

Решения на задачите

Задача 1.

а) Луната се движи по кръгова орбита под действие на гравитационната сила, с която я привлича Земята:

$$(1) \quad \frac{\gamma m M}{r_0^2} = m \Omega_0^2 r_0, \quad \text{откъдето определяме}$$

$$(2) \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0^3}} \quad (1 \text{ т.})$$

$$\Omega_0 = 2,65 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s.} \quad (1 \text{ т.})$$

б) От закона за запазване на момента на импулса на системата Земя—Луна следва равенството

$$(3) \quad I\omega + mr^2\Omega = I\omega_0 + mr_0^2\Omega_0. \quad (1 \text{ т.})$$

От уравнения (3) и (2) изразяваме ω

$$(4) \quad \omega = \omega_0 + \frac{m}{I} \sqrt{\gamma M} (r_0^{1/2} - r^{1/2}) \quad (1 \text{ т.})$$

$$(5) \quad \begin{aligned} r_0^{1/2} - r^{1/2} &= \\ &= (r_0^{1/2} - r^{1/2})(r_0^{1/2} + r^{1/2}) / (r_0^{1/2} + r^{1/2}) = \\ &= \frac{-\Delta r}{r_0^{1/2} + r^{1/2}} \approx \frac{-\Delta r}{2r_0^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1 \text{ т.})$$

$$(6) \quad \omega = \omega_0 - \frac{m}{2I} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \Delta r. \quad (1 \text{ т.})$$

$$\text{в) } (7) \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0} \approx -\frac{2\pi}{T_0^2} \Delta T \quad (T_0 = 24 \text{ часа}). \quad (1 \text{ т.})$$

От равенства (6) и (7) получаваме:

$$(8) \quad \Delta T = \frac{T_0^2 m}{4\pi I} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \Delta r. \quad (1 \text{ т.})$$

$$\text{г) } \Delta T = 44,4 \mu\text{s} \quad (1 \text{ т.})$$

д) Пълната механична енергия на системата Земя—Луна е

$$(9) \quad E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mr^2\Omega}{2} - \frac{\gamma mM}{r} = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{\gamma mM}{2r} \quad (2 \text{ т.})$$

Заместваме ω от уравнение (6), полагаме $r = r_0 + \Delta r$, пренебрегваме члена $(\Delta r)^2$ и получаваме

$$(10) \quad \begin{aligned} E &\approx \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{\gamma mM}{2r_0} - \\ &- \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \omega_0 \Delta r + \frac{\gamma mM}{2r_0^2} \Delta r. \end{aligned} \quad (2 \text{ т.})$$

Полагаме $E_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{\gamma mM}{2r_0}$ — енергия на системата в началния момент, и за изменението на енергията получаваме

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta E &= E - E_0 = \\ &= -\frac{m}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} (\omega_0 - \Omega_0) \Delta r. \end{aligned} \quad (1 \text{ т.})$$

$$\text{е) } \Delta E = -1,05 \cdot 10^{20} \text{ J.} \quad (1 \text{ т.})$$

Задача 2. а) В състояние на термодинамично равновесие при температура T фононите са N на брой и извършват хаотично движение. Ще приемем, че в посока, перпендикулярна на две от стените на съда, се движат $N/3$ частици. Тогава при удар на фонон в една от стените той й действа със сила

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t}, \quad (1 \text{ т.})$$

където Δt е продължителността на удара. Ще приемем, че Δt е времето между

два последователни удара на частицата в стената. Тогава имаме

$$\Delta t = \frac{2l}{v}, \quad f = \frac{vp}{l} = \frac{\varepsilon}{l}. \quad (1 \text{ т.})$$

Пълната сила F , която действа на стената, е

$$F = f_1 + f_2 + \dots = \frac{1}{l} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots) = \frac{N\varepsilon_{\text{ср}}}{3l}, \quad (1 \text{ т.})$$

където $\varepsilon_{\text{ср}}$ е средната енергия на топлинното движение на един фонон. По определение налягането P е

$$P = \frac{F}{S} = \frac{N\varepsilon_{\text{ср}}}{3l^3} = \frac{U}{3V} = \frac{1}{3}u. \quad (1 \text{ т.})$$

б) От първия принцип на термодинамиката за изотермния процес при температура T имаме

$$\Delta U = Q - P\Delta V. \quad (1 \text{ т.})$$

От друга страна за цикъл на Карно е изпълнено съотношението

$$\frac{A}{Q} = \frac{\Delta T}{T}, \quad (1 \text{ т.})$$

откъдето при $A = P\Delta V$ (1 т.) имаме

$$Q = T \frac{P\Delta V}{\Delta T}. \quad (1 \text{ т.})$$

След заместване на Q получаваме търсеното равенство.

в) За фононния газ $U = Vu(T)$ (1 т.). Като използваме съотношението от б) намираме

$$\frac{\Delta u}{u} = 4 \frac{\Delta T}{T}, \quad u(T) = aT^4. \quad (1 \text{ т.})$$

г) В процеса на разширение при увеличаване на обема с ΔV обмененото количество топлина между фононния газ и околната среда е

$$\delta Q = \Delta U + P\Delta V. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Понеже при този процес

$$T = \frac{B}{V^\lambda}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

имаме

$$U = aT^4V = aB^4V^{1-4\lambda}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

В този случай изменението на вътрешната енергия е

$$\Delta U = aB^4(V + \Delta V)^{1-4\lambda} - aB^4V^{1-4\lambda} =$$

$$\begin{aligned} &= aB^4V^{1-4\lambda} \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{1-4\lambda} - 1 \right] \approx \\ &\approx aB^4(1-4\lambda) \frac{\Delta V}{V^{4\lambda}} = a(1-4\lambda)T^4\Delta V, \end{aligned}$$

тъй като $\frac{\Delta V}{V} \ll 1$ (1,5 т.). Като отчетем,

$$\text{че } P\Delta V = \frac{1}{3}aT^4\Delta V, \text{ намираме}$$

$$\delta Q = 4a \left(\frac{1}{3} - \lambda \right) T^4 \Delta V. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Следователно имаме

$\delta Q > 0$, $\lambda < \frac{1}{3}$, фононният газ получава топлина при разширението си; (0,5 т.)

$\delta Q < 0$, $\lambda > \frac{1}{3}$, фононният газ отдава топлина при разширението си; (0,5 т.)

$\delta Q = 0$, $\lambda = \frac{1}{3}$, с фононния газ се извършва адиабатно разширение. (0,5 т.)

Задача 3.

а) Силата, действаща върху заряда 1, е

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14},$$

където $\vec{F}_{ij}$ е силата, която действа върху заряда i от страна на заряда j . От закона на Кулон и от факта, че всички сили, действащи на заряда 1 са еднопосочни, намираме

$$F_1 = \frac{kq^2}{r_0^2} + \frac{kq^2}{(2r_0)^2} + \frac{kq^2}{(3r_0)^2} = \frac{49kq^2}{36r_0^2}. \quad (1 \text{ т.})$$

За заряда 2 имаме $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = 0$, откъдето

$$F_2 = F_{24} = \frac{kq^2}{4r_0^2}. \quad (1 \text{ т.})$$

Поради симетричното разположение на зарядите:

$$F_3 = F_2; \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$F_4 = F_1. \quad (0,5 \text{ т.})$$

б) Потенциалната енергия на система от заряди е сума от потенциалните енер-

гии на всички двойки заряди в системата

$$W = \sum W_{ij}.$$

За 4 заряда има общо 6 различни двойки: 1-2, 2-3, 3-4, 1-3, 2-4, 1-4. Последователно определяме:

$$W_{12} = W_{23} = W_{34} = \frac{kq^2}{r_0};$$

$$W_{13} = W_{24} = \frac{kq^2}{2r_0};$$

$$W_{14} = \frac{kq^2}{3r_0}.$$

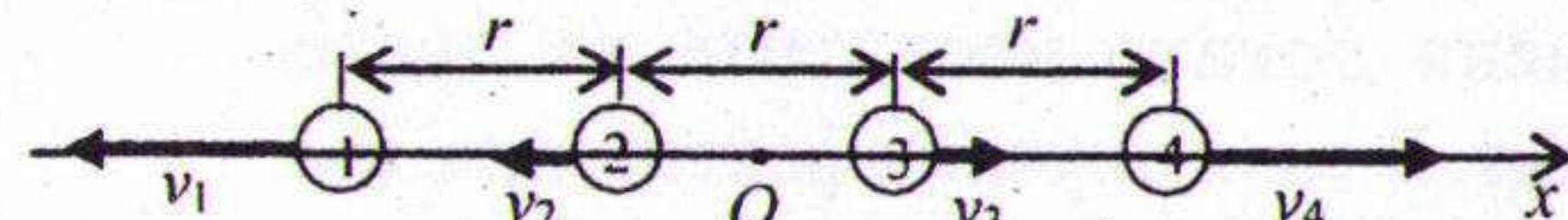
$$(1 \text{ т.} + 1 \text{ т.} + 1 \text{ т.})$$

Следователно общата потенциална енергия е

$$W = 3 \frac{kq^2}{r_0} + 2 \frac{kq^2}{2r_0} + \frac{kq^2}{3r_0} = \frac{13kq^2}{3r_0}. \quad (1 \text{ т.})$$

в) Частиците се разлитат симетрично спрямо центъра на масите O , който остава неподвижен. Следователно можем да изберем O като координатно начало. Ако в даден момент частиците се намират на еднакви разстояния r една от друга, координатите им съответно са:

$$x_4 = -x_1 = \frac{3}{2}r; \quad x_3 = -x_2 = \frac{1}{2}r. \quad (0,5 \text{ т.} + 0,5 \text{ т.})$$



Оттук получаваме следното съотношение между координатите на частиците

$$x_4 = 3x_3 \text{ и } x_1 = 3x_2.$$

След диференциране по времето намираме за големините на скоростите и ускоренията на частиците

$$v_1 = 3v_2 \text{ и } a_1 = 3a_2. \quad (0,5 \text{ т.} + 0,5 \text{ т.})$$

От II принцип на Нютон следва:

$$\frac{Ma_2}{ma_1} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (1 \text{ т.})$$

Според резултата от т. а) при еднакви разстояния между частиците имаме $F_2/F_1 = 9/49$. Следователно

$$\frac{M}{m} = \frac{27}{49}. \quad (1 \text{ т.})$$

г) Първоначалната потенциална енергия на зарядите се трансформира изцяло в кинетична енергия, когато те се отдалят на голямо разстояние един от друг:

$$\frac{13kq^2}{3r_0} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{Mv_3^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2}. \quad (1 \text{ т.})$$

Като вземем предвид, че $v_1 = v_4$, $v_2 = v_3 = v_1/3$ и $M = (27/49)m$, получаваме:

$$\frac{13kq^2}{3r_0} = \frac{52mv_1^2}{49} \quad (1 \text{ т.})$$

и намираме окончателно:

$$v_1 = v_4 = \frac{7q}{6} \sqrt{\frac{3k}{mr_0}};$$

$$v_2 = v_3 = \frac{7q}{18} \sqrt{\frac{3k}{mr_0}} \quad (1 \text{ т.} + 1 \text{ т.})$$

Задача 4.

а) Размерността на Планковата константа h е $J \cdot s$. Изразявайки единицата за енергия J чрез единиците за маса, дължина и време, се получава

$$(4.1) \quad [h] = J \cdot s = N \cdot m \cdot s = kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}. \quad (1 \text{ т.})$$

Размерността на гравитационната константа G (която може да се получи от закона на Нютон за гравитацията) е $N \cdot m^2/kg^2$. Изразявайки единицата за сила N чрез единиците за маса, дължина и време се получава

$$(4.2) \quad \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg^2} = kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}. \quad (1 \text{ т.})$$

б) Предполагаме, че формулата, свързваща кванта за дължина l_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа

$$(4.3) \quad l_{Pl} = h^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$(4.4) \quad m^1 = (kg^\alpha \cdot m^{2\alpha} \cdot s^{-\alpha}) \cdot (kg^{-\beta} \cdot m^{3\beta} \cdot s^{-2\beta}) \cdot (m^\gamma \cdot s^{-\gamma}).$$

Уравнение (4.4) се свежда до три уравнения ((0,5 т.) за всяко):

$$(4.5) \quad 0 = \alpha - \beta$$

$$(4.6) \quad 1 = 2\alpha + 3\beta + \gamma$$

$$(4.7) \quad 0 = -\alpha - 2\beta - \gamma$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.5) се получава $\beta = \alpha$, от (4.7) — $\gamma = -3\alpha$, а от (4.6) — $1 = 2\alpha + 3\alpha - 3\alpha = 2\alpha$. Следователно $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -3/2$ (0,5 т.) или търсената формула е

$$(4.8) \quad l_{Pl} = \sqrt{\frac{h \cdot G}{c^3}} \quad (0,5 \text{ т.})$$

Предполагаме, че формулата, свързваща кванта за време t_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа

$$(4.9) \quad t_{Pl} = h^x \cdot G^y \cdot c^z. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$(4.10) \quad s^1 = (kg^x \cdot m^{2x} \cdot s^{-x}) \cdot (kg^{-y} \cdot m^{3y} \cdot s^{-2y}) \cdot (m^z \cdot s^{-z}).$$

Уравнение (4.10) се свежда до три уравнения ((0,5 т.) за всяко):

$$(4.11) \quad 0 = x - y$$

$$(4.12) \quad 0 = 2x + 3y + z$$

$$(4.13) \quad 1 = -x - 2y - z$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.11) се получава $y = x$, от (4.12) — $z = -5x$, а от (4.13) — $1 = -x - 2x + 5x = 2x$. Следователно $x = 1/2$, $y = 1/2$, $z = -5/2$ (0,5 т.) или търсената формула е

$$(4.14) \quad t_{Pl} = \sqrt{\frac{h \cdot G}{c^5}}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

в) При дадените стойности на Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c , от (4.8) за l_{Pl} се получава

$$(4.15) \quad l_{Pl} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^3}} = 4,05 \cdot 10^{-35} m. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Използвайки (4.14), за t_{Pl} се получава

$$(4.16) \quad t_{Pl} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2}{(3 \cdot 10^8 m/s)^5}} = 1,35 \cdot 10^{-43} s. \quad (0,5 \text{ т.})$$

г) Предполагаме, че формулата, свързваща критичната стойност m_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа:

$$(4.17) \quad m_{Pl} = h^\delta \cdot G^\epsilon \cdot c^\eta. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$(4.18) \quad kg^1 = (kg^\delta \cdot m^{2\delta} \cdot s^{-\delta}) \cdot (kg^{-\epsilon} \cdot m^{3\epsilon} \cdot s^{-2\epsilon}) \cdot (m^\eta \cdot s^{-\eta}).$$

Уравнение (4.18) се свежда до три уравнения ((0,5 т.) за всяко):

$$(4.19) \quad 1 = \delta - \epsilon$$

$$(4.20) \quad 0 = 2\delta + 3\epsilon + \eta$$

$$(4.21) \quad 0 = -\delta - 2\epsilon - \eta$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.21) се получава $\eta = -\delta - 2\epsilon$, от (4.20) — $0 = 2\delta + 3\epsilon - \delta - 2\epsilon = \delta + \epsilon$, следователно $\epsilon = -\delta$. От (4.19) се получава $-1 = \delta + \delta$. Следователно $\delta = 1/2$, $\epsilon = -1/2$, $\eta = 1/2$ или търсената формула е

$$(4.22) \quad m_{Pl} = \sqrt{\frac{h \cdot c}{G}}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Използвайки (4.22), за m_{Pl} се получава

$$(4.23) \quad m_{Pl} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2}} = 5,46 \cdot 10^{-8} kg. \quad (0,5 \text{ т.})$$

д) Предполагаме, че формулата, свързваща радиуса R_g на „черна дупка“ с нейната маса M , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа

$$(4.24) \quad R_g = M^p \cdot G^q \cdot c^r. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$(4.25) \quad m^1 = (kg^p) \cdot (kg^{-q} \cdot m^{3q} \cdot s^{-2q}) \cdot (m^r \cdot s^{-r}).$$

Уравнение (4.25) се свежда до три

122

уравнения ((0,5 т.) за всяко):

$$(4.26) \quad 0 = p - q$$

$$(4.27) \quad 1 = 3q + r$$

$$(4.28) \quad 0 = -2q - r$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.26) се получава $p = q$, а от (4.28) — $r = -2q$. От (4.27) се получава — $1 = 3q - 2q$. Следователно $q = 1$, $p = 1$, $r = -2$ или търсената формула е

$$(4.29) \quad R_g = \frac{M \cdot G}{c^2} \cdot (0,5 \text{ т.})$$

Първата космическа скорост се намира като скоростта на тяло при движение

по окръжност с радиус R_g около „черната дупка“ с маса M . От закона на Нютон за гравитацията следва

$$(4.30) \quad G \frac{M \cdot m}{R_g^2} = \frac{mv^2}{R_g}$$

Замествайки R_g с израза от (4.29) и след съкращения се получава

$$(4.31) \quad G \frac{M}{R_g} = v^2 = G \frac{M \cdot c^2}{M \cdot G},$$

откъдето за първата космическа скорост се получава

$$(4.32) \quad v = c. (0,5 \text{ т.})$$