max}}{2m} \approx \frac{kA^3}{4ml^2}, \quad [0,5 \text{ т.}] \quad \frac{mv_{max}^2}{2} = F_{cp} A \rightarrow v_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}l} \sqrt{\frac{k}{m}} A^2 \quad [1 \text{ т.}]$$

За периода получаваме оценката

$$\frac{T}{4} = \frac{v_{max}}{a} \rightarrow T = \frac{4v_{max}}{a} = 8\sqrt{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{l}{A} \sim \frac{1}{A}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Вижда се, че двата подхода дават една и съща зависимост на периода от амплитудата, като стойностите се различават с множител от порядъка на единица.

4.2. Фризерът е топлинна машина, в която работното вещество получава количество топлина Q_2 при температура $T_2 = 273 \text{ K}$, външният източник (електричен ток) извършва работа A върху работното вещество и то отдава количество топлина Q_1 на въздуха в помещението при температура $T_1 = 300 \text{ K}$. От първия принцип на термодинамиката имаме

$$Q_1 = A + Q_2. \quad [1 \text{ т.}]$$

При получаването на леда от водата се отнема количество топлина $Q_2 = \lambda m$ [0,5 т.], тъй като температурата на водата е 0°C . Работата A ще е минимална, когато хладилникът е идеален. В него процесите са с обратна посока на процесите в идеален

топлинен двигател, като по големина величините в двете топлинни машини съвпадат [0,5 т.]. Тогава можем да запишем

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{A}{A + \lambda m} \quad [1 \text{ т.}]$$

Тъй като топлинният двигател е идеален, имаме

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad [1 \text{ т.}]$$

От приравняването на двата израза за КПД намираме

$$A = \lambda m \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \approx 33 \text{ kJ} \quad [1 \text{ т.}]$$

4.3. За да намерим зависимостта на скоростта на разпространение на вълните от дължината на вълната ще използваме сравняването на мерните единици на скоростта с определена комбинация на физични величини, от които може да зависи тя в конкретния случай. Като правило полученият резултат се различава от точния с множител от порядъка на единица. Този подход дава добри резултати в случай, когато търсим оценка по порядък.

а) Скоростта на гравитационните вълни може да зависи от земното ускорение g с мерни единици $[g] = \text{m/s}^2$, от плътността на течността ρ с мерни единици $[\rho] = \text{kg/m}^3$ и от дължината на вълната λ с мерни единици $[\lambda] = \text{m}$. Скоростта можем да запишем във вида

$$u_1 = C_1 g^a \rho^b \lambda^c \quad [0,5 \text{ т.}]$$

По отношение на трите основни основни мерни единици в механиката това равенство трябва да се превърне в тждество, т.е.

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^{a-3b+c} \cdot \text{kg}^b \cdot \text{s}^{-2a} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

което означава $a - 3b + c = 1$, $b = 0$, $-2a = -1$, т.е. $a = c = 1/2$, $b = 0$. Следователно:

$$u_1 = C_1 \sqrt{g\lambda} \sim \sqrt{\lambda} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Гравитационните вълни с по-голяма дължина на вълната имат по-голяма скорост.

б) В случай на капилярни вълни скоростта им u_2 може да зависи от коефициента на повърхностно напрежение σ с мерни единици $[\sigma] = \text{N/m} = \text{kg} \cdot \text{s}^2$, от плътността на течността ρ и от дължината на вълната λ , т.е.

$$u_2 = C_2 \sigma^a \rho^b \lambda^c \quad [0,5 \text{ т.}]$$

По отношение на трите основни основни мерни единици в механиката това равенство трябва да се превърне в тждество, т.е.

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^{-3b+c} \cdot \text{kg}^{a+b} \cdot \text{s}^{-2a} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

което означава $-3b + c = 1$, $a + b = 0$, $-2a = -1$, т.е. $a = 1/2$; $b = c = -1/2$. Следователно:

$$u_2 = C_2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Капилярните вълни с по-голяма дължина на вълната имат по-малка скорост.

в) В общия случай, когато вълните са нито чисто гравитационни, нито чисто капилярни, имаме

$$u^2 = C_1^2 g \lambda + C_2^2 \frac{\sigma}{\rho \lambda} = \left(C_1 \sqrt{g \lambda} - C_2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}} \right)^2 + 2 C_1 C_2 \sqrt{\frac{g \sigma}{\rho}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Скоростта ще има минимална стойност, когато

$$C_1 \sqrt{g \lambda} = C_2 \sqrt{\sigma / (\rho \lambda)}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Тогава за дължината на вълната намираме оценката

$$\lambda_0 = \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 0,3 \text{ cm} \sim 1 \text{ cm}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

а за скоростта на вълната имаме

$$u_0 = \sqrt{2 C_1 C_2} \left(\frac{\sigma g}{\rho} \right)^{1/4} \approx \left(\frac{\sigma g}{\rho} \right)^{1/4} \approx 0,3 \text{ m/s}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Така при $\lambda \ll \lambda_0$ вълните са чисто капилярни, при $\lambda \gg \lambda_0$ са гравитационни, а когато $\lambda \sim \lambda_0$ вълните са гравитационно-капилярни.