

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ЗАДАЧА 1: примерно решение**Теоретична част**

Интересен факт е, че при свиренето на ксилофон в пръчките на инструмента се възбуждат напречни стоящи вълни. Пръчките са захванати твърдо при определени позиции по такъв начин, че във всяка да се възбужда стояща вълна с определена честота, т.е. с определен тон. Така музиканта може да изсвири музикално произведение състоящо се от различни ноти – тонове.



В свободно висяща пръчка обаче, която не е захваната никъде твърдо, могат да се възбуждат напречни вълни с всички възможни честоти едновременно.

Напречните вълни, в тънка пръчка от твърд материал, се разпространяват със скорост u , която зависи от честотата на трептенията f :

$$u = \sqrt{2\pi \left(\frac{d}{4}\right) c_L} \quad (1)$$

където величините са: d – диаметър на сечението на пръчката, c_L – скорост на надлъжните вълни в тънка пръчка:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

където величините са: E – модул на Юнг, и ρ – плътност на материала.

Условието, което определя какви напречни стоящи вълни могат да се възбудят в свободно трептяща тънка пръчка е:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} = L \quad (3)$$

където величините са: λ – дължина на вълната, L – дължина на пръчката, n – цяло число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Уреди и материали

- | | |
|---------------------------|-------|
| ○ метална пръчка..... | 1 бр. |
| ○ пръстени от шлаух..... | 2 бр. |
| ○ молив..... | 1 бр. |
| ○ конец..... | 1 бр. |
| ○ таблет..... | 1 бр. |
| ○ ролетка..... | 1 бр. |
| ○ лупа..... | 1 бр. |
| ○ милиметрова хартия..... | 1 л. |

1/7

При липси на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се отчитат по 0.25 т. от общия брой точки.

Необходими величини:

- диаметър на пръчката: $d = 4.00 \pm 0.05 \text{ mm} = 4.00 \text{ mm} \pm 1\%$
- плътност на металната пръчка: $\rho = 2790 \pm 80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2790 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pm 3\%$

Указания

- Нямате право да удяте пръчката с друг предмет освен с предоставения молив
- На таблета е инсталирана програмата Advanced Spectrum Analyzer PRO, която може да измерва амплитудно честотната характеристика (АЧХ) на звук
 - От менюто в програмата активирайте настройката Enable Peak Hold, която позволява най-интензивните сигнали да остават постоянно на дисплея (оранжев цвят).
 - Постоянно стоящия сигнал може да се премахва по желание с натискането на бутона
 - Измерването на звуковия сигнал може да се спира с пауза и пуска с бутона
 - Отчитане на честотата от АЧХ може да се направи, чрез преместване на маркер (зелен или виолетов) в желаната позиция от характеристиката
 - Графиката на АЧХ може да се разтяга/свива по честотната ос, чрез поставяне на два пръста едновременно върху дисплея и съответно раздалчаването/приближаването им
 - **Важно!** Ако при поставянето на маркера върху желаната позиция не се показва честотата, бързо натиснете пускане и спиране събирането на сигнал, така че да се вижда измервания сигнал (бял цвят)
 - Проверете настройките на програмата, които трябва да са: Input samples 384; Window function ; Sampling frequency: ; Input source: mic; Averaging factor ; Font size: ; Logarithmic scale: ; Markers: ; Peaks: ; Screen on:
- Не включвайте звука и безжичната мрежа (WiFi) на таблета, не променяйте системните настройки на таблета
- Не оставяйте включен дисплея на таблета ако не го използвате, т.к. се изтощава бързо батерията му.

Цел: Да се определят: 1) скоростта на надлъжните вълни в тънка пръчка c_L ; 2) модул на Юнг на материала E ; 3) поредният номер на най-ниската измерена честота n_0 ; 4) минималната възможна честота $f_{\min}$ на напречните стоящи вълни в пръчката

Задачи:

1. Изследване на зависимостта на честотата на напречните стоящи вълни в пръчката от величините, които я определят. [6.5т.]

1.1. Получете израз за зависимостта на честотата на напречните стоящи вълни в пръчката от поредния номер. [2т.]

2/7

При липси на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се отчитат по 0.25 т. от общия брой точки.

За вълните знаем, че:

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (4)$$

Ако заместим (1) и (3) в (4), за честотата получаваме:

$$f = \frac{\pi c_L}{32L^2} (2n+1)^2 \quad [2\text{т.}] \quad (5)$$

като, за по-удобен запис не сме заместили c_L с неговото равно. От c_L еднозначно се определя E .

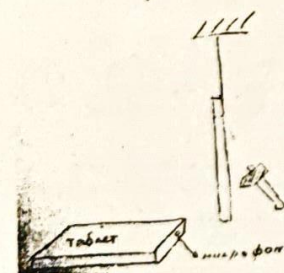
1.2. Получете експериментално зависимостта на честотата на напречните стоящи вълни от наблюдавания техен пореден номер в честотния спектър. Представете данните таблично и оценете грешката на пряко измерените величини. [2.5т.]

№	f, Hz
1	465
2	904
3	1499
4	2225
5	3108
6	4126
7	5289
8	6567
9	8013
10	9560

[2т.] (под 8 измервания [1т.], 8 и повече измервания [2т.])

$$\Delta f = 0.5 \text{ Hz} \quad [0.5\text{т.}]$$

1.3. Направете схема (чертеж) описваща експеримента и означете мястото, където сте поставили измерителния уред. Аргументирайте се за избраната от вас опитна постановка и позиция на измерителния уред. [2т.]



За да осигурим трептения в свободна пръчка – завързваме пръчката с конец, който държим с ръка. Удряме пръчката напречно, за да възбудим напречни трептения в нея и измерваме звуковият сигнал с уреда. Пръчката държим възможно поблизо до микрофона на уреда, за получаване на максимален сигнал. [1т.]

[1т.]

3/7

При липса на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се отписват по 0.25 т. от общия брой точки.

2. Обработка на експерименталните данни [9.5т.]

2.1. Представете зависимостта от задача 1.1. в подходящи променливи, така че да получите линейна зависимост, от която да може да се определят скоростта на надлъжните вълни в тънка пръчка c_L , модулет на Юнг на материала E и поредният номер на най-ниската измерена честота n_0 . [3т.]

Ако коренуваме ур. (5) получаваме:

$$\sqrt{f} = \sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}} (2n+1) \quad [1\text{т.}] \quad (6)$$

Ако изразим поредният номер на съответната честота с:

$$n = n_0 + i, \quad [1\text{т.}] \quad (7)$$

където $i=0, 1, 2, \dots$, а n_0 е поредният номер на най-ниската измерена честота и заместим в (6) получаваме:

$$\sqrt{f} = 2\sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}} i + \sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}} (2n_0 + 1) \quad [1\text{т.}]$$

При това получаваме линейна зависимост

$$y = Ax + B, \text{ като сме означили } \begin{cases} x = i \\ y = \sqrt{f} \\ A = 2\sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}} \\ B = \sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}} (2n_0 + 1) \end{cases}$$

От графично определените наклон и свободен член, могат да се определят c_L , E и n_0 .

2.2. Представете изразите от които ще определите търсените величини c_L , E и n_0 . [1.5т.]

$$c_L = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{32L^2}{\pi} \quad [0.5\text{т.}]$$

$$E = c_L^2 \rho \quad [0.5\text{т.}]$$

$$n_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{\sqrt{\frac{\pi c_L}{32L^2}}} - 1 \right) \quad [0.5\text{т.}]$$

2.3. Използвайки експерименталните данни, представете зависимостта от задача 2.1 таблично и графично. [3т.]

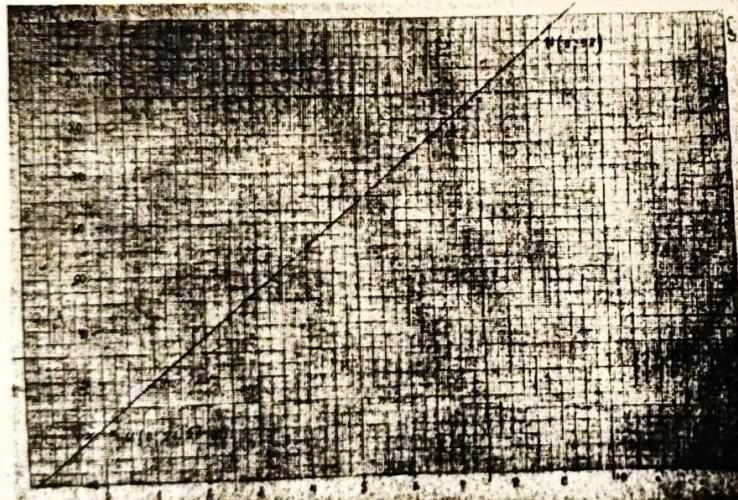
i	$\sqrt{f}, \sqrt{\text{Hz}}$
0	21.56
1	30.07

4/7

При липса на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се отписват по 0.25 т. от общия брой точки.

2	38.72
3	47.17
4	55.75
5	64.23
6	72.73
7	81.04
8	89.52
9	97.78

[0.5т.]



[2.5т.]

Точки за графиката се дават ако:

- използвана е цялата площ на листа милиметрова хартия, [1т.]
- по осите на графиката са означени съответните величини, [0.5т.]
- отбелязани са мерните единици на величините, [0.25т.]
- нанесени са всички точки от таблицата, [0.75т.]

2.4. Определете коефициентите на линейната зависимост, съответните им абсолютни и относителни процентни грешки, и ги представете по подходящ начин. [2т.]

От точките M, N от графиката:

5/7

При липса на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се списват по 0.25 т. от общия брой точки.

$$M \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 21.5 \pm 0.25\sqrt{Hz} \end{cases}$$

$$N \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 98 \pm 0.25\sqrt{Hz} \end{cases}, \text{ определяме наклона}$$

$$A = \frac{l_z}{l_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{98 - 21.5}{9} = 8.5\sqrt{Hz} \text{ [0.25т.]}$$

$$\Delta A = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 0.5\sqrt{Hz}$$

$$\Delta A = \frac{\Delta l}{9} \approx 0.06\sqrt{Hz} \text{ [0.25т.]}$$

$$A = 8.50 \pm 0.06\sqrt{Hz} = 8.50\sqrt{Hz} \pm 0.7\% \text{ [0.5т.]}$$

От пресечната точка на правата с ординатата определяме свободния член

$$B = 21.50 \pm 0.25\sqrt{Hz} = 21.5\sqrt{Hz} \pm 1\% \text{ [1т.]}$$

3. Определяне на търсените крайни величини. [4т.]

3.1. Определете стойностите на c_L и E и ги представете, с оценените им абсолютна и относителна процентна грешка, по подходящ начин. [2т.]

Пресмятане на скоростта на надлъжните вълни в пръчката c_L Измерваме дължината на пръчката с ролетката $L = 0.330 \pm 0.001 \text{ m} = 0.330 \text{ m} \pm 0.3\%$

$$c_L = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{32L^2}{\pi d} = 5008.94 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ [0.25т.]}$$

$$\frac{\Delta c_L}{c_L} = 2 \frac{\Delta A}{A} + 2 \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta d}{d} = 2 \times 0.7\% + 2 \times 0.3\% + 1\% = 3\% = 0.03 \text{ [0.25т.]}$$

$$\Delta c_L = \left(\frac{\Delta c_L}{c_L}\right) c_L = 150.3 \approx 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ [0.25т.]}$$

$$c_L = 5000 \pm 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 3\% \text{ [0.25т.]}$$

Пресмятане на модула на Юнг E :

$$E = c_L^2 \rho = 5000^2 \times 2790 = 69.75 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ [0.25т.]}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{\Delta c_L}{c_L} + \frac{\Delta \rho}{\rho} = 2 \times 3\% + 3\% = 9\% = 0.09 \text{ [0.25т.]}$$

6/7

При липса на размерности на величините, включително в таблици, графики и др. се списват по 0.25 т. от общия брой точки.

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta E}{E} \right) E \approx 6 \times 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} [0.25 \text{ т.}]$$

$$E = (70 \pm 6) \times 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} = 70 \times 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \pm 9\% [0.25 \text{ т.}]$$

3.2. Определете поредният номер на най-ниската измерена честота n_0 и минималната възможна честота $f_{\min}$ на напречните стоящи вълни в пръчката. [2 т.]

Пресмятане на поредният номер на най-ниската измерена честота n_0 :

$$\text{Ако означим с } P = \sqrt{\frac{\pi d E}{32 L^3}} = 4.2504:$$

$$n_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{P} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{21.5}{4.2504} - 1 \right) = 2.029 \approx 2 [1 \text{ т.}]$$

т.е. поредният номер на най-ниската измерена честота $n_0 = 2$

За най-ниските възможна и измерена честоти от (5) получаваме съответно:

$$f_{\min} = P(2 \times 1 + 1)^2 [0.25 \text{ т.}]$$

$$f_0 = P(2 \times n_0 + 1)^2, \text{ или } [0.25 \text{ т.}]$$

$$f_{\min} = f_0 \left(\frac{3}{5} \right)^2 = 465 \left(\frac{3}{5} \right)^2 \approx 167 \text{ Hz} [0.5 \text{ т.}]$$