

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Национален кръг, Плевен, 1 май 2010 г.
Решения на задачите

Задача 1. Сензор за сили.

а) $F_B (\alpha_{\max}) = 0,15 \text{ N} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

$F_B (\alpha = 0) = 1,2 \text{ N} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

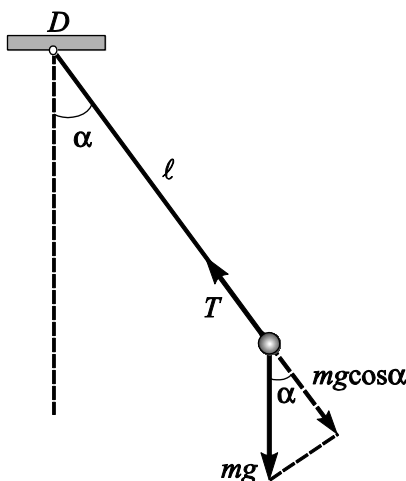
б) Времето между два максимума на силата F_B е равно на половината от периода T на люлеене на махалото. От графиката определяме:

$T = 1,45 \text{ s} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

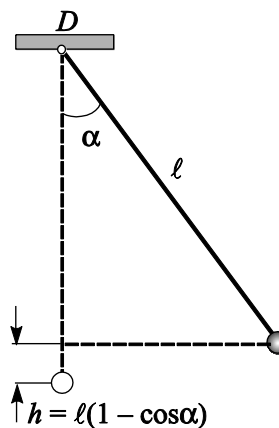
Приемаме, че люлеенето на махалото е хармонично трептене.

Дължината на махалото е $\ell = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 52 \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

в) При люлеенето на махалото топчето извършва неравномерно движение по окръжност с радиус ℓ . Означаваме с α максималния ъгъл между нишката и вертикалната ос (фиг.1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В това най-горно положение топчето е неподвижно и неговото центростремително ускорение е нула. Условието за движение по окръжност има вида:

(1) $T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{\ell} = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Тъй като нишката е безмасова, силите на опън в нейните два края са равни: нишката действа на точката на окачване със сила

$F_1 = T = mg \cos \alpha \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Сензорът измерва вертикалната компонента на тази сила

(2) $F_{1B} = F_1 \cos \alpha = mg \cos^2 \alpha \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Когато топчето преминава през равновесното си положение, уравнението за движение по окръжност има вида

(3) $T - mg = \frac{mv^2}{\ell} \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Скоростта v определяме от закона за запазване на енергията (фиг. 2):

(4) $\frac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell(1 - \cos \alpha) \dots\dots\dots 1 \text{ точка}$

Заместваме v^2 от уравнение (4) в уравнение (3) и определяме силата на опъване на нишката: $T = mg(3 - 2\cos\alpha)$. Тази сила е насочена вертикално. Нишката действа на сензора със същата по големина вертикална сила

(5) $F_{2B} = T = mg(3 - 2\cos\alpha)$ 1 точка

г) F_{1B} и F_{2B} са съответно минималната и максималната стойност на силата F_B , която измерва сензорът. Числените стойности се определят от графиката (подусловие а). От уравнения (2) и (5) получаваме

(6) $\frac{F_{2B}}{F_{1B}} = \frac{(3 - 2\cos\alpha)}{\cos^2\alpha}$,1 точка

където $\frac{F_{2B}}{F_{1B}} = 8$. Това е квадратно уравнение за $\cos\alpha$, което има два корена:

$\alpha_1 = 60^\circ$ 0,5 точки

$\alpha_2 = 139^\circ$ 0,5 точки

През цялото време на люлеене на махалото нишката трябва да е опъната. Това означава, че максималният ъгъл на отклонение е $\alpha < 90^\circ$. Следователно вторият корен няма физически смисъл.....1 точка

д) Масата на топчето определяме от уравнение (5) или (2):

$m = \frac{F_{2B}}{g(3 - 2\cos\alpha)} = 61 \text{ g}$ 1 точка

е) Амплитудата на люлеене на махалото е голяма ($\alpha = 60^\circ$).

Затова люлеенето само с приближение може да се приеме за хармонично трептене1 точка

Забележка. Периодът на махалото при големи ъгли на отклонение е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{11}{3072}\alpha^4 + \dots\right).$$

За $\alpha = 60^\circ \approx 1 \text{ rad}$ периодът е $T \approx 1,065\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$, т.е. той е с около 6,5% по-голям

от периода на математично махало, което трепти с малка амплитуда.

Задача 2. Пудинг със сливи.

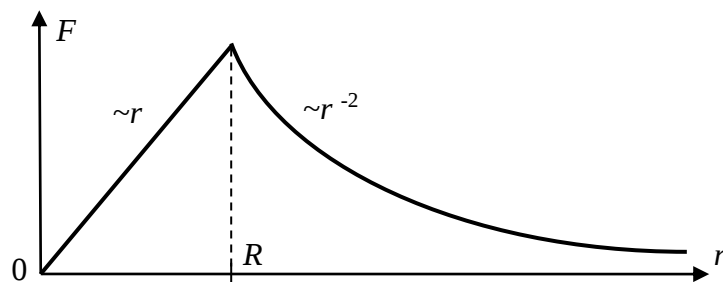
а) Когато електронът се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, на него му действа Кулонова сила само от частта заряд, намираща се на разстояние от центъра $x \leq r$ [0,5 т.]. Обемната плътност ρ на електричния заряд вътре в кълбото е $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, следователно зарядът на кълбото с

радиус r е $q(r) = \rho V(r) = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = e \frac{r^3}{R^3}$ [0,5 т.]. Следователно, силата $F(r)$, която

действа на електрона, когато се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, е

$$F(r) = \frac{eq(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{r^3}{R^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ [1 т.]}$$

б) Зависимостта на силата $F(r)$ от разстоянието r при $r \in [0, \infty]$ изглежда така:



[2 т.]

в) Работата A , необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до безкрайност, е сума на две работи: работата A_{0-R} , необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до неговата повърхност, и работата $A_{R-\infty}$, необходима да се премести неподвижен електрон от повърхността на кълбото до безкрайност [0,5 т.]. От горната

фигура се вижда, че $A_{0-R} = \frac{F_{\max} \cdot R}{2} = \frac{F(R) \cdot R}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ [1 т.]. Втората работа $A_{R-\infty}$ е равна

на $A_{R-\infty} = e \cdot \varphi(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ [1 т.]. Следователно, $A_{0-\infty} = A_{0-R} + A_{R-\infty} = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ [0,5 т.].

г) Радиусът R на кълбото е $R = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 A_{0-\infty}}$ [0,5 т.] $= \frac{3(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 13,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,56 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,56 \text{ \AA}$ [1,5 т.]

д) тъй като силата $F(r)$, която действа на електрона, когато се намира вътре в кълбото, е пропорционална на радиуса r , то електронът ще извършва хармонично

трепене [0,5 т.] с честота $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$ [1,5 т.].

е) Дължината на вълната на електромагнитната вълна, ако електронът при трептенето си излъчва такава, е $\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 R^3 m}{e^2}} = \frac{2\pi c R}{e} \sqrt{4\pi\epsilon_0 R m}$ [0,5 т.] =

$\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,56 \cdot 10^{-10}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,56 \cdot 10^{-10} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 2,31 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 231 \text{ nm}$ [1 т.] Тази светлина е ултравиолетова. [0,5 т.].

ж) формулата на Ридберг за енергетичните преходи във водородния атом,

$E_{n \rightarrow m} = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$, може да се пренапише във вида $\frac{hc}{\lambda_{n \rightarrow m}} = A_{0-\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$, а оттам

$\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = \frac{1}{\lambda_{\min}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ [0,5 т.], където $\lambda_{\min} = \frac{hc}{A_{0-\infty}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 91,4$

nm. Следователно за да съществува такъв преход, трябва да съществуват цели числа n и m такива, че $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda} = 0,396 \approx \frac{1}{2,53}$. В такъв случай обаче n може да е само 1 [0,5

т.]. Но тогава при $m > 1$, $1 - \frac{1}{m^2} \geq 0,75$ [0,5 т.]. Излиза, че такъв преход във водородния атом няма [0,5 т.].

Задача 3. Светодиод

а) Когато през диода тече ток I , в него се отделя мощност:

$$P_0 = U_0 I, \quad [1 \text{ т}]$$

защото в работен режим напрежението върху диода е равно на напрежението на запалване. От друга страна, напрежението върху резистора е:

$$U_R = E - U_0 = IR \quad [1 \text{ т}]$$

Следователно:

$$P_0 = \frac{U_0(E - U_0)}{R}, \quad [1 \text{ т}]$$

откъдето:

$$R = \frac{U_0(E - U_0)}{P_0} = 600 \, \Omega \quad [1 \text{ т}]$$

б) Пълната мощност, която се отделя във веригата, е;

$$P = EI = \frac{E(E - U_0)}{R}, \quad [1 \text{ т}]$$

Откъдето определяме КПД:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{U_0}{E} = 0,4 \quad [1 \text{ т}]$$

в) Когато през светодиода (по-точно р-п прехода) премине един електрон, електричните сили извършват работа:

$$A = Ue. \quad [1 \text{ т}]$$

Съгласно с условието, тази работа се трансформира изцяло в енергия на един излъчен фотон:

$$Ue = h\nu. \quad [1 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че:

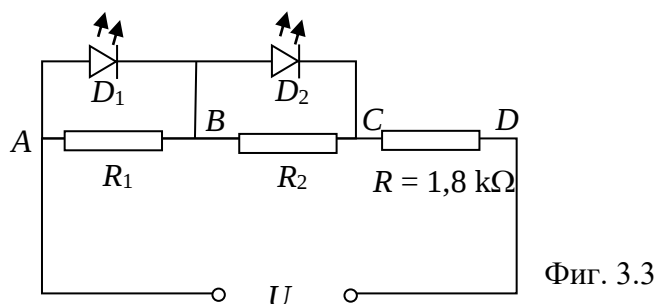
$$\lambda\nu = c, \quad [0,5 \text{ т}]$$

получаваме:

$$\lambda = \frac{hc}{eU} = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 622 \text{ nm}. \quad [1 \text{ т}]$$

Това е светлина от червената област на спектъра. [0,5 т]

г)



При $U < U_1 = 5 \text{ V}$ токът протича само през последователно свързаните резистори, защото диодите са запушени. Падът на напрежение върху D_1 в този случай е:

$$U_{AB} = IR_1 = U \frac{R_1}{R + R_1 + R_2}. \quad [1 \text{ т}]$$

Когато $U = U_1 = 5 \text{ V}$, напрежението върху D_1 се изравнява с напрежението на запалване:

$$U_0 = U_1 \frac{R_1}{R + R_1 + R_2}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

откъдето намираме:

$$(1) \quad (U_1 - U_0)R_1 - U_0 R_2 = U_0 R$$

Когато $5\text{ V} < U \leq U_2 = 10\text{ V}$, диодът D_1 свети и напрежението върху него е фиксирано и равно на U_0 , а в същото време през диода D_2 не тече ток. Тогава резисторите R_2 и R са свързани последователно и през тях тече ток:

$$I = \frac{U - U_0}{R + R_2} \quad [1 \text{ т}]$$

Напрежението върху D_2 е:

$$U_{BC} = IR_2 = \frac{(U - U_0)R_2}{R + R_2}.$$

Когато $U = U_2 = 10\text{ V}$, напрежението върху D_2 достига напрежението на запалване:

$$U_0 = \frac{(U_2 - U_0)R_2}{R + R_2}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

Откъдето получаваме:

$$(2) \quad R_2 = R \frac{U_0}{U_2 - 2U_0} = 600 \Omega. \quad [1 \text{ т}]$$

Заместваме получената стойност в уравнение (1) и получаваме съпротивлението на първия резистор:

$$(3) \quad R_1 = R \frac{(U_2 - U_0)U_0}{(U_1 - U_0)(U_2 - 2U_0)} = 1600 \Omega. \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 4. Модел на ядро

а) От изискването обемът на потенциалната яма с форма на куб да е равен на обема на ядрото получаваме

$$a = \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{1/3} \approx (4A)^{1/3} r_0. \quad (1\text{т.})$$

б) Енергията на един нуклон се определя с израза

$$\varepsilon = U_0 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_N}. \quad (1\text{т.})$$

Като отчетем за всяко независимо движение формулата на Дьо Бройл

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1\text{т.})$$

получаваме

$$\varepsilon = U_0 + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} \right) \quad (1\text{т.})$$

Съгласно с вълновите свойства на частиците възможните стойности на $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ следват от формирането на стоящи вълни между всеки две стени на потенциалната яма

$$n_x \frac{\lambda_x}{2} = a, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$n_y \frac{\lambda_y}{2} = a, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$n_z \frac{\lambda_z}{2} = a, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тогава за възможните стойности на енергията на един нуклон получаваме

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = U_0 + 0,31 \frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (1,5 \text{ т.})$$

в) Съгласно с принципа на Паули в дадено състояние с определени n_x, n_y, n_z могат да се намират най-много два протона с противоположни спинове и два неутрона с противоположни спинове. **(1 т.)** На енергетичното ниво $\varepsilon_{1,1,1}$ се намират два протона и два неутрона **(1 т.)**, а на нивото $\varepsilon_{2,1,1} = \varepsilon_{1,2,1} = \varepsilon_{1,1,2}$ – шест протона и шест неутрона **(1 т.)**, а останалите енергетични нива са празни. **(1 т.)** Енергията на основното състояние на ядрото на кислорода $^{16}_8\text{O}$ е равна на

$$E_0 = 16U_0 + 0,31(4.3 + 12.6) \frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} \approx -244 \text{ MeV} \quad \textbf{(2 т.)}$$

г) Честотата на фотона е

$$\nu_{\min} = \frac{-\varepsilon_{2,1,1}}{2\pi\hbar} \approx 3.10^{21} \text{ Hz}, \quad \textbf{(2 т.)}$$

т.е. фотонът е γ -квант.