

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Силистра,
21 април 2013 г.
Решения на темата за 10-12 клас

Задача 1. Пропадане

а) Понеже буталото се спуска равномерно, силите, които му действат, се уравниават:

$$p_0 S + Mg - pS = 0, \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето:

$$\Delta p = \frac{Mg}{\pi R^2} \approx 6,2 \times 10^2 \text{ Pa}. \quad [1 \text{ т.}]$$

б) Минаваме в отправна система, свързана с буталото, където движението на въздуха е стационарно. В тази система въздухът под буталото се движи със скорост v нагоре. Ако означим с u скоростта на въздуха в процепа между буталото и цилиндъра, от уравнението на Бернули получаваме:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2} \quad [1,5 \text{ т.}]$$

или

$$\frac{Mg}{\pi R^2} + \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

От уравнението за непрекъснатост имаме:

$$v\pi R^2 = u\pi(R^2 - (R - \delta)^2) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

и като пренебрегнем членовете от порядъка на δ^2 получаваме

$$vR \approx 2u\delta. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

След като изразим u чрез v и го заместим в уравнението на Бернули, имаме:

$$\frac{Mg}{\pi R^2} = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{R^2}{4\delta^2} - 1 \right) \approx \frac{\rho v^2 R^2}{8\delta^2}, \quad [1 \text{ т.}]$$

$$v = \frac{2\delta}{R^2} \sqrt{\frac{2Mg}{\pi\rho}} \approx 0,031 \text{ m/s} = 3,1 \text{ cm/s}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Задача 2. Центробежно махало

а) От двете тела само тялото с маса m има момент на импулса $L \neq 0$. Той не се изменя, тъй като силата, с която нишката действа на тялото с маса m , е насочена по рамото r на силата и следователно моментът на тази сила е нула. [1 т.]

б) За да запишем енергията на системата, ще изберем вертикалната ос, насочена нагоре, а нулевото ниво на гравитационната потенциална енергия – на разстояние l под хоризонталната равнина. **[0,5 т.]** Тогава имаме

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + mgl + Mgr. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Скоростта v можем да разложим на две съставлящи – v_r , насочена по r , и $v_\perp$, перпендикулярна на r , като имаме

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Освен това моментът на импулса се дава с израза

$$L = mv_\perp r = \text{const}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето следва $v_\perp = \frac{L}{mr}$.

След като заместим в израза за енергията имаме

$$\varepsilon = E - mgl = \frac{(m+M)v_r^2}{2} + Mgr + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

където е отчетено, че $V = v_r$. [0,5 т.] Тук потенциалната енергия на частицата с маса $m + M$ е

$$U(r) = Mgr + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

в) Потенциалната енергия $U(r)$ има минимум при

$$r_0 = \left(\frac{L^2}{mMg} \right)^{1/3}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

който е равен на

$$U_0 = Mgr_0 + \frac{L^2}{2mr_0^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{M^2 g^2 L^2}{m} \right)^{1/3}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Тогава можем да запишем при $(r - r_0)/r_0 \ll 1$ следния израз за енергията:

$$\varepsilon = \frac{(m + M)v_r^2}{2} + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + U_0, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

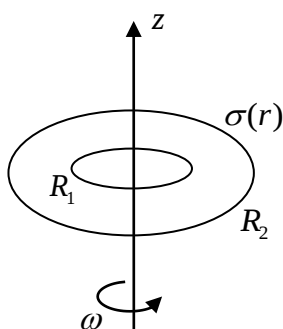
където

$$k = U''(r_0) = \frac{3m^{1/3}(Mg)^{4/3}}{L^{2/3}} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

е коефициентът на еластичност. Тогава периодът се дава с изказа

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{3g}} \times \sqrt{1 + \frac{m}{M}}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Задача 3. Въртящ се зареден пръстен



а) От закона на Био-Савар за безкрайно тънък пръстен от диска с дебелина dr и радиус r следва, че магнитната индукция на този

тънък пръстен е $dB = \frac{\mu_0 a \omega dr}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$. [2 т.]

Като се интегрира по r от R_1 до R_2 , се получава за пълната

индукция на пръстена $B(z) = \frac{\mu_0 a \omega}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right)$. [1 т.]

б) Имаме затворени токови линии в еднородно магнитно поле, т.е. силата F , която действа на пръстена, ще бъде нула. [1 т.]

в) Разглеждаме безкрайно тънък пръстен от диска с дебелина dr и радиус r като затворен токов контур. Като използваме правилото, че $d\vec{M} = S\vec{n} \times \vec{B}_0 dI$ [1 т.]

за въртящия момент на този токов контур и го проинтегрираме

от R_1 до R_2 , ще получим, че $M = \frac{\pi a \omega B_0 \cos \alpha (R_2^2 - R_1^2)}{2}$. [1 т.]