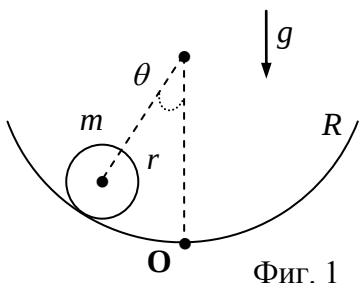


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Казанлък, 11–13 април 2014 г.

Решения на темата за 10.–12. клас – II етап

Задача 1. Търкалящо се кълбо



Фиг. 1

а) В началния момент кинетичната енергия на кълбото е нула, а потенциалната енергия спрямо т. О е $2mgr$. В момента, когато центърът на кълбото се намира в най-ниската точка от своята траектория, кинетичната енергия е равна по теоремата на Кьониг на сумата $\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$, където

$\omega = \frac{v}{r}$ е ъгловата скорост на кълбото спрямо моментната ос

на въртене, която минава през допирната точка на кълбото със сферата, а потенциалната енергия е mgr . Като използваме закона за запазване на механичната енергия

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgr, \text{ намираме, че } v = \sqrt{\frac{10gr}{7}} = 1 \text{ m/s. [2 т.]}$$

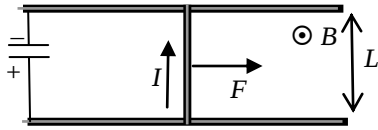
б) По време на движението на кълбото нека да означим с θ малкия ъгъл, който сключва правата, която свързва центъра на кълбото с центъра на сферата, с правата, която свързва центъра на сферата с т. О, както е показано на фиг. 1. От втория принцип на механиката следва, че $ma = mg \sin \theta - f$, където a е големината на ускорението на центъра на кълбото, а f е силата на триене при търкаляне, която е свързана с ъгловото ускорение на кълбото ε спрямо моментната ос на въртене посредством уравнението $fr = I\varepsilon$. Като използваме, че $\varepsilon = a/r$, получаваме за ускорението на кълбото $a = \frac{mg \sin \theta}{m + I/r^2} = \frac{5g \sin \theta}{7}$.

Търкалянето е без хлъзгане, така че имаме следната връзка: $(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$, където φ е ъгълът на завъртане на кълбото около моментната ос на въртене. Като използваме също така определения: $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, получаваме следното уравнение: $\ddot{\theta} = -\frac{5g \sin \theta}{7(R-r)}$, като отрицателният знак е следствие от факта, че ъгловото ускорение е в посока на намаляване на θ . Като използваме, че за малки ъгли $\sin \theta \approx \theta$, получаваме, че $\ddot{\theta} + \frac{5g\theta}{7(R-r)} = 0$, т.е.

кълбото извършва хармонични трептения с период $T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} = 1,7 \text{ s. [4 т.]}$

Задача 2. Електромагнитно оръдие

А)



(0,5 т)

Б) $I_0 = \frac{U_0}{R}$ (0,2 т)

$F_0 = I_0 BL = \frac{U_0 BL}{R}$ (0,2 т)

$a_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{U_0 BL}{mR} = 100 \text{ m/s}^2$ (0,6 т)

В) $m \frac{dv}{dt} = IBL$ (0,5 т)

$I = -\frac{dq}{dt}$ (0,5 т)

$\Rightarrow mv = BL(q_0 - q) = CBL(U_0 - U)$ (0,5 т)

$U_\infty = v_\infty BL$ (0,5 т)

$\Rightarrow (m + CB^2 L^2) v_\infty = CBLU_0$

$v_\infty = \frac{CBLU_0}{m + CB^2 L^2} = 45.5 \text{ m/s}$ (1,0 т)

Г) $\frac{dv_\infty}{dB} = CLU_0 \frac{m - CB^2 L^2}{(m + CB^2 L^2)^2} = 0$ (0,5 т)

$\Rightarrow B = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{m}{C}} = 0.316 \text{ T}$ (1,0 т)

$v_{\max} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C}{m}} = 79.1 \text{ m/s}$ (1,0 т)

Задача 3. Корпускулярни характеристики са енергията и импулса. Ще разгледаме процес с поглъщане на фонон. За падащия фотон енергията и импулса по големина са равни на $h\nu$ и $h\nu/c$, за разсеяния фотон са $h\nu''$ и $h\nu''/c$, а за фонона – $h\Omega$ и $h\Omega/u$ [1 т.]. От закона за запазване на енергията имаме

$$h\nu'' = h\nu + h\Omega \Rightarrow \nu'' = \nu + \Omega, \quad [1 \text{ т.}]$$

а от закона за запазване на импулса следват равенствата

$$(h\nu''/c) \cos \theta = h\nu/c + (h\Omega/u) \cos \alpha \Rightarrow (n\nu''/c) \cos \theta = n\nu/c + (\Omega/u) \cos \alpha, \quad [1 \text{ т.}]$$

$$(nh\nu''/c)\sin\theta = (h\Omega/u)\sin\alpha \Rightarrow (n\nu''/c)\sin\theta = (\Omega/u)\sin\alpha. \quad [1 \text{ т.}]$$

Ъгълът между импулса на падащия фотон и импулса на разсеяния фотон е θ , а ъгълът между падащия фотон и фонона е α . Като изключим от горните уравнения ъгъла α и ν'' и отчетем условието $u \ll c/n$, получаваме квадратното уравнение

$$x^2 - \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 x - \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 0, \quad [1 \text{ т.}]$$

където $x = \Omega/\nu$. Решението на уравнението е

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \right\} = \\ &= \left(\frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \left(\frac{nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 1} \right\} \approx \\ &\approx \frac{2nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad [1,5 \text{ т.}]$$

Тук е отчетено, че $nu/c \ll 1$, при което намираме

$$\Omega = \frac{2nu\nu}{c}\sin\frac{\theta}{2}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$