

6

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Олимпиада по физика, Областен кръг, 25 март 2007 г.
Решения на темата за 10 – 12 клас с критерии за оценяване

Общи указания:

- Приведените решения са примерни. При алтернативни решения работата се оценява по критерии на комисията, като се съблюдават максималния брой точки по всяка задача и всяко подусловие.
- Числените отговори се приемат за верни, ако е посочена мерната единица на крайния резултат и числената стойност не се различава с повече от 5 % спрямо посочената в примерното решение.
- За улеснение на комисията за някои от подточките са дадени по два варианта на решение. Различните варианти на решение се оценяват с еднакъв брой точки.

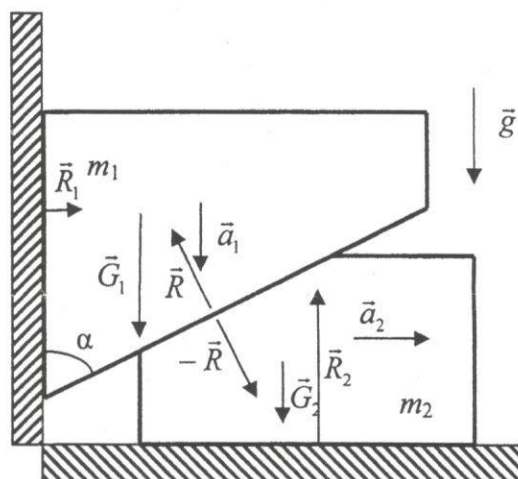
Задача 1. Движещи се клинове.

а) При преместване $\Delta \vec{x}_1$ на първото тяло надолу, второто тяло извършва преместване $\Delta \vec{x}_2$ надясно. Тъй като големините на преместванията са катети в правоъгълен триъгълник с ъгъл α

(вж. Фиг.1), то $\frac{|\Delta \vec{x}_2|}{|\Delta \vec{x}_1|} = \operatorname{tg} \alpha$. Разделяйки числителя и знаменателя на времето за движение Δt , получаваме, че $\frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|} = \operatorname{tg} \alpha$.

Повтаряйки това още веднъж, следва, че и

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \operatorname{tg} \alpha. \quad [2 \text{ т}]$$



Фиг. 1

б) Вариант I – енергетичен подход

Тъй като силите на реакция R_1 на стената, R_2 на пода и R между клиновете не извършват работа, то механичната енергия на системата не се променя. Тъй като силите, действащи на двете тела, не зависят от времето, телата се движат равноускорително. Нека разгледаме преместване $\Delta \vec{x}_1$ надолу на първото тяло. Записвайки закона за запазване на механичната енергия за началното и крайното положение на системата от двете тела, получаваме

$$m_1 g \Delta x_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.1)$$

При равноускорително движение с нулева начална скорост е изпълнена връзката

$$\Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2a_1}. \quad [1 \text{ т}] \quad (1.2)$$

Използвайки и полученото отношение за скоростите на двете тела в подусловие а), уравнение (1.1) се преобразува до

$$m_1 g \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \quad (1.3)$$

откъдето

$$a_1 = g \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad [1 \text{ т}] \quad (1.4)$$

а за ускорението на второто тяло:

$$a_2 = g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.5)$$

Вариант II – динамичен подход

На фиг. 1 са изобразени силите, които действат на двата клина –

[1 т] за чертеж с обозначени сили.

На движението на клина 1 във вертикално направление оказват влияние само силите $\vec{R}$ и $\vec{G}_1$ (вж. фиг. 1). От II принцип на Нютон имаме:

$$m_1 a_1 = m_1 g - R \sin \alpha \quad [1 \text{ т}]$$

Ускорението на клина 2 в хоризонтална посока се дължи единствено на силата на противодействие $-\vec{R}$ на клина 1:

$$m_2 a_2 = R \cos \alpha \quad [1 \text{ т}]$$

Като използваме съотношението $a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ от т. а), намираме:

$$a_1 = g \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad [1 \text{ т}] \quad \text{и} \quad a_2 = g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad [1 \text{ т}]$$

в) При $m_1 = m_2$, ускорението $\vec{a}_2$ е максимално, когато функцията $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ($x \equiv \operatorname{tg} \alpha$) има максимум. Нека той е равен на k :

$$k = \frac{x}{1+x^2}.$$

Преобразуваме уравнението до

$$kx^2 - x + k = 0 \quad (1.6)$$

То има реални (и положителни) решения за $k \leq \frac{1}{2}$. Следователно максимумът на функцията е $k = \frac{1}{2}$ [1 т], при $x = \operatorname{tg} \alpha = 1$. Следователно ъгълът, при който ускорението $\bar{a}_2$ е максимално, е $\alpha = 45^\circ$ [1 т]. Замествайки в (1.5) $a_2 = \frac{g}{2}$ [1 т].

Задача 2. Пречупване на електронен сноп

а) Електричното поле в кондензатора е насочено перпендикулярно на плочите на кондензатора. [0,5 т.]

Следователно силата, действаща на електроните в кондензатора, е насочена по оста X . [0,5 т.]

б) Понеже при движение в кондензатора Y -компонентата на силата е нулева, Y -компонентата на ускорението на електрона също е нула:

$$a_y = 0. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Следователно компонентата на скоростта по оста Y не се променя:

$$v_y = \text{const.}$$

Оттук следва:

$$v_0 \sin \alpha = v_1 \sin \beta, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето намираме:

$$v_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \quad [1 \text{ т.}] \text{ (за едно от двете равенства)}$$

$$v_1 \approx 5,77 \cdot 10^6 \text{ m/s.} \quad [1 \text{ т.}]$$

в) При преминаване през кондензатора електричните сили извършват работа:

$$A = (-e)U, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

която води до промяна на кинетичната енергия на електрона:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -eU, \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето намираме:

$$U = \frac{mv_0^2}{2e} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right) = \frac{mv_0^2}{3e} \quad [1 \text{ т.}] \text{ (за едно от двете равенства)}$$

$$U \approx 190 \text{ V.} \quad [1 \text{ т.}]$$

г) Максималният ъгъл на падане съответства на случая, когато електроните достигат втората пластина със скорост, насочена по оста Y , т.е.

$$\beta = 90^\circ. \quad [1 \text{ т.}]$$

Възможни са два варианта за останалата част от решението.

I вариант Като използваме връзката между ъгъла на падане, ъгъла на излизане и напрежението, получена в т. в), получаваме:

$$U = \frac{mv_0^2}{2e} (1 - \sin^2 \alpha_{\max}) = \frac{mv_0^2}{2e} \cos^2 \alpha_{\max} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

$$\text{Оттук намираме:} \quad \cos \alpha_{\max} = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

$$\cos \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82 \quad [1 \text{ т.}] \text{ (за едно от двете равенства)}$$

II вариант Използваме връзката между ъгъла на падане, ъгъла на излизане, началната и крайната скорости:

$$v_0 \sin \alpha_{\max} = v_1 \quad [0,5 \text{ т.}]$$

откъдето следва:

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{v_1}{v_0} \quad [0,5 \text{ т.}]$$

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58 \quad [1 \text{ т.}] \text{ (за едно от двете равенства)}$$

Задача 3. а) Фобос обикаля равномерно по окръжност, поради което има само центростремително ускорение:

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Скоростта на обикаляне v е свързана с периода по формулата:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето намираме:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \quad [1 \text{ т.}]$$

$$a_c \approx 0,51 \text{ m/s}^2. \quad [1 \text{ т.}]$$

б) От II принцип на Нютон и от закона за гравитацията имаме:

$$ma_c = \frac{\gamma M_M m}{r^2}, \quad [1 \text{ т.}]$$

където m е масата на Фобос. Оттук изразяваме масата на Марс:

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} \quad [1 \text{ т.}]$$

За тяло с маса m , разположено близо до земната повърхност, имаме:

$$mg = \frac{\gamma M_3 m}{R^2}, \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето изразяваме масата на Земята:

$$M_3 = \frac{gR^2}{\gamma}. \quad [1 \text{ т.}]$$

За отношението на масите на двете планети получаваме:

$$\frac{M_3}{M_M} = \frac{gR^2 T^2}{4\pi^2 r^3} \quad [1 \text{ т.}]$$

$$\frac{M_3}{M_M} \approx 9,1 \quad [1 \text{ т.}]$$