

Решения на темата за 10.–12 клас

Задача 1. Сензор за сили

а) $F_B(\alpha_{\max}) = 0,15 \text{ N}$. 1 т.

$F_B(\alpha = 0) = 1,2 \text{ N}$. 1 т.

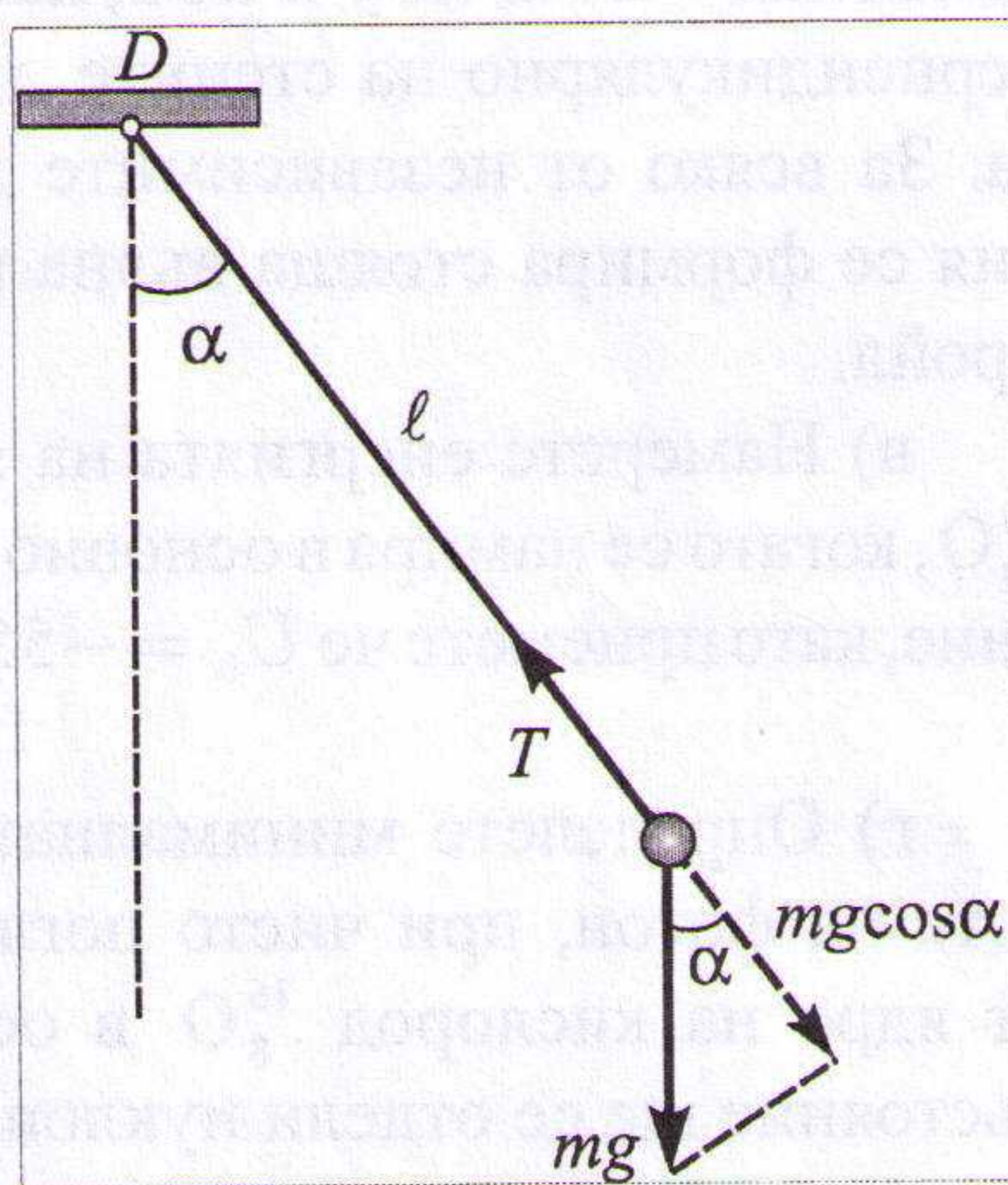
б) Времето между два максимума на силата F_B е равно на половината от периода T на люлеене на махалото. От графиката определяме

$T = 1,45 \text{ s}$. 1 т.

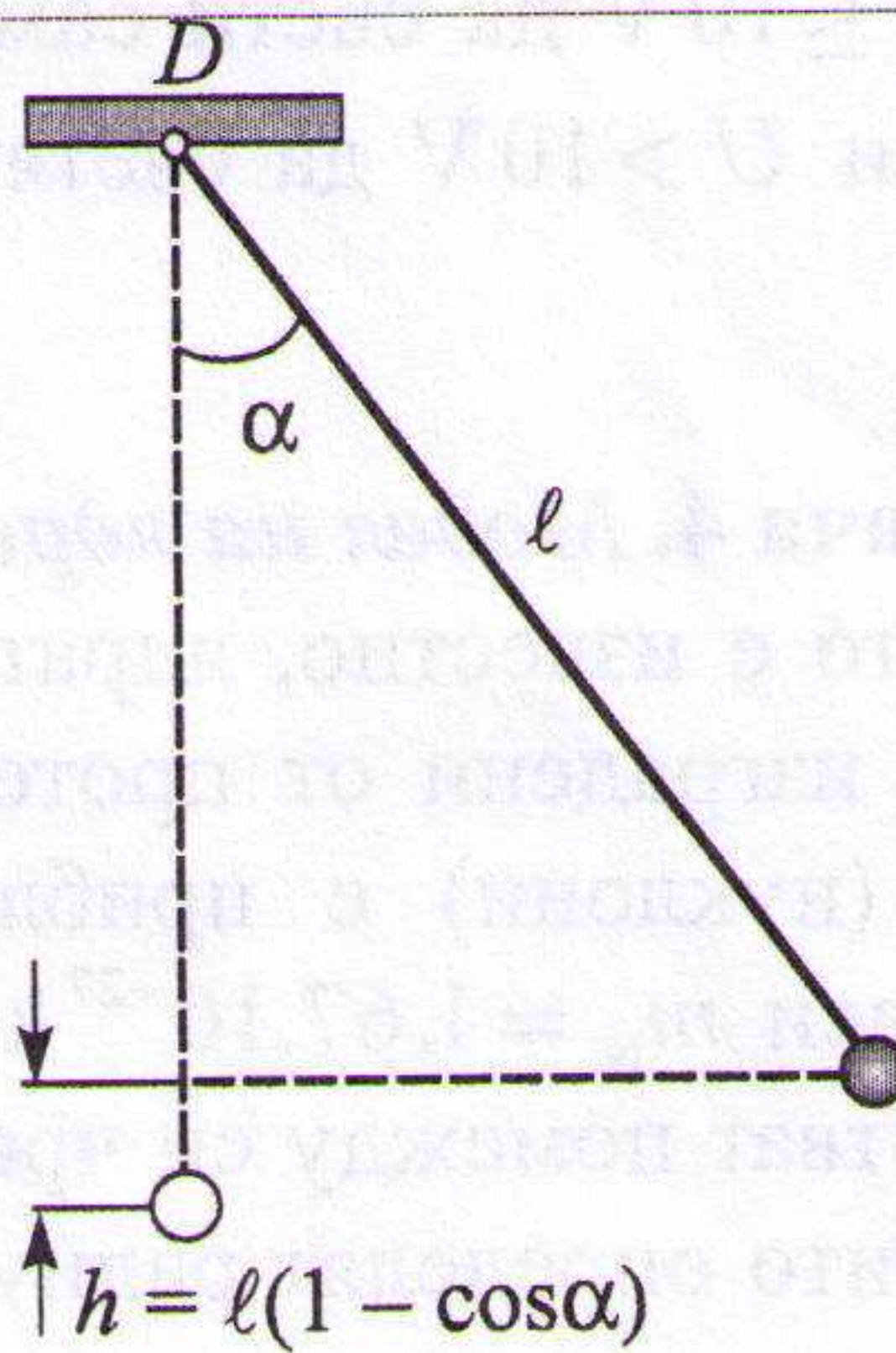
Приемаме, че люлеенето на махалото е хармонично трептене.

Дължината на махалото е $\ell = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 52 \text{ cm}$. 1 т.

в) При люлеенето на махалото топчето извършва неравномерно движение по окръжност с радиус ℓ . Означаваме с α максималния ъгъл между нишката и вертикалната ос (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

В това най-горно положение топчето е неподвижно и неговото центростремително ускорение е нула. Условието за движение по окръжност има вида

(1) $T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{\ell} = 0$. 1 т.

Тъй като нишката е безмасова, силите на опън в нейните два края са равни: нишката действа на точката на окачване със сила

$F_1 = T = mg \cos \alpha$. 1 т.

Сензорът измерва вертикалната компонента на тази сила

(2) $F_{1B} = F_1 \cos \alpha = mg \cos^2 \alpha$. 1 т.

Когато топчето преминава през равновесното си положение, уравнението за движение по окръжност има вида

(3) $T - mg = \frac{mv^2}{\ell}$. 1 т.

Скоростта v определяме от закона за запазване на енергията (фиг. 2):

$$(4) \quad \frac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell(1 - \cos \alpha). \quad 1 \text{ т.}$$

Заместваме v^2 от уравнение (4) в уравнение (3) и определяме силата на опъване на нишката: $T = mg(3 - 2\cos \alpha)$. Тази сила е насочена вертикално. Нишката действа на сензора със същата по големина вертикална сила

$$(5) \quad F_{2b} = T = mg(3 - 2\cos \alpha). \quad 1 \text{ т.}$$

г) F_{1b} и F_{2b} са съответно минималната и максималната стойност на силата F_s , която измерва сензорът. Числените стойности се определят от графиката (подусловие а). От уравнения (2) и (5) получаваме

$$(6) \quad \frac{F_{2b}}{F_{1b}} = \frac{(3 - 2\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 \text{ т.}$$

където $\frac{F_{2b}}{F_{1b}} = 8$. Това е квадратно уравнение за $\cos \alpha$, което има два корена:

$$\alpha_1 = 60^\circ \quad 0,5 \text{ т.}$$

$$\alpha_2 = 139^\circ \quad 0,5 \text{ т.}$$

През цялото време на люлеене на махалото нишката трябва да е опъната. Това означава, че максималният ъгъл на отклонение е $\alpha < 90^\circ$. Следователно вторият корен няма физически смисъл. 1 т.

д) Масата на топчето определяме от уравнение (5) или (2):

$$m = \frac{F_{2b}}{g(3 - 2\cos \alpha)} = 61 \text{ g.} \quad 1 \text{ т.}$$

е) Амплитудата на люлеене на махалото е голяма ($\alpha = 60^\circ$).

Затова люлеенето само с приближение може да се приеме за хармонично трептене. 1 т.

Забележка. Периодът на махалото при големи ъгли на отклонение е

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{11}{3072} \alpha^4 + \dots \right).$$

За $\alpha = 60^\circ \approx 1 \text{ rad}$ периодът е $T \approx 1,065 \left(2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right)$, т.е. той е с около 6,5% по-голям от периода на математично махало, което трепти с малка амплитуда.

Задача 2. Пудинг със сливи

а) Когато електронът се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, на него му действа Кулонова сила само от частта заряд, намираща се на разстояние от центъра $x \leq r$. 0,5 т. Обемната плътност ρ на електричния заряд вътре в кълбото е $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, следователно зарядът на

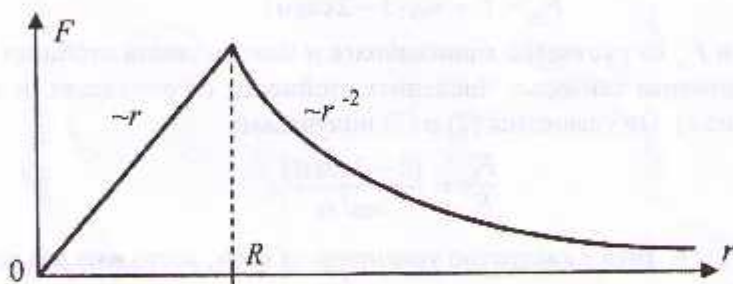
кълбото с радиус r е $q(r) = \rho V(r) = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = e \frac{r^3}{R^3}$. 0,5 т. Следователно

230

силата $F(r)$, която действа на електрона, когато се намира на разстояние r от центъра на положително зареденото кълбо при $r < R$, е

$$F(r) = \frac{eq(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{r^3}{R^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \quad 1 \text{ т.}$$

б) Зависимостта на силата $F(r)$ от разстоянието r при $r \in [0, \infty]$ изглежда така:



2 т.

в) Работата A , необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до безкрайност, е сума на две работи: работата A_{0-R} , необходима да се премести неподвижен електрон от центъра на положително зареденото кълбо до неговата повърхност, и работата $A_{R-\infty}$, необходима да се премести неподвижен електрон от повърхността на кълбото до безкрайност. 0,5 т. От горната фигура се вижда, че $A_{0-R} = \frac{F_{\max} \cdot R}{2} = \frac{F(R) \cdot R}{2}$

$$= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad 1 \text{ т.}$$

Втората работа $A_{R-\infty}$ е равна на $A_{R-\infty} = e\phi(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad 1 \text{ т.}$

Следователно, $A_{0-\infty} = A_{0-R} + A_{R-\infty} = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad 0,5 \text{ т.}$

г) Радиусът R на кълбото е $R = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 A_{0-\infty}}. \quad 0,5 \text{ т.}$

$$= \frac{3(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 13,8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,56 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,56 \text{ \AA}. \quad 1,5 \text{ т.}$$

д) тъй като силата $F(r)$, която действа на електрона, когато се намира вътре в кълбото, е пропорционална на радиуса r , то електронът ще извършва хармонично трептене 0,5 т. с честота $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}. \quad 1,5 \text{ т.}$

е) Дължината на вълната на електромагнитната вълна, ако електронът при трептенето си излъчва такава, е $\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 R^3 m}{e^2}} = \frac{2\pi c R}{e} \sqrt{4\pi\epsilon_0 R m}. \quad 0,5 \text{ т.}$

$$= \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,56 \cdot 10^{-10}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,56 \cdot 10^{-10} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 2,31 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 231 \text{ nm}.$$

1 т. Тази светлина е ултравиолетова. 0,5 т.

ж) формулата на Ридберг за енергетичните преходи във водородния атом,

$$E_{n \rightarrow m} = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \text{ може да се пренпише във вида}$$

$$\frac{hc}{\lambda_{n \rightarrow m}} = A_{\text{рид}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \text{ а оттам}$$

$$\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = \frac{1}{\lambda_{\text{мин}}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad 0,5 \text{ т.}$$

$$\text{където } \lambda_{\text{мин}} = \frac{hc}{A_{\text{рид}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,14 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 91,4 \text{ nm. Следователно,}$$

за да съществува такъв преход, трябва да съществуват цели числа n и m такива, че $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{\lambda_{\text{рид}}}{\lambda} = 0,396 \approx \frac{1}{2,53}$. В такъв случай обаче n може да е само

1. **0,5 т.** Но тогава при $m > 1$, $1 - \frac{1}{m^2} \geq 0,75$. **0,5 т.** Излиза, че такъв преход във водородния атом няма. **0,5 т.**

Задача 3. Светодиод

а) Когато през диода тече ток I , в него се отделя мощност

$$P_0 = U_0 I, \quad 1 \text{ т.}$$

защото в работен режим напрежението върху диода е равно на напрежението на запалване. От друга страна, напрежението върху резистора е

$$U_R = E - U_0 = IR. \quad 1 \text{ т.}$$

Следователно

$$P_0 = \frac{U_0(E - U_0)}{R}, \quad 1 \text{ т.}$$

откъдето

$$R = \frac{U_0(E - U_0)}{P_0} = 600 \, \Omega. \quad 1 \text{ т.}$$

б) Пълната мощност, която се отделя във веригата, е

$$P = EI = \frac{E(E - U_0)}{R}, \quad 1 \text{ т.}$$

откъдето определяме КПД

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{U_0}{E} = 0,4. \quad 1 \text{ т.}$$

в) Когато през светодиода (по-точно p - n прехода) премине един електрон, електричните сили извършват работа:

229

$$A = Ue. \quad 1 \text{ т.}$$

Съгласно с условието, тази работа се трансформира изцяло в енергия на един излъчен фотон

$$Ue = h\nu. \quad 1 \text{ т.}$$

Като вземем предвид, че

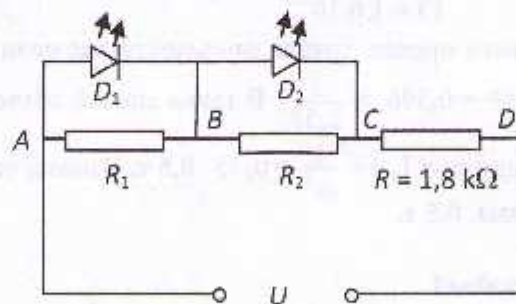
$$\lambda\nu = c, \quad 0,5 \text{ т.}$$

получаваме

$$\lambda = \frac{hc}{eU} = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 622 \text{ nm}. \quad 1 \text{ т.}$$

Това е светлина от червената област на спектъра. 0,5 т.

г)



Фиг. 3.3

При $U < U_1 = 5 \text{ V}$ токът протича само през последователно свързаните резистори, защото диодите са запушени. Падът на напрежение върху D_1 в този случай е

$$U_{AB} = IR_1 = U \frac{R_1}{R + R_1 + R_2}. \quad 1 \text{ т.}$$

Когато $U = U_1 = 5 \text{ V}$, напрежението върху D_1 се изравнява с напрежението на запалване

$$U_0 = U_1 \frac{R_1}{R + R_1 + R_2}, \quad 0,5 \text{ т.}$$

откъдето намираме

$$(1) \quad (U_1 - U_0)R_1 - U_0R_2 = U_0R.$$

Когато $5 \text{ V} < U \leq U_2 = 10 \text{ V}$, диодът D_1 свети и напрежението върху него е фиксирано и равно на U_0 , а в същото време през диода D_2 не тече ток. Тогава резисторите R_2 и R са свързани последователно и през тях тече ток

$$I = \frac{U - U_0}{R + R_2}. \quad 1 \text{ т.}$$

Напрежението върху D_2 е

$$U_{BC} = IR_2 = \frac{(U - U_0)R_2}{R + R_2}.$$

Когато $U = U_2 = 10 \text{ V}$, напрежението върху D_2 достига напрежението на запалване:

$$U_0 = \frac{(U_2 - U_0)R_2}{R + R_2}, \quad 0,5 \text{ т.}$$

откъдето получаваме

$$(2) \quad R_2 = R \frac{U_0}{U_2 - 2U_0} = 600 \, \Omega. \quad 1 \text{ т.}$$

Заместваме получената стойност в уравнение (1) и получаваме съпротивлението на първия резистор

$$(3) \quad R_1 = R \frac{(U_2 - U_0)U_0}{(U_1 - U_0)(U_2 - 2U_0)} = 600 \, \Omega. \quad 1 \text{ т.}$$

Задача 4. Модел на ядро

а) От изискването обемът на потенциалната яма с форма на куб да е равен на обема на ядрото получаваме

$$a = \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{1/3} \approx (4A)^{1/3} r_0. \quad 1 \text{ т.}$$

б) Енергията на един нуклон се определя с израза

$$\varepsilon = U_0 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_N}, \quad 1 \text{ т.}$$

Като отчетем за всяко независимо движение формулата на Дьо Бройл

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \quad 1 \text{ т.}$$

получаваме

$$\varepsilon = U_0 + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} \right). \quad 1 \text{ т.}$$

Съгласно с вълновите свойства на частиците възможните стойности на $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ следват от формирането на стоящи вълни между всеки две стени на потенциалната яма

$$n_x \frac{\lambda_x}{2} = a, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \quad 0,5 \text{ т.}$$

$$n_y \frac{\lambda_y}{2} = a, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad 0,5 \text{ т.}$$

$$n_z \frac{\lambda_z}{2} = a, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots \quad 0,5 \text{ т.}$$

Тогава за възможните стойности на енергията на един нуклон получаваме

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = U_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_N a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = U_0 + 0,31 \frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad 1,5 \text{ т.}$$

в) Съгласно с принципа на Паули в дадено състояние с определени n_x, n_y, n_z могат да се намират най-много два протона с противоположни спинове и два нейтрона с противоположни спинове. 1 т. На енергетичното ниво $\varepsilon_{1,1,1}$ се намират два протона и два нейтрона 1 т., а на нивото $\varepsilon_{2,1,1} = \varepsilon_{1,2,1} = \varepsilon_{1,1,2}$ – шест

228

протона и шест нейтрона **1 т.**, а останалите енергетични нива са празни. **1 т.**
Енергията на основното състояние на ядрото на кислорода $^{16}_8\text{O}$ е равна на

$$E_0 = 16U_0 + 0,31(4,3 + 12,6)\frac{\hbar^2}{m_N r_0^2} \approx -244 \text{ MeV.} \quad \mathbf{2 \text{ т.}}$$

г) Честотата на фотона е

$$\nu_{\min} = \frac{-\epsilon_{2,1,1}}{2\pi\hbar} \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ Hz,} \quad \mathbf{2 \text{ т.}}$$

т.е. фотонът е γ -квант.