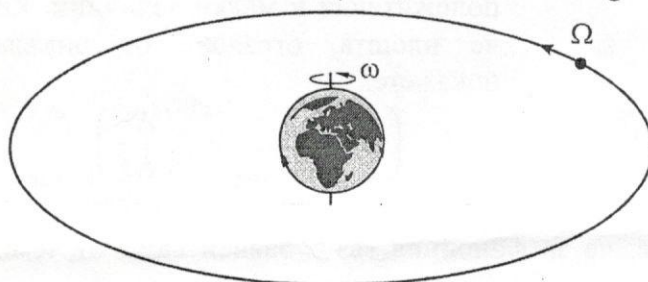


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национален кръг на Олимпиадата по физика
Теоретична тема, 6 май 2006 г.

Задача 1. Изменение на периода на въртене на Земята поради приливното триене. Поради силите на триене движението на водата в океаните и моретата при прилив и отлив е съпроводено с отделяне на топлина. Затова механичната енергия на системата Земя-Луна намалява, което води до нарастване на разстоянието r между Земята и Луната и увеличаване на периода на въртене на Земята около нейната ос. За една година разстоянието между Земята и Луната нараства с $\Delta r = 4$ cm.

Разгледайте опростен модел, в който Луната се приема за материална точка с маса $m = 7,33 \cdot 10^{22}$ kg, която се върти около Земята по кръгова орбита с радиус $r_0 = 3,84 \cdot 10^8$ m. Земята е твърдо тяло с маса $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg и инерчен момент $I = 4,00 \cdot 10^{37}$ kg.m², което се върти около ос на симетрия, перпендикулярна на орбитата на Луната (вж. фиг. 1). Системата Земя-Луна да се разглежда като затворена система. Приемете, че оста на въртене на Земята не променя ориентацията си, а Луната през цялото време се движи по кръгова орбита.

Гравитационната константа е $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg².



Фиг. 1

- а) Пресметнете ъгловата скорост Ω на орбиталното движение на Луната. (2 точки)
- б) Представете ъгловата скорост ω на въртене на Земята около нейната ос като функция на изменението на разстоянието Δr между Земята и Луната. Отчетете, че $\Delta r \ll r_0$. (4 точки)
- в) Представете нарастването ΔT на периода на въртене на Земята около нейната ос като функция от Δr . (2 точки)
- г) С колко секунди ще нарасне земното денонощие за една година? (1 точка)
- д) Представете изменението ΔE на механична енергия на системата Земя-Луна като функция от Δr . (5 точки)
- е) С колко джаула ще намалее механичната енергия на системата Земя-Луна за една година поради приливното триене? (1 точка)

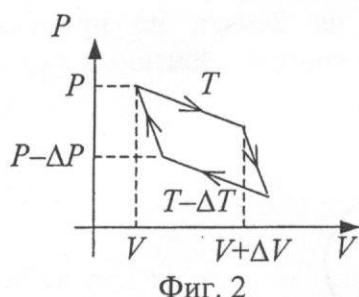
Задача 2. Газ от фонони. При ниски температури (под 100 K) термодинамичните свойства на диелектричните кристали се определят от хармоничните трептения на атомите. Тези трептения имат квантов характер и на разпространението на механични вълни със скорост v в кристала се съпоставят частици, наречени фонони. По този начин съвкупността от трептящи атоми се заменя с идеален газ от фонони, които запълват обема V на кристала и за които връзката между енергията ϵ и големината на импулса p е

$$\epsilon = vp.$$

Характерно за този газ е, че броят на фононите е променлив и се определя от температурата T и обема V на кристала.

а) Покажете, че за фононния газ налягането P и плътността на вътрешната енергия $u = \frac{U}{V}$ при термодинамично равновесие са свързани със съотноше-

нието $P = \frac{1}{3}u$. Приемете, че кристалът има формата на куб със страна l . (4 т.)



б) На PV -диаграмата (вж. фиг. 2) е показан цикъл на Карно с изотерми при температури съответно T и $T - \Delta T$. Измененията на налягането ΔP , обема ΔV и температурата ΔT са положителни и малки величини. Като приемете, че площта, оградена от цикъла е $\Delta P \Delta V$, покажете:

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta V} \right)_{T=\text{const}} = T \left(\frac{\Delta P}{\Delta T} \right)_{V=\text{const}} - P. \quad (4 \text{ т.})$$

в) Като отчетете, че за фононния газ u зависи само от температурата T , намерете вида на функцията $u(T)$. (2 т.)

г) Нека фононният газ се разширява по закона $TV^\lambda = \text{const}$, където λ е зададено число. При какви стойности на λ газът поглъща топлина, отдава топлина или се извършва адиабатен процес? (5 т.)

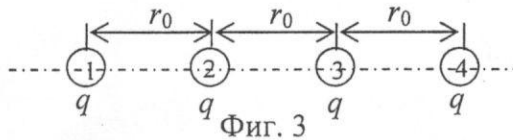
Полезни съотношения.

1. Ако $\frac{\Delta y}{y} = \gamma \frac{\Delta x}{x}$, то $y = ax^\gamma$, $a = \text{const}$.

2. При $|x| \ll 1$ е в сила приближената формула $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Задача 3. Отблъскващи се частици

Четири частици с еднакви положителни заряди q са разположени върху една права на еднакви разстояния r_0 една от друга (вж. фиг. 3).



а) Намерете големините на електричните сили, които действат върху всяка частица.

[3 т]

б) Определете електричната потенциална енергия на системата;

[4 т]

Двете крайни частици (1 и 4) имат еднакви маси m , а частиците между тях (2 и 3) – еднакви маси M . Частиците са оставени да се движат свободно с нулеви начални скорости под действие единствено на електричните сили. При това се оказва, че през цялото време частиците се намират на еднакви разстояния една от друга.

в) Пресметнете отношението на масите на частиците $\frac{M}{m}$.

[4 т]

г) Определете скоростите на частиците, след като се отдалечат една от друга на разстояния, които значително превишават началното разстояние r_0 .

[4 т]

Изразете отговорите чрез заряда на частиците q , масата m на двете крайни частици, началното разстояние r_0 и константата k в закона на Кулон.

Задача 4. Планкови дължина, време и маса. Радиус на “черна дупка”.

а) Изразете размерността на Планковата константа h и гравитационната константа G чрез мерните единици на величините маса, дължина и време. [2 т.]

б) В съвременните физични теории се предполага, че пространството и времето се квантуват. Ако предположите, че големините на квантите за дължина l_{Pl} и време t_{Pl} зависят само от Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c , намерете формули (с точност до безразмерен множител от порядъка на единица) за техните стойности. [6 т.]

в) изчислете l_{Pl} и t_{Pl} , ако $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg² и $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s [1 т.]

г) В съвременните физични теории се предполага, че когато релативистката маса на елементарните частици достигне критична стойност m_{Pl} , гравитационните взаимодействия между тях стават съществени и сравними по големина с останалите взаимодействия. Ако предположите, че големината на m_{Pl} зависи само от Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c , намерете формула (с точност до безразмерен множител от порядъка на единица) и изчислете нейната стойност. [3 т.]

д) (независимо подусловие) Оценете радиуса R_g на “черна дупка”, ако той зависи само от нейната маса M , гравитационната константа G и скоростта на светлината c . На колко ще е равна първата космическа скорост за тази “черна дупка” (според класическата механика) [3 т.]

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национален кръг на Олимпиадата по физика, 6 май 2006 г
Решения на задачите от теоретичната тема
и критерии за оценяване

Решение на задача 1

а) Луната се движи по кръгова орбита под действие на гравитационната сила, с която я привлича Земята:

(1) $\frac{\gamma m M}{r_0^2} = m \Omega_0^2 r_0$, откъдето определяме

(2) $\Omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0^3}}$ 1 точка

$\Omega_0 = 2,65 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ 1 точка

б) От закона за запазване на момента на импулса на системата Земя-Луна следва равенството

(3) $I\omega + mr^2\Omega = I\omega_0 + mr_0^2\Omega_0$ 1 точка

От уравнения (3) и (2) изразяваме ω

(4) $\omega = \omega_0 + \frac{m}{I} \sqrt{\gamma M} (r_0^{1/2} - r^{1/2})$ 1 точка

$r_0^{1/2} - r^{1/2} = (r_0^{1/2} - r^{1/2})(r_0^{1/2} + r^{1/2}) / (r_0^{1/2} + r^{1/2}) =$

(5) $= \frac{-\Delta r}{r_0^{1/2} + r^{1/2}} \approx \frac{-\Delta r}{2r_0^{1/2}}$ 1 точка

(6) $\omega = \omega_0 - \frac{m}{2I} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \Delta r$ 1 точка

в) (7) $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0} \approx -\frac{2\pi}{T_0^2} \Delta T$; ($T_0 = 24$ часа) 1 точка

От равенства (6) и (7) получаваме:

(8) $\Delta T = \frac{T_0^2 m}{4\pi I} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \Delta r$ 1 точка

г) $\Delta T = 44,4 \text{ } \mu\text{s}$ 1 точка

д) Пълната механична енергия на системата Земя-Луна е

(9) $E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mr^2\Omega}{2} - \frac{\gamma m M}{r} = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{\gamma m M}{2r}$ 2 точки

Заместваме ω от уравнение (6), полагаме $r = r_0 + \Delta r$, пренебрегваме члена с $(\Delta r)^2$ и получаваме

(10) $E \approx \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{\gamma m M}{2r_0} - \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} \omega_0 \Delta r + \frac{\gamma m M}{2r_0^2} \Delta r$ 2 точки

Полагаме $E_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{\gamma m M}{2r_0}$ - енергия на системата в началния момент и за

изменението на енергията получаваме

(11) $\Delta E = E - E_0 = -\frac{m}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}} (\omega_0 - \Omega_0) \Delta r$ 1 точка

е) $\Delta E = -1,05 \cdot 10^{20} \text{ J}$ 1 точка

Решение на задача 2. а) В състояние на термодинамично равновесие при температура T фононите са N на брой и извършват хаотично движение. Ще приемем, че в посока, перпендикулярна на две от стените на съда, се движат $N/3$ частици. Тогава при удар на фонон в една от стените той й действа със сила

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p}{\Delta t}, \quad (1 \text{ т.})$$

където Δt е продължителността на удара. Ще приемем, че Δt е времето между два последователни удара на частицата в стената. Тогава имаме

$$\Delta t = \frac{2l}{v}, \quad f = \frac{vp}{l} = \frac{\varepsilon}{l}. \quad (1 \text{ т.})$$

Пълната сила F , която действа на стената, е

$$F = f_1 + f_2 + \dots = \frac{1}{l}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots) = \frac{N\varepsilon_{\text{ср}}}{3l}, \quad (1 \text{ т.})$$

където $\varepsilon_{\text{ср}}$ е средната енергия на топлинното движение на един фонон. По определение налягането P е

$$P = \frac{F}{S} = \frac{N\varepsilon_{\text{ср}}}{3l^3} = \frac{U}{3V} = \frac{1}{3}u. \quad (1 \text{ т.})$$

б) От първия принцип на термодинамиката за изотермния процес при температура T имаме

$$\Delta U = Q - P\Delta V. \quad (1 \text{ т.})$$

От друга страна за цикъл на Карно е изпълнено съотношението

$$\frac{A}{Q} = \frac{\Delta T}{T}, \quad (1 \text{ т.})$$

откъдето при $A = P\Delta V$ (1 т.) имаме

$$Q = T \frac{P\Delta V}{\Delta T}. \quad (1 \text{ т.})$$

След заместване на Q получаваме търсеното равенство.

в) За фононния газ $U = Vu(T)$ (1 т.). Като използваме съотношението от б) намираме

$$\frac{\Delta u}{u} = 4 \frac{\Delta T}{T}, \quad u(T) = aT^4. \quad (1 \text{ т.})$$

г) В процеса на разширение при увеличаване на обема с ΔV обмененото количество топлина между фононния газ и околната среда е

$$\delta Q = \Delta U + P\Delta V. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Понеже при този процес

$$T = \frac{B}{V^\lambda}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

имаме

$$U = aT^4V = aB^4V^{1-4\lambda}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

В този случай изменението на вътрешната енергия е

$$\begin{aligned} \Delta U &= aB^4(V + \Delta V)^{1-4\lambda} - aB^4V^{1-4\lambda} \\ &= aB^4V^{1-4\lambda} \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{1-4\lambda} - 1 \right] \\ &\approx aB^4(1-4\lambda) \frac{\Delta V}{V^{4\lambda}} = a(1-4\lambda)T^4\Delta V, \end{aligned}$$

тъй като $\frac{\Delta V}{V} \ll 1$ (1,5 т.). Като отчетем, че $P\Delta V = \frac{1}{3}aT^4\Delta V$, намираме

$$\delta Q = 4a\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)T^4\Delta V. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Следователно имаме

$\delta Q > 0, \lambda < \frac{1}{3}$, фононният газ получава топлина при разширението си; (0,5 т.)

$\delta Q < 0, \lambda > \frac{1}{3}$, фононният газ отдава топлина при разширението си; (0,5 т.)

$\delta Q = 0, \lambda = \frac{1}{3}$, с фононния газ се извършва адиабатно разширение. (0,5 т.)

Решение на задача 3.

а) Силата, действаща върху заряда 1 е:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14},$$

където $\vec{F}_{ij}$ е силата, която действа върху заряда i от страна на заряда j . От закона на Кулон и от факта, че всички сили, действащи на заряда 1 са еднопосочни, намираме:

$$F_1 = \frac{kq^2}{r_0^2} + \frac{kq^2}{(2r_0)^2} + \frac{kq^2}{(3r_0)^2} = \frac{49kq^2}{36r_0^2}. \quad [1 \text{ т}]$$

За заряда 2 имаме $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = 0$, откъдето:

$$F_2 = F_{24} = \frac{kq^2}{4r_0^2}. \quad [1 \text{ т}]$$

Поради симетричното разположение на зарядите:

$$F_3 = F_2; \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$F_4 = F_1. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) Потенциалната енергия на система от заряди е сума от потенциалните енергии на всички двойки заряди в системата:

$$W = \sum W_{ij}$$

За 4 заряда има общо 6 различни двойки: 1-2, 2-3, 3-4, 1-3, 2-4, 1-4.

Последователно определяме:

$$W_{12} = W_{23} = W_{34} = \frac{kq^2}{r_0};$$

$$W_{13} = W_{24} = \frac{kq^2}{2r_0}; \quad [1 \text{ т} + 1 \text{ т} + 1 \text{ т}]$$

$$W_{14} = \frac{kq^2}{3r_0}.$$

Следователно общата потенциална енергия е:

$$W = 3\frac{kq^2}{r_0} + 2\frac{kq^2}{2r_0} + \frac{kq^2}{3r_0} = \frac{13kq^2}{3r_0}; \quad [1 \text{ т}]$$

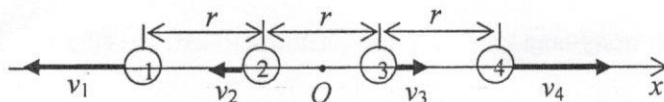
в) Частиците се разлитат симетрично спрямо центъра на масите O , който остава неподвижен. Следователно можем да изберем т. O като координатно начало.

Ако в даден момент частиците се намират на еднакви разстояния r една от друга, координатите им съответно са:

$$x_4 = -x_1 = \frac{3}{2}r;$$

$$x_3 = -x_2 = \frac{1}{2}r.$$

[0,5 т + 0,5 т]



Оттук получаваме следното съотношение между координатите на частиците:

$$x_4 = 3x_3 \quad \text{и} \quad x_1 = 3x_2.$$

След диференциране по времето намираме за големините на скоростите и ускоренията на частиците:

$$v_1 = 3v_2 \quad \text{и} \quad a_1 = 3a_2.$$

[0,5 т + 0,5 т]

От II принцип на Нютон следва:

$$\frac{Ma_2}{ma_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

[1 т]

Според резултата от т. а) при еднакви разстояния между частиците имаме $F_2/F_1 = 9/49$. Следователно:

$$\frac{M}{m} = \frac{27}{49}.$$

[1 т]

г) Първоначалната потенциална енергия на зарядите се трансформира изцяло в кинетична енергия, когато те се отдалечат на голямо разстояние един от друг:

$$\frac{13kq^2}{3r_0} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{Mv_3^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2}.$$

[1 т]

Като вземем предвид, че $v_1 = v_4$, $v_2 = v_3 = v_1/3$ и $M = (27/49)m$, получаваме:

$$\frac{13kq^2}{3r_0} = \frac{52mv_1^2}{49}$$

[1 т]

и намираме окончателно:

$$v_1 = v_4 = \frac{7q}{6} \sqrt{\frac{3k}{mr_0}};$$

[1 т + 1 т]

$$v_2 = v_3 = \frac{7q}{18} \sqrt{\frac{3k}{mr_0}}$$

Решение на задача 4. Планкови дължина, време и маса.

а) Размерността на Планковата константа h е J.s. Изразявайки единицата за енергия J чрез единиците за маса, дължина и време се получава

$$[h] = J.s = N.m.s = kg.m.s^{-2}.m.s = kg.m^2.s^{-1} \quad [1 т.] \quad (4.1)$$

Размерността на гравитационната константа G (която може да се получи от закона на Нютон за гравитацията) е $N.m^2/kg^2$. Изразявайки единицата за сила N чрез единиците за маса, дължина и време се получава

$$\frac{N.m^2}{kg^2} = \frac{kg.m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg^2} = kg^{-1}.m^3.s^{-2} \quad [1 т.] \quad (4.2)$$

б) предполагаме, че формулата, свързваща кванта за дължина l_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа:

$$l_{Pl} = h^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.3)$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$m^1 = (kg^\alpha \cdot m^{2\alpha} \cdot s^{-\alpha}) (kg^{-\beta} \cdot m^{3\beta} \cdot s^{-2\beta}) (m^\gamma \cdot s^{-\gamma}) \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) се свежда до три уравнения ([0,5 т.] за всяко):

$$0 = \alpha - \beta \quad (4.5)$$

$$1 = 2\alpha + 3\beta + \gamma \quad (4.6)$$

$$0 = -\alpha - 2\beta - \gamma \quad (4.7)$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.5) се получава $\beta = \alpha$, от (4.7) - $\gamma = -3\alpha$, а от (4.6) - $1 = 2\alpha + 3\alpha - 3\alpha = 2\alpha$. Следователно

$$\alpha = 1/2, \beta = 1/2, \gamma = -3/2 \quad [0,5 \text{ т.}] \text{ или търсената формула е}$$

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{h \cdot G}{c^3}} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.8)$$

Предполагаме, че формулата, свързваща кванта за време t_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа:

$$t_{Pl} = h^x \cdot G^y \cdot c^z \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.9)$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$s^1 = (kg^x \cdot m^{2x} \cdot s^{-x}) (kg^{-y} \cdot m^{3y} \cdot s^{-2y}) (m^z \cdot s^{-z}) \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) се свежда до три уравнения ([0,5 т.] за всяко):

$$0 = x - y \quad (4.11)$$

$$0 = 2x + 3y + z \quad (4.12)$$

$$1 = -x - 2y - z \quad (4.13)$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.11) се получава $y = x$, от (4.12) - $z = -5x$, а от (4.13) - $1 = -x - 2x + 5x = 2x$. Следователно

$$x = 1/2, y = 1/2, z = -5/2 \quad [0,5 \text{ т.}] \text{ или търсената формула е}$$

$$t_{Pl} = \sqrt{\frac{h \cdot G}{c^5}} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.14)$$

в) при дадените стойности на Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c , от (4.8) за l_{Pl} се получава

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^3}} = 4,05 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.15)$$

Използвайки (4.14), за t_{Pl} се получава

$$t_{Pl} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^5}} = 1,35 \cdot 10^{-43} \text{ s} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.16)$$

г) предполагаме, че формулата, свързваща критичната стойност m_{Pl} и Планковата константа h , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа:

$$m_{Pl} = h^\delta \cdot G^\epsilon \cdot c^\eta \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.17)$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$kg^1 = (kg^\delta . m^{2\delta} . s^{-\delta}) (kg^{-\epsilon} . m^{3\epsilon} . s^{-2\epsilon}) (m^\eta . s^{-\eta}) \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) се свежда до три уравнения ([0,5 т.] за всяко):

$$1 = \delta - \epsilon \quad (4.19)$$

$$0 = 2\delta + 3\epsilon + \eta \quad (4.20)$$

$$0 = -\delta - 2\epsilon - \eta \quad (4.21)$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.21) се получава $\eta = -\delta - 2\epsilon$, от (4.20) - $0 = 2\delta + 3\epsilon - \delta - 2\epsilon = \delta + \epsilon$, следователно $\epsilon = -\delta$. От (4.19) се получава - $1 = \delta + \delta$. Следователно

$\delta = 1/2$, $\epsilon = -1/2$, $\eta = 1/2$ или търсената формула е

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{hc}{G}} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.22)$$

Използвайки (4.22), за m_{Pl} се получава

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 / \text{kg}^2}} = 5,46 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.23)$$

д) предполагаме, че формулата, свързваща радиуса R_g на "черна дупка" с нейната маса M , гравитационната константа G и скоростта на светлината c е от типа:

$$R_g = M^p . G^q . c^r \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.24)$$

Тъй като лявата и дясната част на уравнението трябва да имат една и съща размерност, то

$$m^1 = (kg^p) (kg^{-q} . m^{3q} . s^{-2q}) (m^r . s^{-r}) \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) се свежда до три уравнения ([0,5 т.] за всяко):

$$0 = p - q \quad (4.26)$$

$$1 = 3q + r \quad (4.27)$$

$$0 = -2q - r \quad (4.28)$$

Решавайки тази система уравнения, от (4.26) се получава $p = q$, а от (4.28) - $r = -2q$. От (4.27) се получава - $1 = 3q - 2q$. Следователно

$q = 1$, $p = 1$, $r = -2$ или търсената формула е

$$R_g = \frac{M.G}{c^2} \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.29)$$

Първата космическа скорост се намира като скоростта на тяло при движение по окръжност с радиус R_g около "черната дупка" с маса M . От закона на Нютон за гравитацията следва

$$G \frac{M.m}{R_g^2} = \frac{mV^2}{R_g} \quad (4.30)$$

Замествайки R_g с израза от (4.29) и след съкращения се получава

$$G \frac{M}{R_g} = V^2 = G \frac{M.c^2}{M.G} \quad (4.31)$$

откъдето за първата космическа скорост се получава

$$V = c \quad [0,5 \text{ т.}] \quad (4.32)$$