

Решения на темата за 10. – 12. клас

30 април 2011 г.

Задача 1. Разход на гориво

а) За да определим ъгловата скорост на въртене на стрелката, е необходимо да определим количеството гориво, което се изразходва за 1 час (1 т.).

При скорост 50 km/h то е 2 литра/час (1 т.), а при скорост 130 km/h – 10,4 литра/час (1 т.). Пълен резервоар от 40 литра съответства на 120° (12 деления). Тогава ъгловата скорост на стрелката ще бъде съответно $(120^\circ/40)*2 = 6^\circ$ (6 деления) на час (1 т.) при скорост 50 km/h и $(120^\circ/40)*10,4 = 31,2^\circ$ (3,1 деления) на час (1 т.) при скорост 130 km/h.

б) Тъй като съпротивителната сила на въздуха зависи от квадрата на скоростта, по същия начин ще зависи работата (1 т.) (и съответно частта от горивото, което отива за преодоляване на въздушното съпротивление при движение с постоянна скорост). Ако означим с x разхода на гориво на 100 km при постоянна скорост на движение, ще получим $x = A + B \cdot v^2$ (1 т.). Като заместим със стойностите при 50 и 130 km/h, получаваме система от две уравнения с две неизвестни:

$$4 = A + 2500 \cdot B$$

$$8 = A + 16900 \cdot B$$

Откъдето намираме $B = 4/14400$ и $A = 47600/14400$ (1 т.) и съответно разходът при 90 km/h ще бъде $X_{90} = 476/144 + (4 \cdot 8100)/14400 = 5,55$.. литра/100 километра (1 т.). Разходът на час ще бъде 5 литра на час, а ъгловата скорост на разходомера – $(120^\circ/40)*5 = 15^\circ$ (1,5 деления) на час. (1 т.)

в) За да оценим необходимото количество гориво за работа на място, то е необходимо да свържем скоростта с разхода на гориво за единица време. Тогава стойността на тази функционална зависимост при $v = 0$ ще ни даде разхода на гориво при работещ двигател на спрял автомобил (1 т.).

За преодоляване на силата на въздушното съпротивление ($\sim v^2$) ще е необходима мощност $\sim v^3$ (1 т.) (която е пропорционална на работата за единица време при постоянна скорост на движение). Така че зависимостта на изразходваното за единица време гориво (означаваме с y) ще апроксимираме с $y = C + D \cdot v^3$ (1 т.), където C и D са константи, като получената стойност за C ще е оценката за изразходваното гориво при работа на двигател за спрял автомобил.

Ако се прекара бест-фит права през трите точки се получава $y = 1,23 + 5,39 \cdot v^3$, което ни дава разход от 1,23 литра/час за работещ на място двигател. (2 т.)

(Алтернативно стойността на C може да получим от две уравнения с две неизвестни с данните за разхода при 50 и 130 km/h – $C = 1,33$ литра/час.)

Задача 2. Нелинейно съпротивление

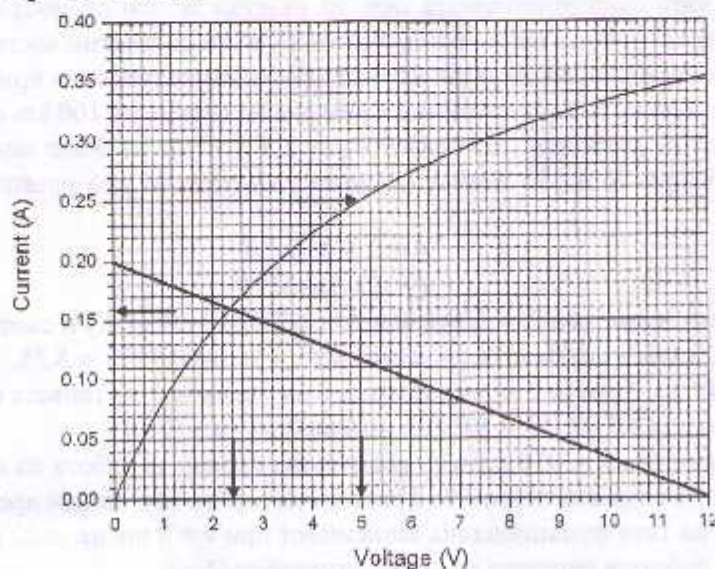
Част I.

а) При ток $I_0 = 0,25$ А във веригата от дадената графика се получава, че

напрежението върху второто съпротивление е $U_2 = 5,0 \text{ V}$. От закона на Ом

$$E = I_0 R_0 + U_0 \text{ се получава: } R_0 = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{12,0 \text{ V} - 5,0 \text{ V}}{0,25 \text{ A}} = 28 \, \Omega. \text{ (3 т.)}$$

б) От закона на Ом следва: $E = I_2 R_0 + U_2(I_2)$ (с $U_2(I_2)$ бележим напрежението върху втория резистор). Следователно $U_2(I_2) = E - I_2 R_0$. Това е уравнение на права, която при $R_0 = 60 \, \Omega$ пресича осите на волтамперната характеристика в точките $(12 \text{ V}, 0 \text{ A})$ и $(0 \text{ V}, 0,2 \text{ A})$. Пресечната точка на тази права с волтамперната характеристика има координати $(2,4 \text{ V}, 0,16 \text{ A})$. Следователно токът във веригата е $I_2 = 0,16 \text{ A}$, а напрежението върху втория (нелинейния) резистор е $U_2 = 2,4 \text{ V}$. (4 т.)



Част 2.

а) При установено термодинамично равновесие отделеното количество топлина в резистора за единица време ще е равно на разсеяното такова

$\frac{E^2}{R_0(1+\alpha t)} = \beta(t-t_0)$, откъдето се получава квадратно уравнение за температурата t : $\alpha t^2 + (1 - \alpha t_0)t - \left(\frac{E^2}{\beta R_0} + t_0\right) = 0$. Само по-голямото от двете решения има физически смисъл:

$$t = \frac{-(1 - \alpha t_0) + \sqrt{(1 - \alpha t_0)^2 + 4\alpha \left(\frac{E^2}{\beta R_0} + t_0\right)}}{2\alpha}$$

След заместване с дадените стойности $t = 77,3^\circ\text{C}$. (4 т.)

б) от условието на задачата: $\frac{U^2}{R(U)} = \beta(t - t_0)$, а $R(U) = R_0(1 + \alpha t)$. Изразявайки температурата t от второто уравнение и замествайки я в първото,

получаваме $\frac{U^2}{R(U)} = \beta \left[\frac{R(U) - R_0}{R_0 \alpha} - t_0 \right]$. След опростяване се получава следното квадратно уравнение за $R(U)$: $R(U)^2 - R_0(1 + \alpha t_0)R(U) - \frac{U^2 R_0 \alpha}{\beta} = 0$. Само положителното му решение има физически смисъл:

$$R(U) = \frac{R_0(1 + \alpha t_0) + \sqrt{R_0^2(1 + \alpha t_0)^2 + \frac{4U^2 R_0 \alpha}{\beta}}}{2}.$$

При достатъчно малки напрежения второто събираемо под радикала ще стане много по-малко от първото събираемо и може да се използва приближена формула:

$$R(U) = \frac{1}{2} R_0(1 + \alpha t_0) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4U^2 R_0 \alpha}{\beta R_0^2(1 + \alpha t_0)^2}} \right] \approx$$

$$\frac{1}{2} R_0(1 + \alpha t_0) \left[1 + \left(1 + \frac{2U^2 R_0 \alpha}{\beta R_0^2(1 + \alpha t_0)^2} \right) \right] =$$

$$R_0(1 + \alpha t_0) \left[1 + \frac{\alpha U^2}{\beta R_0(1 + \alpha t_0)^2} \right] = R_0(1 + \alpha t_0) + \frac{\alpha}{\beta(1 + \alpha t_0)} U^2.$$

След заместване с дадените стойности: $R(U) = 106,7 \Omega + 0,1563 \frac{\Omega}{V^2} U^2$.
Следователно $A = 106,7 \Omega$ и $B = 0,1563 \Omega/V^2$. (4 т.)

Задача 3. Термодинамика на цикличен процес

а) От уравнението на адиабатния процес $pV^\gamma = \text{const}$ с показател на адиабатата $\gamma = \frac{5}{3}$ (хелият е едноатомен газ) намираме

$$p_1 = p_0 \varepsilon^\gamma \approx 3,2 \text{ atm.} \quad (1 \text{ т.})$$

В процеса 4-1 налягането p е пропорционално на обема V , т.е. $\frac{p}{V} = \text{const}$ и за налягането p_2 получаваме

$$p_2 = p_0 \varepsilon = 2 \text{ atm.} \quad (1 \text{ т.})$$

б) Работата A , която извършва двигателят за един цикъл, е

$$A = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} = Q_1 - Q_2. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Работното вещество получава топлина Q_1 при изобарния процес и отдава топлина Q_2 при изохорния процес и процеса 4-1. Тогава

$$Q_1 = \nu c_p (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_0 V_0 \varepsilon^{\gamma-1} (\varepsilon \varepsilon - 1) \approx 595 \text{ J}, \quad (2 \text{ т.})$$

където е отчетено, че $c_p = (5/2)R$ и уравнението на състояние на идеален газ е $pV = \nu RT$.

От друга страна

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

където

$$Q_{21} = \nu c_V (T_3 - T_4) = \frac{3}{2} (p_1 - p_2) V_2 = \frac{3}{2} p_0 V_0 (\varepsilon' - \omega). \quad (1 \text{ т.})$$

В процеса 4-1 моларният топлинен капацитет е

$$c = c_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T} = 2R, \quad (1 \text{ т.})$$

откъдето следва

$$Q_{22} = \nu c (T_4 - T_1) = 2(p_2 V_2 - p_0 V_0) = 2p_0 V_0 (\omega^2 - 1). \quad (1 \text{ т.})$$

Тогава имаме

$$Q_2 = \frac{1}{2} p_0 V_0 (3\varepsilon' + \omega^2 - 4) \approx 238 \text{ J} \quad (1 \text{ т.})$$

и извършената от топлинния двигател работа за един цикъл е

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0 [\varepsilon' (5\omega - 3) - 5\varepsilon'^{-1} - \omega^2 + 4] \approx 357 \text{ J}. \quad (1 \text{ т.})$$

в) По определение КПД на цикъла е

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \approx 0,60. \quad (1 \text{ т.})$$

г) В хладилния цикъл отищата топлина от охладеното тяло е Q_2 (топлината, която е получена от работното вещество), а извършената от външен източник работа е A . Ефективността на хладилника се дава с израза

$$\varphi = \frac{Q_2}{A} = \frac{1-\eta}{\eta} \approx 0,67. \quad (2 \text{ т.})$$

Когато цикълът се използва в топлинна помпа, отдадената топлина на нагряваното тяло е Q_1 (топлината, отдадена от работното вещество), а извършената от външен източник работа е A . Ефективността на топлинната помпа е

$$\psi = \frac{Q_1}{A} = \frac{1}{\eta} \approx 1,67. \quad (2 \text{ т.})$$

Задача 4. Релативистки свят

а) Времето t_1 е интервал от собствено време за часовника в самолета. Времето t_2 , отчетено в инерциалната отправна система, е

$$t_2 = \frac{t_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1 \text{ т.})$$

Следователно $t_2 > t_1$. (0,5 т.)

Спрямо Земята самолетът обикаля Екватора за време

$$t_2 = \frac{L}{v}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Следователно времето за една обиколка спрямо часовника в самолета е

$$t_1 = \frac{L}{v} \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Оттук получаваме

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v} (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}). \quad (1 \text{ т.})$$

Когато $v/c \ll 1$, можем да използваме приближителното равенство на Бернули: $(1+x)^n \approx 1+nx$, където $x = -v^2/c^2$ и $n = 1/2$. Така получаваме

$$\Delta t \approx \frac{Lv}{2c^2} \quad (1 \text{ т.})$$

или

$$\Delta t \approx 7.10^{-8} \text{ s.} \quad (1 \text{ т.})$$

Периодът на трептене на вълната, която излъчва цезиевият атом, е

$$T = \frac{\lambda}{c} \approx 1,07 \cdot 10^{-10} \text{ s.} \quad (0,5 \text{ т.})$$

Следователно разликата във времента на двата часовника отговаря на

$$N = \frac{\Delta t}{T} \approx 656 \quad (0,5 \text{ т.})$$

периода на трептене.

б) Законите за запазване на импулса и енергията при удара се записват съответно:

$$\frac{m_1 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1 \text{ т.})$$

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + m_2 c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1 \text{ т.})$$

След като разделим почленно двете уравнения, намираме скоростта на новата частица:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (1 \text{ т.})$$

За масата в покой на новата частица съответно намираме

$$m = \sqrt{m_1^2 - m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}}. \quad (1 \text{ т.})$$

За подкорения израз е изпълнено неравенството:

$$m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = (m_1 + m_2)^2. \quad (1 \text{ т.})$$

Следователно:

$$m > m_1 + m_2. \quad (1 \text{ т.})$$

При нееластичен удар част от кинетичната енергия на частиците се трансформира във вътрешна енергия на новообразуваната частица. Оттук и от еквивалентността между маса и енергия следва, че масата в покой на новата частица е по-голяма от сумата на енергиите в покой на началните частици. (1 т.)

Когато $v/c \ll 1$ можем да приемем, че без съществена загуба на точност

$$v \approx \frac{v_0}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

което е класическият резултат. За определяне на Δm обаче това приближение не е достатъчно. В случая трябва да използваме формулата на Бернули:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}} \approx \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 + m_1m_2 v_0^2/c^2} = \\ &= (m_1 + m_2) \sqrt{1 + \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_0^2/c^2} \approx (m_1 + m_2) + \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2/c^2 \end{aligned}$$

Следователно:

$$\Delta m \approx \frac{m_1m_2v_0^2}{2(m_1 + m_2)c^2}. \quad (1,5 \text{ т.})$$