

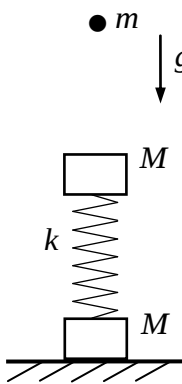
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национална олимпиада по физика

Враца, 6 април 2015 г.

Решения на темата за 10.–12. клас

Задача 1. Трупчето на пружина



Фиг. 1

А) Големината на скоростта v , с която топчето удря горното трупче, се получава от закона за запазване на механичната енергия: $mgh = mv^2 / 2$ [0,5 т], т.е. $v = \sqrt{2gh}$. [0,5 т] Ударът между топчето и трупчето е идеално еластичен и, съответно, имаме запазване на кинетичната енергия и импулса преди и след удара: $\frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv'^2}{2}$ [0,5 т] и $mv = MV - mv'$

[1 т], където V е големината на скоростта на трупчето след удара, а v' е големината на скоростта на топчето след удара. От двете уравнения получаваме, че $V = \frac{2mv}{m+M}$. [1 т] Максималното свиване на пружината е $d = d_0 + d_1$ [0,5 т], където $d_0 = Mg/k$ е свиването вследствие на силата на тежестта, която действа на горното трупче и отнема равновесното му положение надолу с $d_0 = Mg/k$ [0,5 т], а d_1 е допълнителното свиване, което следва от закона за запазване на механичната енергия: $\frac{kd_1^2}{2} = \frac{MV^2}{2}$ [0,5 т], откъдето $d_1 = V\sqrt{\frac{M}{k}}$. [0,5 т] В крайна сметка

$$d = \frac{Mg}{k} + \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}. \text{ [0,5 т]}$$

Б) Максимална сила на натиск N има при максимално свиване и тогава $N = Mg + kd = 2Mg + \frac{2m\sqrt{2kMgh}}{m+M}$. [2 т]

В) Амплитудата на хармоничните трептения е $A = d - d_0 = d_1 = \frac{2m}{m+M} \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}$. [1 т]

Г) За да подскочи долното трупче, трябва при най-горно положение на горното трупче да действа еластична сила, равна на или по-голяма от силата на тежестта, която действа на долното трупче: $k(d_1 - d_0) \geq Mg$. [1 т] Така получаваме, че $\frac{2m\sqrt{2kMgh_{\min}}}{m+M} - Mg = Mg$ [1 т],

откъдето $h_{\min} = \frac{Mg(m+M)^2}{2km^2}$. [0,5 т] В момента на отлепяне на долното трупче от хоризон-

талната повърхност големината на скоростта на средата на пружината $u = V'/2$ [1 т], където V' е големината на скоростта на горното трупче в този момент. От закона за запазване на енергията се получава, че $\frac{MV'^2}{2} = \frac{kd_1^2(h_{\min})}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{2Mg}{k} \right)^2 = \frac{2M^2g^2}{k}$. [2 т] Така получаваме, че $u = g\sqrt{M/k}$. [0,5 т]

Задача 2. КПД на фотоклетка

А) Енергията на падащите фотони е:

$$(1) \quad E_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.98 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.49 \text{ eV} \quad \text{0,5 точки}$$

От уравнението на Айнщайн намираме максималната кинетична енергия на отделените електрони:

$$(2) \quad E_k = h\nu - W = 0.49 \text{ eV} \quad \text{0,5 точки}$$

Катодът губи електрони и се зарежда положително, а анодът се зарежда отрицателно, защото върху него попадат избитите електрони. Електродите се зареждат дотогава, докато напрежението между тях достигне спирачното напрежение:

$$(3) \quad U_0 = \frac{E_k}{e} = 0.49 \text{ V} \quad \text{0,5 точки}$$

Можем да разглеждаме фотоклетката като кондензатор с капацитет:

$$(4) \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 4.43 \times 10^{-12} \text{ F} \quad \text{0,5 точки}$$

Следователно зарядите върху електродите са:

$$(5) \quad Q = \pm CU_0 = \pm 2.17 \times 10^{-12} \text{ C} \quad \text{0,5 точки}$$

Б) Червената граница съответства на минималната енергия на фотон, който може да избие електрон от катода:

$$(6) \quad \frac{hc}{\lambda_{\max}} = W \quad \text{0,5 точки}$$

От друга страна, дължината на падащата светлинна вълна е свързана с вече пресметнатата в уравнение (1) енергия E_{ϕ} на падащите фотони. Следователно можем да запишем формулата за квантовата ефективност във вида:

$$(7) \quad k = 1 - \frac{W}{E_{\phi}} = 0.20 \text{ (20\%)} \quad \text{1 точка}$$

В) За време t падащата светлина пренася енергия $E = P_0 t$. Следователно за същото време върху катода падат:

$$(8) \quad N_{\phi} = P_0 t / E_{\phi} \quad \text{1 точка}$$

фотона. Тези фотони избиват:

$$(9) \quad N_e = kN_{\phi} = \frac{kP_0 t}{E_{\phi}} \quad \text{1 точка}$$

електрона. При късо съединение напрежението между електродите на клетката е нула и всички избити електрони попадат върху анода. При това те пренасят заряд $q = eN_\phi$ и създават електричен ток:

$$(10) \quad I_0 = \frac{q}{t} = \frac{ekP_0}{E_\phi} = \frac{kP_0}{E_\phi [\text{eV}]} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ A} \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

Г) Напрежението между клемите на източника зависи от протичащия през него ток:

$$(11) \quad U = \mathcal{E} - Ir \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

При отворена верига ($I = 0$) напрежението между клемите на източника е равно на електродвижещото му напрежение. Следователно:

$$(12) \quad \mathcal{E} = U_0 = 0,49 \text{ V} \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

При късо съединение, $U = 0$, получаваме:

$$(13) \quad r = \frac{\mathcal{E}}{I_0} \approx 613 \Omega \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

Д) Мощността на консуматора е:

$$(14) \quad P_R = UI = I(\mathcal{E} - Ir) \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

В консуматора се отделя максимална мощност, когато във веригата тече ток:

$$(15) \quad I = \frac{\mathcal{E}}{2r} = \frac{I_0}{2} \quad \mathbf{1 \text{ точка}}$$

Такъв ток тече, когато съпротивлението на консуматора е равно на вътрешното съпротивление на източника. Следователно:

$$(16) \quad R = r = 613 \Omega \quad \mathbf{0,5 \text{ точки}}$$

Съответно максималната мощност е:

$$(17) \quad P_{R\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{1}{4} U_0 I_0 (\approx 9.8 \times 10^{-5} \text{ W}) \quad \mathbf{0,5 \text{ точки}}$$

Понеже мощността на падащото лъчение не зависи от съпротивлението на консуматора, максимален КПД съответства на максимална мощност на консуматора. Следователно:

$$(18) \quad \eta_{\max} = \frac{P_{R\max}}{P_0} = \frac{(E_\phi - W)^2}{4E_\phi^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{W\lambda}{hc} \right)^2 = 9.8 \times 10^{-3} \approx 1\% \quad \mathbf{2 \text{ точки}}$$

Задача 3. Бипризма на Френел.

а) Тъй като процепът (източник на светлина за лещата) се намира във фокуса на събирателната леща, снопът светлина между лещата и кюветата е успореден. **[1 т.]**

б) Лъч, успореден на оптичната ос на кюветата, пада върху наклонената стена на бипризмата под ъгъл θ . Там той ще се пречупи и по закона Снелиус $\frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{n}{n'}$ **[0,5 т.]** ъгълът на пречупване α ще бъде $\alpha \approx \frac{n'}{n} \theta$. **[0,5 т.]** Ъгълът на падане на задната стена на бипризмата ще бъде $\gamma = \theta - \alpha = \theta - \frac{n'}{n} \theta = \frac{n-n'}{n} \theta$. **[0,5 т.]** Прилагайки още веднъж закона на Снелиус $\frac{\sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{1}{n}$, $\varphi \approx n\gamma = (n - n')\theta$. **[0,5 т.]**

в) Разликата във фазовата разлика на светлината за два съседни интерференчни максимума е 2π (разликата в разликата на оптичните пътища за два съседни интерференчни максимума е λ). Така, рисувайки два вълнови фронта на разстояние λ за всеки сноп, от правоъгълния триъгълник с хипотенуза Δy , катет λ и ъгъл срещу този катет β , намираме $\frac{\lambda}{\Delta y} = \sin \beta \approx \beta$, откъдето $\Delta y = \frac{\lambda}{\beta}$. [1 т.]

г) Детекторът ще регистрира интерференчна картина, получаваща се от интерференцията на два успоредни снопа, склучващи ъгъл 2φ . [1 т.] Използвайки резултатите, получени в предните две подусловия, $\Delta x = \frac{\lambda}{2\varphi} = \frac{\lambda}{2(n-n')\theta}$. [1 т.]

д) Зоната, където се наблюдава интерференчна картина, е зоната, където се припокриват двата снопа (пречупени от горната и долната половина на бипризмата). Тази зона има форма на ромб с малък ъгъл 2φ и малък диагонал $H/2$. Широчината b на интерференчната картина ще е максимална, когато CCD съвпада с този малък диагонал, т.е. половината от големия диагонал на ромба е L . [0,5 т.] Тогава $\frac{b/2}{L} = \frac{H}{4L} = \tan \varphi \approx \varphi = (n - n'_{кр})\theta$ и $n'_{кр} = n - \frac{H}{4L\theta} \approx 1,3067$. [0,5 т.]

е) Когато показателят на пречупване на неизвестната течност n' е по-голям от $n'_{кр}$, CCD ще е разположен в по-близката до бипризмата половина на зоната на припокриване на сноповете и тогава $b \approx 2\varphi L = 2(n - n')\theta L$. [1 т.]

ж) За двете конкретни течности изчисляваме Δx и b по формулите, получени съответно в подусловия г) и е), а $N = \frac{b}{\Delta x}$. Попълваме таблицата [3 т.] (по 0,5 т. за всяка вярна стойност)

Течност	n'	$\Delta x, \mu m$	b, mm	N
Дестилирана вода	1,3330	24,55	21,60	879
65% захарен воден разтвор	1,4532	87,61	6,05	69

з) Използвайки резултатите от г), е) и ж), $n' = n - \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{N\lambda}{L}}$. [1 т.]

и) За интерференчна картина с $N_x = 300$ максимума от горната формула се получава $n'_x = 1,4025$. [0,5 т.] Използвайки дадената графика, $c_x \approx 41\%$. [0,5 т.]

к) Тъй като $n'(N) = n - \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{N\lambda}{L}}$ и $n'(N+1) = n - \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{(N+1)\lambda}{L}}$, то $\Delta n'(N) = |n'(N+1) - n'(N)| = \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\lambda}{L}} (\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) \approx \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \frac{1}{2\sqrt{N}}$. [0,5 т.] За дадените стойности $\Delta n'(300) \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$. [0,5 т.]

л) При крайни размери на процепа, всяка негова част, разглеждана като точков източник ще дава своя интерференчна картина. Тогава от различните части на процепа ще се получават разместени върху детектора интерференчни картини. При равни разстояния f и L , широчината на процепа $d_{\max}$ трябва да е по-малка от $\Delta x/2$. От пресметнатите стойности за Δx можем да направим извода, че $d_{\max} \leq 10 \mu m$. [1 т.]

Задача 4. Определяне на масата на покой на Λ^0 бариона

А) Следата (трекът) на пиона от *фиг. 1а* е дъга. За да измерим нейната дължина, можем да използваме линейка, която се огъва, лист хартия, хартиена лентичка, конец и т.н. Дължините на двата трека са:

$$\ell_p = 20,5 \text{ mm} \dots\dots 0,4 \text{ точки}; \quad \ell_\pi = 145 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,9 \text{ точки}$$

Приемаме, че грешката на измерванията се определя от точността на измерването с линейка $\pm 0,5 \text{ mm}$. При измерването на дъгата неточността е по-голяма ($\pm 1 \text{ mm}$).

$$\ell_p = 20,5 \pm 0,5 \text{ mm} \dots\dots 0,1 \text{ точки}; \quad \ell_\pi = 145 \pm 1 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

С линейка измерваме, че на $\ell_0 = 33 \text{ mm}$ от мащабната линейка отговарят $\ell = 28 \text{ mm}$.

$$\text{Мащабът е } k = \frac{\ell_0}{\ell} = 1,18 \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

Относителната грешка при определяне на мащаба е

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta \ell_0}{\ell_0} + \frac{\Delta \ell}{\ell} \approx \frac{\Delta \ell}{\ell} = 0,018 \dots\dots\dots 0,25 \text{ точки}$$

Истинската дължина на трека на протона е

$$L_p = k\ell_p = 24,2 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,4 \text{ точки}$$

$$\text{Относителната грешка е } \frac{\Delta L_p}{L_p} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell_p}{\ell_p}\right)^2} = 0,03 \dots\dots\dots 0,5 \text{ точки}$$

$$\text{Следователно: } L_p = 24,2 \pm 0,7 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

Истинската дължина на трека на пиона е

$$L_\pi = k\ell_\pi = 171 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,4 \text{ точки}; \quad L_\pi = 171 \pm 3 \text{ mm} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

От графиката на *фиг. 1б* определяме кинетичните енергии на двете частици, които съответстват на дължините на измерените трекове:

$$T_p = 45 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,9 \text{ точки}; \quad T_\pi = 60 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,9 \text{ точки}$$

Приблизителна оценка на грешката правим, като отчетем точността с която сме измерили дължините на трековете и точността, с която можем да снемем данни от графиката:

$$T_p = 45 \pm 2 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}; \quad T_\pi = 60 \pm 2 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

Пълната релативистка енергия на протона в началния момент е

$$E_p = E_{0p} + T_p = 983,3 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,4 \text{ точки}$$

Грешката е $\Delta E_p = \Delta E_{0p} + \Delta T_p = \Delta T_p = 2 \text{ MeV}$ 0,25 точки

Крайният резултат е $E_p = 983 \pm 2 \text{ MeV}$ 0,1 точка

Пълната релативистка енергия на пиона в началния момент е

$$E_\pi = E_{0\pi} + T_\pi = 199,6 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,4 \text{ точки}; \quad E_\pi = 200 \pm 3 \text{ MeV} \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

Б) Началният импулс на протона е

$$p_p = \frac{1}{c} \sqrt{E_p^2 - E_{0p}^2} = 294 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,9 \text{ точки}; \quad p_p = 294 \pm 3 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

Началният импулс на пиона е

$$p_\pi = \frac{1}{c} \sqrt{E_\pi^2 - E_{0\pi}^2} = 143 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,9 \text{ точки}; \quad p_\pi = 143 \pm 1 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

За да определим импулса на Λ^0 бариона преди разпадането, използваме закона за запазване на импулса: $\vec{p}_\Lambda = \vec{p}_\pi + \vec{p}_p$ 1 точка

От векторния триъгълник с помощта на косинусовата теорема получаваме:

$$p_\Lambda = \sqrt{p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p \cos\varphi} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

Ъгълът φ между началните импулси на двете частици измерваме от *фиг.* 1б, като използваме пунктирните линии: $\varphi = 46,5^\circ \pm 0,5^\circ$ 0,5 точки

$$p_\Lambda = 406 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,4 \text{ точки}; \quad p_\Lambda = 406 \pm 4 \text{ MeV}/c \dots\dots\dots 0,1 \text{ точка}$$

В) От закона за запазване на енергията следва, че пълната релативистка енергия E_Λ на Λ^0 бариона непосредствено преди разпадането му е равна на сумата от пълните начални релативистки енергии на двете частици продукти на разпадането:

$$E_\Lambda = E_\pi + E_p \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

Масата на покой на Λ^0 бариона изразяваме от формулата за релативистки импулс:

$$m_{0\Lambda} = \frac{E_{0\Lambda}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_p + E_\pi)^2 - c^2 p_\Lambda^2} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$$

$$m_{0\Lambda} = 1111 \text{ MeV}/c^2 \dots\dots\dots 0,8 \text{ точки}; \quad m_{0\Lambda} = (1110 \pm 10) \text{ MeV}/c^2 \dots\dots\dots 0,2 \text{ точки}$$