

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Кърджали,
1 май 2011 г.
Тема за 10-12 клас

Задача 1. Часовникар-перфекционист.

Часовникар конструира голям степен часовник. Махалото се състои от тънка дълга пръчка, чиято маса се пренебрегва и масивен диск с маса m и радиус r , неподвижно закрепен за пръчката. Разстоянието между точката на окачване на махалото и центъра на диска се бележи с l (като $l > r$).

а) Изразете периода T на махалото чрез g , l и r . [2 т.]

б) Махалото трябва да има период $T = 2,000$ s. Земното ускорение е $g = 9,810 \text{ m/s}^2$. Какви стойности са допустими за радиуса r на диска? [1 т.]

в) Нека $r = 10$ cm. Изчислете дължината l . [1 т.]

г) Часовникарят с ужас забелязал, че така конструирания часовник изостава с 1 минута на седмица. Накъде и с колко трябва да се премести диска по пръчката така, че часовникът да работи точно? [3 т.]

Инерчен момент на диск спрямо ос, минаваща през центъра на масата и перпендикулярна на диска: $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$

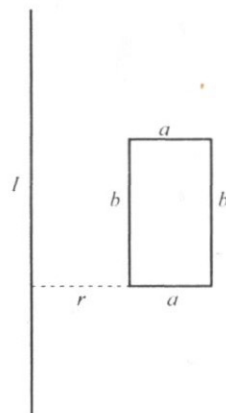
Задача 2. Взаимодействие на прав проводник и рамка.

Достатъчно дълъг прав проводник лежи в равнината на правоъгълна рамка (с размери a и b) на разстояние r до една от страните. По проводника тече променлив ток с ефективна стойност I_{eff} и честота f .

а) Определете потока на магнитната индукция и индуцираното от проводника $\mathcal{E}$ в рамката. [2 т.]

б) Определете моментната стойност на тока, който ще тече в рамката, ако тя е направена от метален проводник със специфично съпротивление ρ и напречно сечение S . В каква посока тече този ток? [2 т.]

в) Получете аналитичен израз за моментната стойност на силата, която ще действа върху рамката. Накъде е насочена тази сила? [3 т.]



Полезни формули за интеграл и производни:

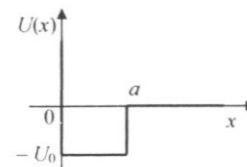
$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x); \quad \frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

Задача 3. Адсорбция на атомарен водород от метална повърхност.

Процесът на адсорбция на атомарен водород от повърхността на метал може да бъде описан като захващане на водороден атом от потенциална яма $U(x)$. Тя се задава с израза

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0 \\ -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

и има вида (вж. фигурата)



където оста $0x$ е перпендикулярна на повърхността на метала. Тя съответства на $x = 0$, а обемът му – на $x < 0$. Широчината на ямата е $a = 8 \text{ \AA}$,

Оценете дълбочината U_0 на ямата, ако от експеримента се знае енергията на десорбция на водородния атом $D = 0,086 \text{ meV}$. Тя се определя като разлика между минималната енергия на атома, когато е свободен, и минималната му енергия, когато е прилепнал към повърхността на метала, т.е. е захванат от ямата. [6 т.]

Полезни числени стойности:

Константа на Планк	$h = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Маса на H-атом	$M = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Кърджали,
1 май 2011 г.
Решения на темата за 10-12 клас

Задача 1. Часовникар-перфекционист.

а) От втория закон на Нютон за въртеливото движение следва: $M = I\varepsilon$,
 $-mgl \sin \alpha = (I_0 + ml^2)\varepsilon$, $-mgl \sin \alpha = (\frac{1}{2}mr^2 + ml^2)\varepsilon$ (1.1). α е ъгълът на отклонение, а

$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ - ъгловото ускорение. При малки ъгли на отклонение $\sin \alpha \approx \alpha$ и тогава

$$\varepsilon + \frac{g}{r^2 + l} \alpha = 0. \text{ Следователно } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^2 + l}{g}}. \quad (1.2) \quad [2 \text{ т.}]$$

б) От (1.2) се получава квадратно уравнение за l : $\frac{4\pi^2}{T^2}l^2 - gl + \frac{4\pi^2}{2T^2}r^2 = 0$. (1.3) За да има решение, дискриминантата трябва да е неотрицателна:

$$D = g^2 - 4 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{4\pi^2}{2T^2} r^2 \geq 0, \text{ следователно } r \leq \frac{gT^2}{4\sqrt{2}\pi^2} = 0,703 \text{ m.} \quad [1 \text{ т.}]$$

$$\text{в) двете решения на (1.3) са: } l_{1,2} = \frac{g \pm \sqrt{g^2 - \frac{32\pi^4 r^2}{T^4}}}{2 \frac{4\pi^2}{T^2}} = \frac{9,810 \pm 9,710}{19,74} = 0,9889 \text{ m}$$

(само решението със знак "+" е по-голямо от дадената стойност за r). [2 т.]

$$\text{г) Ако от (1.2) се получи производната } \frac{dT}{dl}, \text{ то } \frac{dT}{dl} = 2\pi \frac{1}{2} \frac{g \left(-\frac{r^2}{2l^2} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{r^2}{2l^2} + 1}} =$$

$$\frac{2\pi^2}{gT} \left(1 - \frac{r^2}{2l^2} \right) \approx \frac{2\pi^2}{gT}. \quad [1 \text{ т.}] \text{ Следователно } \Delta l \approx \frac{gT}{2\pi^2} \Delta T = \frac{gT^2}{2\pi^2} \frac{\Delta T}{T}. \text{ При}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1 \text{ min}}{1 \text{ седмица}} \approx 1,0 \cdot 10^{-4}, \Delta l \approx \frac{9,810 \text{ m/s}^2 \cdot (2,000 \text{ s})^2}{2\pi^2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \approx 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,2 \text{ mm.} \quad [1 \text{ т.}]$$

Дискът трябва да се премести нагоре. [1 т.]

Задача 2. Взаимодействие на прав проводник и рамка.

а) Течащият по проводника променлив ток ще създава на разстояние x магнитно поле с големина $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, където $I = I_0 \sin(2\pi ft) = I_0 \sin(\omega t)$, а $I_0 = I_{\text{eff}} \sqrt{2}$ [0,5 т.]. Рамката може да разделим на вертикални слоеве с дебелина dx , за които магнитният поток ще

бъде $d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b \cdot dx$ [0,5 т.]. Пълният магнитен поток през рамката получаваме чрез

$$\text{интегриране } \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_r^{r+a} \frac{dx}{x} \text{ или } \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

От закона на Фарадей $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ за индуцираният ЕДН получаваме

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} b \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \cos(\omega t) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

б) Съпротивлението на рамката от проводник ще бъде $R = 2 \cdot \rho \cdot (a+b)S$ [0,5 т.], а токът през рамката - $I_1 = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} b \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \cos(\omega t)$ [0,5 т.]. Посоката на токът I_1

определяме от правилото на Ленц:

1. Когато токът през проводника тече нагоре и нараства, токът I_1 през рамката ще тече обратно на часовниковата стрелка; [0,25 т.]
2. Когато токът през проводника тече нагоре и намалява, токът I_1 през рамката ще тече по часовниковата стрелка; [0,25 т.]
3. Когато токът през проводника тече надолу и нараства, токът I_1 през рамката ще тече по часовниковата стрелка; [0,25 т.]
4. Когато токът през проводника тече надолу и намалява, токът I_1 през рамката ще тече обратно на часовниковата стрелка; [0,25 т.]

в) Поради симетрията на задачата, силите, които действат на хоризонталните елементи на рамката са равни по големина и обратни по посока във всеки един момент от време и равнодействащата им върху рамката е нула. [0,5 т.]

Тъй като двата вертикални елемента на рамката се намират на различно разстояние от рамката, силите върху тях са противоположни по посока, но с различна големина. Силата върху левия вертикален елемент ще бъде:

$$F_l = I_1 B(r) b = \frac{\mu_0^2 I_0^2 b^2 \omega}{(2\pi)^2 R r} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

$$\text{или като използваме формулата за удвоен ъгъл } F_l = \frac{\mu_0^2 I_0^2 b^2 \omega}{8\pi^2 R r} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \sin(2\omega t)$$

$$\text{Силата върху десния вертикален елемент ще бъде } F_r = \frac{\mu_0^2 I_0^2 b^2 \omega}{8\pi^2 R (r+a)} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \sin(2\omega t)$$

$$[0,5 \text{ т.}], \text{ а тяхната равнодействаща } -F = F_l - F_r = \frac{\mu_0^2 I_0^2 b^2 \omega}{8\pi^2 R} \frac{a}{r(r+a)} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \sin(2\omega t)$$

[0,5 т.]

Тъй като върху левия вертикален елемент силата е по-голяма от тази върху десния, то посоката на резултантната сила ще съвпада със силата върху левия елемент:

1. Когато токът през проводника тече нагоре и нараства, I и I_1 през левия елемент текат в различни посоки и силата е на отблъскване; [0,25 т.]
2. Когато токът през проводника тече нагоре и намалява, I и I_1 през левия елемент текат в една и съща посока и силата е на привличане; [0,25 т.]
3. Когато токът през проводника тече надолу и нараства, I и I_1 през левия елемент текат в различни посоки и силата е на отблъскване; [0,25 т.]
4. Когато токът през проводника тече надолу и намалява, I и I_1 през левия елемент текат в една и съща посока и силата е на привличане; [0,25 т.]

Задача 3. Адсорбция на атомарен водород от метална повърхност.

Захващането на водородния атом от ямата е квантов ефект. Енергията му е

$$E = \frac{p^2}{2M} - U_0 \quad [0,5 \text{ т.}]$$

и за определяне на възможните стойности на импулса p трябва да се отчетат вълновите свойства на атома

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Стационарното състояние на атома в ямата съответства на формиране на стояща вълна

$$n \frac{\lambda}{2} = a, \quad n = 1, 2, \dots \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето следват възможните стойности на импулса

$$p_n = \frac{\pi\hbar n}{a}. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Тогава за минималната енергия на водородния атом в ямата ($n = 1$) имаме

$$E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2Ma^2} - U_0, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето следва

$$D = 0 - E_{\min}, \quad [1 \text{ т.}]$$

$$U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2Ma^2} + D \approx 0,4 \text{ meV}. \quad [2 \text{ т.}]$$