

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Кърджали,
30 април 2011 г.
Решения на темата за 10-12 клас

Задача 1. Разход на гориво.

а) За да определим ъгловата скорост на въртене на стрелката е необходимо да определим количеството гориво, което се изразходва за 1 час [1 т].

При скорост 50 km/h то е 2 литра/час [1 т], а при скорост 130 km/h – 10,4 литра/час [1 т]. Пълен резервоар от 40 литра съответства на 120^0 (12 деления). Тогава ъгловата скорост на стрелката ще бъде съответно $(120^0 / 40) * 2 = 6^0$ (6 деления) на час [1 т] при скорост 50 km/h и $(120^0 / 40) * 10,4 = 31,2^0$ (3,1 деления) на час [1 т] при скорост 130 km/h.

б) Тъй като съпротивителната сила на въздуха зависи от квадрата на скоростта, по същия начин ще зависи работата [1 т] (и съответно частта от горивото, което отива за преодоляване на въздушното съпротивление при движение с постоянна скорост). Ако означим с x разхода на гориво на 100 km при постоянна скорост на движение, ще получим $x = A + B.v^2$ [1 т]. Като заместим със стойностите при 50 и 130 km/h, получаваме система от две уравнения с две неизвестни:

$$4 = A + 2500*B$$

$$8 = A + 16900*B$$

Откъдето намираме $B = 4/14400$ и $A = 47600/14400$ [1 т] и съответно разходът при 90 km/h ще бъде $X_{90} = 476/144 + (4*8100)/14400 = 5,55..$ литра/100 километра [1 т]. Разходът на час ще бъде 5 литра на час, а ъгловата скорост на разходомера - $(120^0 / 40) * 5 = 15^0$ (1,5 деления) на час. [1 т]

в) За да оценим необходимото количество гориво за работа на място, то е необходимо да свържем скоростта с разхода на гориво за единица време. Тогава стойността на тази функционална зависимост при $v = 0$ ще ни даде разхода на гориво при работещ двигател на спрял автомобил [1 т].

За преодоляване на силата на въздушното съпротивление ($\sim v^2$) ще е необходима мощност $\sim v^3$ [1 т] (която е пропорционална на работата за единица време при постоянна скорост на движение). Така, че зависимостта на изразходваното за единица време гориво (означаваме с y) ще апроксимираме с $y = C + D.v^3$ [1 т], където C и D са константи, като получената стойност за C ще е оценката за изразходваното гориво при работа на двигател за спрял автомобил.

Ако се прекара бест-фит права през трите точки се получава $y = 1,23 + 5,39*v^3$, което ни дава разход от 1,23 литра/час за работещ на място двигател. [2 т]

(Алтернативно стойността на C може да получим от две уравнения с две неизвестни с данните за разхода при 50 и 130 km/h – $C = 1,33$ литра/час.)

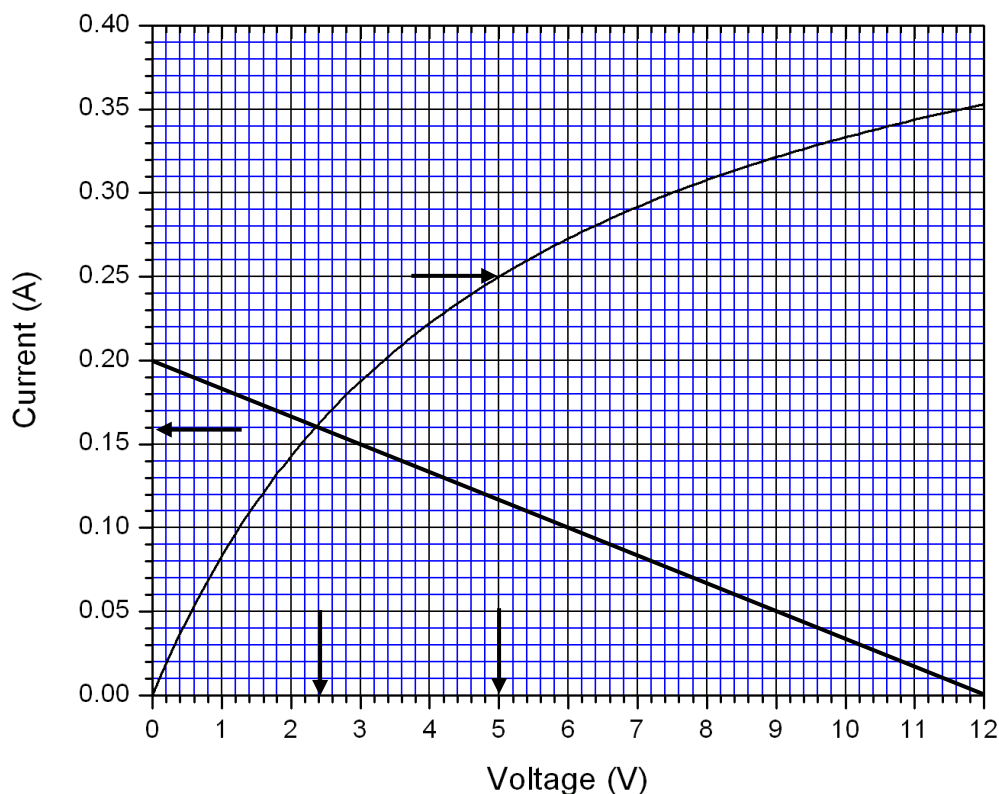
Задача 2. Нелинейно съпротивление.

Част 1.

а) При ток $I_0 = 0,25$ А във веригата, от дадената графика се получава, че напрежението върху второто съпротивление е $U_2 = 5,0$ V. От закона на Ом:

$$E = I_0 R_0 + U_0 \text{ се получава: } R_0 = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{12,0V - 5,0V}{0,25A} = 28 \Omega. [3 т.]$$

б) От закона на Ом следва: $E = I_2 R_0 + U_2(I_2)$ (с $U_2(I_2)$ бележим напрежението върху втория резистор). Следователно $U_2(I_2) = E - I_2 R_0$. Това е уравнение на права, която при $R_0 = 60 \Omega$ пресича осите на волтамперната характеристика в точките (12 V, 0 A) и (0 V, 0,2 A). Пресечната точка на тази права с волтамперната характеристика има координати (2,4 V, 0,16 A). Следователно токът във веригата е $I_2 = 0,16$ А, а напрежението върху втория (нелинейния) резистор е $U_2 = 2,4$ V. [4 т.]



Част 2.

а) При установено термодинамично равновесие, отделеното количество топлина в резистора за единица време ще е равно на разсеяното такава: $\frac{E^2}{R_0(1+\alpha t)} = \beta(t-t_0)$, откъдето се получава квадратно уравнение за температурата t : $\alpha t^2 + (1-\alpha t_0)t - \left(\frac{E^2}{\beta R_0} + t_0\right) = 0$. Само по-голямото от двете решения има физичен смисъл:

$$t = \frac{-(1-\alpha t_0) + \sqrt{(1-\alpha t_0)^2 + 4\alpha \left(\frac{E^2}{\beta R_0} + t_0\right)}}{2\alpha} . \text{ След заместване с дадените стойности } t = 77,3^\circ\text{C}. [4 \text{ т.}]$$

б) от условието на задачата: $\frac{U^2}{R(U)} = \beta(t-t_0)$, а $R(U) = R_0(1+\alpha t)$. Изразявайки температурата t от второто уравнение и замествайки я в първото, получаваме:

$$\frac{U^2}{R(U)} = \beta \left[\frac{R(U) - R_0}{R_0 \alpha} - t_0 \right] . \text{ След опростяване се получава следното квадратно уравнение за } R(U): R(U)^2 - R_0(1+\alpha t_0)R(U) - \frac{U^2 R_0 \alpha}{\beta} = 0 . \text{ Само положителното му решение има}$$

$$\text{физически смисъл: } R(U) = \frac{R_0(1+\alpha t_0) + \sqrt{R_0^2(1+\alpha t_0)^2 + \frac{4U^2 R_0 \alpha}{\beta}}}{2} . \text{ При достатъчно малки}$$

напрежения второто събираемо под радикала ще стане много по-малко от първото събираемо и може да се използва приближена формула:

$$R(U) = \frac{1}{2} R_0 (1 + \alpha t_0) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4U^2 R_0 \alpha}{\beta R_0^2 (1 + \alpha t_0)^2}} \right] \approx \frac{1}{2} R_0 (1 + \alpha t_0) \left[1 + \left(1 + \frac{2U^2 R_0 \alpha}{\beta R_0^2 (1 + \alpha t_0)^2} \right) \right] =$$

$$R_0 (1 + \alpha t_0) \left[1 + \frac{\alpha U^2}{\beta R_0 (1 + \alpha t_0)^2} \right] = R_0 (1 + \alpha t_0) + \frac{\alpha}{\beta (1 + \alpha t_0)} U^2. \text{ След заместване с дадените}$$

стойности: $R(U) = 106,7 \Omega + 0,1563 \frac{\Omega}{V^2} U^2$. Следователно $A = 106,7 \Omega$ и $B = 0,1563 \Omega/V^2$.

[4 т.]

Задача 3. Термодинамика на цикличен процес.

а) От уравнението на адиабатния процес $pV^\gamma = \text{const}$ с показател на адиабатата $\gamma = \frac{5}{3}$ (хелият е едноатомен газ) намираме

$$p_1 = p_0 \varepsilon^\gamma \approx 3,2 \text{ atm.} \quad [1 \text{ т.}]$$

В процеса 4–1 налягането p е пропорционално на обема V , т.е. $\frac{p}{V} = \text{const}$ и за

налягането p_2 получаваме

$$p_2 = p_0 \omega = 2 \text{ atm.} \quad [1 \text{ т.}]$$

б) Работата A , която извършва двигателят за един цикъл е

$$A = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} = Q_1 - Q_2. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Работното вещество получава топлина Q_1 при изобарния процес и отдава топлина Q_2 при изохорния процес и процеса 4–1. Тогава

$$Q_1 = \nu c_p (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_0 V_0 \varepsilon^{\gamma-1} (\varepsilon \omega - 1) \approx 595 \text{ J,} [2 \text{ т.}]$$

където е отчетено, че $c_p = (5/2)R$ и уравнението на състояние на идеален газ е

$$pV = \nu RT.$$

От друга страна

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

където

$$Q_{21} = \nu c_v (T_3 - T_4) = \frac{3}{2} (p_1 - p_2) V_2 = \frac{3}{2} p_0 V_0 (\varepsilon^\gamma - \omega) \omega. [1 \text{ т.}]$$

В процеса 4–1 моларният топлинен капацитет е

$$c = c_v + p \frac{\Delta V}{\Delta T} = 2R, \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето следва

$$Q_{22} = \nu c (T_4 - T_1) = 2(p_2 V_2 - p_0 V_0) = 2p_0 V_0 (\omega^2 - 1). [1 \text{ т.}]$$

Тогава имаме

$$Q_2 = \frac{1}{2} p_0 V_0 (3\varepsilon^\gamma + \omega^2 - 4) \approx 238 \text{ J} \quad [1 \text{ т.}]$$

и извършената от топлинния двигател работа за един цикъл е

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0 [\varepsilon^\gamma (5\omega - 3) - 5\varepsilon^{\gamma-1} - \omega^2 + 4] \approx 357 \text{ J.} \quad [1 \text{ т.}]$$

в) По определение КПД на цикъла е

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \approx 0,60. \quad [1 \text{ т.}]$$

г) В хладилния цикъл отнетата топлина от охлаждащото тяло е Q_2 (топлината, която е получена от работното вещество), а извършената от външен източник работа е A . Ефективността на хладилника се дава с израз

$$\varphi = \frac{Q_2}{A} = \frac{1-\eta}{\eta} \approx 0,67. \quad [2 \text{ т.}]$$

Когато цикълът се използва в топлинна помпа, отдадената топлина на нагряваното тяло е Q_1 (топлината, отдадена от работното вещество), а извършената от външен източник работа е A . Ефективността на топлинната помпа е

$$\psi = \frac{Q_1}{A} = \frac{1}{\eta} \approx 1,67. \quad [2 \text{ т.}]$$

Задача 4. Релативистки свят

А) Времето t_1 е интервал от собствено време за часовника в самолета. Времето t_2 , отчетено в инерциалната отправна система, е:

$$t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Следователно $t_2 > t_1$. [0,5 т.]

Спрямо Земята, самолетът обикаля Екватора за време:

$$t_2 = \frac{L}{v}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Следователно времето за една обиколка спрямо часовника в самолета е:

$$t_1 = \frac{L}{v} \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Оттук получаваме:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v} (1 - \sqrt{1-v^2/c^2}) \quad [1 \text{ т.}]$$

Когато $v/c \ll 1$, можем да използваме приблизителното равенство на Бернули: $(1+x)^n \approx 1+nx$, където $x = -v^2/c^2$ и $n = 1/2$. Така получаваме:

$$\Delta t \approx \frac{Lv}{2c^2} \quad [1 \text{ т.}]$$

или $\Delta t \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. [1 т.]

Периодът на трептене на вълната, която излъчва цезиевият атом е:

$$T = \frac{\lambda}{c} \approx 1,07 \cdot 10^{-10} \text{ s}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Следователно разликата във времената на двата часовника отговаря на:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \approx 656 \quad [0,5 \text{ т.}]$$

периода на трептене.

Б) Законите за запазване на импулса и енергията при удара се записват съответно:

$$\frac{m_1 v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad [1 \text{ т.}]$$

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + m_2 c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad [1 \text{ т.}]$$

След като разделим почленно двете уравнения, намираме скоростта на новата частица:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad [1 \text{ т.}]$$

За масата в покой на новата частица съответно намираме:

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}} \quad [1 \text{ т.}]$$

За подкорения израз е изпълнено неравенството:

$$m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 = (m_1 + m_2)^2 \quad [1 \text{ т.}]$$

Следователно:

$$m > m_1 + m_2 \quad [1 \text{ т.}]$$

При нееластичен удар част от кинетичната енергия на частиците се трансформира във вътрешна енергия на новообразуваната частица. Оттук и от еквивалентността между маса и енергия следва, че масата в покой на новата частица е по-голяма от сумата на енергиите в покой на началните частици. [1 т.]

Когато $v_0/c \ll 1$ можем да приемем, че без съществена загуба на точност

$$v \approx \frac{v_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

което е класическият резултат. За определяне на Δm обаче това приближение не е достатъчно. В случая трябва да използваме формулата на Бернули:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}} \approx \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 + m_1m_2 v_0^2/c^2} = \\ &= (m_1 + m_2) \sqrt{1 + \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_0^2/c^2} \approx (m_1 + m_2) + \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2/c^2 \end{aligned}$$

Следователно:

$$\Delta m \approx \frac{m_1m_2v_0^2}{2(m_1 + m_2)c^2} \quad [1,5 \text{ т.}]$$