

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг
Хасково, 21 – 22 април 2012 г.
Решения на темата за 10. – 12. клас
Първи етап

Задача 1. Ефектът на доминото

а) При еластичен удар са изпълнени законите за запазване на импулса и на механичната енергия:

$$(1) \quad mv_0 = mv_1 + mv_2$$

$$(2) \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

От тях намираме, че скоростите на трупчетата след удара са:

$$(3) \quad v_1 = 0$$

$$(4) \quad v_2 = v_0$$

т.е. падащото трупче спира, а второто поема цялата му кинетична енергия.

б) При нееластичен удар е изпълнен само законът за запазване на импулса:

$$(5) \quad mv_0 = mv_1 + mv_2$$

Относителната скорост на трупчетата преди удара е:

$$(6) \quad v_{\text{отн}} = v_0$$

а след удара:

$$(7) \quad v'_{\text{отн}} = v_2 - v_1$$

От дефиницията на коефициента на възстановяване следва:

$$(8) \quad v_2 - v_1 = \eta v_0$$

Решаваме уравненията (5) и (8) като система, откъдето определяме:

$$(9) \quad v_2 = \frac{1+\eta}{2} v_0$$

$$(10) \quad v_1 = \frac{1-\eta}{2} v_0$$

От II принцип на термодинамиката следва:

$$(11) \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \Delta U$$

откъдето получаваме:

$$(12) \quad \Delta U = \frac{(1-\eta^2)mv_0^2}{4}.$$

в) Нека скоростта на N -тото трупче, след като бъде ударено, е v_N . От закона за запазване на механичната енергия следва, че то ще достигне намиращата се под него тераса със скорост:

$$(13) \quad v'_N = \sqrt{v_N^2 + 2gh},$$

която играе ролята на начална скорост при удара с $N+1$ -вото трупче. Като използваме формула (9), намираме скоростта на $N+1$ -вото трупче след удара с N -тото:

$$(14) \quad v_{N+1} = \frac{1+\eta}{2} \sqrt{v_N^2 + 2gh}.$$

Понеже $v_N \rightarrow v_\infty$ и $v_{N+1} \rightarrow v_\infty$, след граничен преход в двете страни на уравнение (14), намираме:

$$(15) \quad v_\infty = \frac{1+\eta}{2} \sqrt{v_\infty^2 + 2gh}.$$

Оттук определяме граничната скорост на трупчетата:

$$(16) \quad v_{\infty} = \frac{1+\eta}{\sqrt{(1-\eta)(3+\eta)}} \sqrt{2gh}$$

Схема на оценяване

Елемент от решението / подусловие	Точки
Прилага закона за запазване на импулса	1,0
Прилага закона за запазване на енергията	1,0
Получава израз за скоростта v_1	0,5
Получава израз за скоростта v_2	0,5
Общо по т. а	3,0
Прилага закона за запазване на импулса	1,0
Изразява относителната скорост преди удара	1,0
Изразява относителната скорост след удара	1,0
Прилага дефиницията за коефициента η	1,0
Получава израз за скоростта v_1	1,0
Получава израз за скоростта v_2	1,0
Прилага II принцип на ТД за удара	1,0
Получава израз за ΔU	1,0
Общо по т. б	8,0
Прилага ЗЗЕ и намира скоростта при спускане на по-долно стъпало	1,0
Изразява скоростта на следващото трупче след удара	1,0
Получава уравнение за v_{∞} след граничен преход	1,0
Намира окончателен израз за v_{∞}	1,0
Общо по т. в	4,0
Общо за задачата	15,0

Задача 2. Въртящ се зареден цилиндър

а) Кинетичната енергия на теглилната е $mv^2/2$

1 точка

Скоростта на всички точки от повърхността на цилиндъра е равна на скоростта v на теглилната. (Нишката е в покой спрямо повърхността – не се хлъзга по нея.) Тъй като цилиндърът е тънкостенен, всички точки от него практически се намират на повърхността и се движат със скорост v .

Следователно кинетичната енергия на цилиндъра е $\frac{Mv^2}{2}$

1 точка

Кинетичната енергия на системата е $W_k = \frac{(M+m)v^2}{2}$.

б) При въртенето на цилиндъра електричните заряди се движат със скорост v и описват окръжности, т.е. по повърхността на цилиндъра тече електричен ток, подобен на тока, който тече по цилиндрична намотка (соленоид). Да разгледаме мислена неподвижна линия, която преминава през повърхността на цилиндъра и е успоредна на оста му. За малък интервал от време Δt през тази линия (сечение на проводника, по който тече ток)

преминава електричен заряд $\Delta q = \left(\frac{Q}{2\pi RL} \right) Lv \Delta t$, където изразът в скобите е зарядът на единица площ от повърхността на цилиндъра. Електричният ток е

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{Q}{2\pi R} v$$

2 точки

Токът на единица дължина на цилиндъра е

$$i = \frac{I}{L} = \frac{Q}{2\pi RL} v$$

1 точка

Магнитното поле на тока е

$$B = \mu_0 i = \frac{\mu_0 Q}{2\pi R L} v \quad \text{1 точка}$$

в) Вариант 1 (от общи съображения). От 9. клас знаем, че енергията на магнитното поле на ток, който тече по проводник, е пропорционална на квадрата на тока: $W_B = \frac{LI^2}{2}$, където L в случая е индуктивността на проводника. Токът, от друга страна, е пропорционален на скоростта v на насочено движение на електричните заряди.

$$\text{Следователно } W_B = \frac{kv^2}{2} \quad \text{2 точки}$$

Вариант 2 (пълно решение). Плътноста на енергията на магнитното поле е

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 Q^2}{8\pi^2 R^2 L^2} v^2 \quad \text{1 точка}$$

Енергията на магнитното поле е

$$W_B = w_B (\pi R^2 L) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L} \right) v^2 \quad \text{2 точки}$$

$$\text{Следователно } W_B = \frac{1}{2} kv^2, \text{ където } k = \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L} \quad \text{1 точка}$$

г) Да приемем, че в началното положение, когато системата е в покой, гравитационната потенциална енергия на теглилката е нула. Когато теглилката измине път s , нейната потенциална енергия е

$$W_g = -mgs \quad \text{1 точка}$$

От закона за запазване на енергията следва равенството

$$W_k + W_B + W_g = 0 \text{ или } \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{1}{2} kv^2 - mgs = 0 \quad \text{1 точка}$$

Записваме горното равенство във вида $s = \frac{1}{2} \frac{(M+m+k)}{mg} v^2$. От друга страна, при

равноускорително движение без начална скорост е в сила равенството $s = \frac{v^2}{2a}$.

Като сравним двете равенства, стигаме до извода, че теглилката се движи равноускорително

$$\text{Нейното ускорение е } a = \frac{mg}{M+m+k}; \quad \text{1 точка}$$

$$a = \frac{mg}{M+m+\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}} \quad \text{1 точка}$$

Забележка. Задачата има и друго решение, което дава възможност за по-задълбочено вникване във физиката на процесите – каква е природата на силата, която забавя въртенето на цилиндъра.

Магнитното поле в цилиндъра е променливо. Съгласно закона на Фарадей, то индуцира вихрово електрично поле. От симетрията следва, че силовите линии на вихровото електрично поле са концентрични окръжности, с център върху оста на диска. От закона

на Фарадей $E(2\pi R) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -(\pi R^2) \frac{\Delta B}{\Delta t}$ определяме интензитета на вихровото поле

$$E = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi L} \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi L} a. \text{ На заредения цилиндър вихровото електрично поле действа с}$$

електрична сила $F = QE$. Тази сила създава въртящ момент $M = FR = QER$, който съгласно правилото на Ленц препяства въртенето на диска. Уравнението на моментите

за въртенето на диска е $RT + M = \varepsilon I$. Ъгловото ускорение е $\varepsilon = \frac{a}{R}$, инерчният момент на тънкостенния цилиндър е $I = MR^2$. Силата на опъване на нишката T изразяваме от уравнението за постъпателното движение на теглилка $mg - T = ma$. След заместване на всички величини в уравнението на моментите получаваме

$$m(g - a)R - \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L} aR = \frac{a}{R} MR^2, \text{ откъдето определяме ускорението } a = \frac{mg}{M + m + \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}}.$$

Задача 3. Заредено пружинно махало.

а) Тъй като трептенето на махалото започва от неподвижно състояние, амплитудата му на трептене е равна на разстоянието до равновесното положение при наличие на втория заряд. Тогава в равновесие от равенството на еластичната сила на свитата (фиг. 1) или разтегнатата (фиг. 2) пружина и на силата на кулоново отблъскване или привличане

$$\text{имаме} \quad k_0 A_1 = k_0 A_2 = k \frac{q^2}{x_0^2}, \quad [1 \text{ т.}]$$

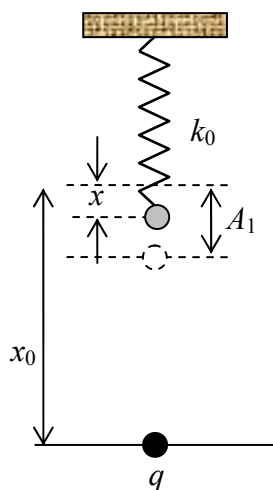
и за амплитудата на трептене получаваме

$$A_1 = A_2 = \frac{kq^2}{k_0 x_0^2} \approx 1 \text{ cm}. \quad [1 \text{ т.}]$$

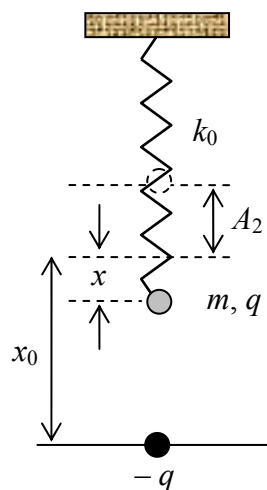
б) Ще отбележим, че в първия случай равновесното положение се намира на разстояние A_1 над първоначалното положение на махалото, а във втория случай – на разстояние A_2 под първоначалното положение на махалото. Тогава имаме

$$r = A_1 + A_2 \approx 2 \text{ cm}. \quad [2 \text{ т.}]$$

в) За да намерим коефициентите на еластичност на въртящата сила нека тялото с маса m е отклонено на разстояние x надолу от равновесното положение (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогава за големината на въртящата сила в първия случай имаме

$$F_1 = \frac{kq^2}{(x_0 - x)^2} - k_0(A_1 - x) = k_0 x + kq^2 \left(\frac{1}{(x_0 - x)^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) = k_0 x + kq^2 \left(\frac{2x(x_0 - x)}{x_0^2(x_0 - x)^2} \right). \quad [3 \text{ т.}]$$

Като отчетем, че $x \ll x_0$, намираме

$$F_1 \approx \left(k_0 + \frac{2kq^2}{x_0^3} \right) x = k_1 x. \quad [1,5 \text{ т.}]$$

Във втория случай (фиг. 2) имаме

$$F_2 = k_0(A_2 + x) - \frac{kq^2}{(x_0 - x)^2} = k_0x + kq^2 \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{(x_0 - x)^2} \right) = k_0x + kq^2 \left(\frac{-2x(x_0 + x)}{x_0^2(x_0 - x)^2} \right), [3 \text{ т.}]$$

откъдето при $x \ll x_0$ намираме

$$F_2 \approx \left(k_0 - \frac{2kq^2}{x_0^3} \right) x = k_2 x. [1,5 \text{ т.}]$$

г) Периодът на трептене в първия случай е

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0 + \frac{2kq^2}{x_0^3}}} \approx 0,26 \text{ s}, [1 \text{ т.}]$$

а във втория случай имаме

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0 - \frac{2kq^2}{x_0^3}}} \approx 0,31 \text{ s}. [1 \text{ т.}]$$

Задача 4. Вакуумен фотодиод.

а) Отделителната работа A на метала, от който е направен фотокатода, може да се изчисли от уравнението на Айнщайн за външния фотоефект:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} [1 \text{ т.}]. \text{ От дадената графика се вижда, че големината на спиращото}$$

напрежение е $U = 0,407 \text{ V}$ [1 т.]. Следователно $A = \frac{hc}{\lambda} - eU$ [1 т.]. След заместване

$$\text{получаваме } A = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{488 \cdot 10^{-9} \text{ m}} - 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,407 \text{ V} = 3,42 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,14 \text{ eV}.$$

[1 т.] Използваният метал е Cs. [1 т.]

б) За да тече ток през фотодиода трябва $h\nu = \frac{hc}{\lambda} > A$ [2 т.]. Следователно

$\lambda < \frac{hc}{A} = 582 \text{ nm}$. [2 т.] Следователно видимата светлина трябва да има дължина на вълната $\lambda \in (400, 582) \text{ nm}$. [1 т.]

в) От графиката се вижда, че при големи положителни стойности на напрежението, токът през фотодиода клони към стойност $I_{\text{нас}} = 39,2 \text{ }\mu\text{A}$ (тази стойност се нарича ток на насищане) [1 т.]. Това означава, че тогава всички електрони, напуснали фотокатода, достигат другия електрод. Следователно броят на електроните, напуснали фотокатода, за 1 s е $N_e = I_{\text{нас}} \cdot 1 \text{ s} / e$. [1 т.] Падналият брой фотони за една секунда е

$$N_{ph} = \frac{P \cdot 1 \text{ s}}{h\nu} = \frac{P \cdot 1 \text{ s} \cdot \lambda}{hc}. [1 \text{ т.}] \text{ Следователно квантовият добив } \eta = \frac{I_{\text{нас}} hc}{eP\lambda} = 10,0 \%. [2 \text{ т.}]$$