

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Олимпиада по физика

Областен кръг, 27 март 2005 г.

Тема за 10-12 клас

Задача 1. Шайба, хлъзгаща се по сферична повърхност (две независими подусловия).

Първо подусловие. Малка шайба с маса m се хлъзга без триене по повърхността на неподвижно закрепено полукълбо с радиус R (фиг. 1, а). Първоначално шайбата е била неподвижна в най-високата точка на полукълбото. Земното ускорение е g . Намерете:

а) зависимостта на скоростта на шайбата v от ъгъла θ (вж. фиг. 1, а). [1 т]

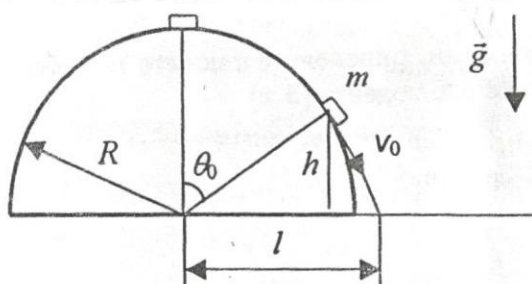
б) височината h , на която шайбата се откъсва от повърхността на полукълбото. [2 т]

в) скоростта v_0 на шайбата в момента на нейното откъсване от повърхността [1 т]

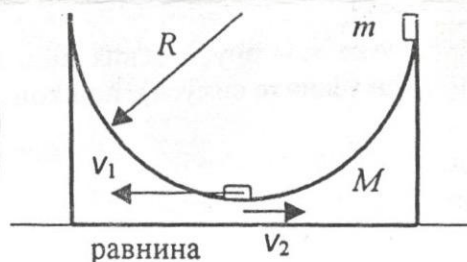
г) разстоянието l между центъра на основата на полукълбото и точката на падане на топчето. [3 т]

Второ подусловие. Малка шайба с маса m е поставена в най-горната част на вдлъбнатата полусферична повърхност с радиус R на тяло с маса M (вж. фиг. 1б). Шайбата започва да се хлъзга без триене. От своя страна, тялото се движи без триене по хоризонталната равнина. Земното ускорение е g . Намерете:

д) скоростите v_1 и v_2 на шайбата и тялото спрямо равнината, когато шайбата преминава през най-ниската точка на вдлъбнатата повърхност. [3 т]



Фиг. 1, а



Фиг. 1, б

Задача 2. Трептенe на айсберг

Цилиндричен айсберг с височина $l = 10$ m плава, потопен на дълбочина $0,9l$, като оста на цилиндъра е вертикална (вж. фиг. 2). Земното ускорение е $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

а) Айсбергът е изведен от състояние на равновесие, след което продължава да трепти във вертикално направление. Пресметнете периода T на трептенето. [4 т]

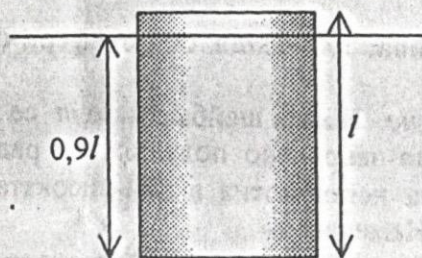
б) Известно е, че скоростта u на вълните по повърхността на дълбок водоем е свързана с тяхната дължина λ чрез съотношението:

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Определете дължината λ на вълните, породени от трептенето на айсберга.

[2 т]

в) Към айсберга се движи лодка със скорост $v = 2 \text{ m/s}$. Намерете периода T_1 , с който ще се люлее лодката под действие на вълните, предизвикани от трептенето на айсберга. [4 т]



Фиг. 2

Задача 3. Дифракционна решетка.

Два снопа монохроматична светлина от видимата област с дължини на вълните съответно λ_1 и λ_2 [$\lambda_1, \lambda_2 \in (400 \text{ nm} - 760 \text{ nm})$] падат перпендикулярно върху дифракционна решетка с константа $d = 6 \text{ }\mu\text{m}$. Върху отдалечен екран се получават дифракционни картини, като под ъгъл θ_0 ($\sin\theta_0 = 0,55$) спрямо първоначалното направление на разпространение се наблюдават съвпадащи максимуми на двете вълни.

а) Определете възможните номера на съвпадащите максимуми [3 т]

Ако едната дифракционна картина съдържа 8 максимума повече от другата, намерете:

б) дължините на вълните λ_1 и λ_2 [2 т];

в) броя N_1 и N_2 максимуми за двете дифракционни картини [1 т];

г) номерата k_1 и k_2 на съвпадащите максимуми, наблюдаващи се под ъгъл θ_0 .

[1 т]

д) Ако има други съвпадащи максимуми, определете техните номера и ъглите (или техните синуси), под които те се наблюдават [3 т].

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Олимпиада по физика

Областен кръг, 27 март 2005 г.

Решения на задачите за 10-12 клас

Общи указания:

1. Предложените решения са примерни. При оценка на работа, в която са предложени други методи на решение, трябва да се дава максималният брой точки, които се дават за отделните подусловия.
2. Числените отговори се приемат за верни, ако са дадени с поне две верни значещи цифри.

Задача 1. Шайба, хлъзгаща се по сферична повърхност (две независими подусловия).

Първо подусловие.

а) Зависимостта на скоростта на шайбата v от ъгъла θ можем да намерим използвайки закона за запазване на механичната енергия. В най-високата точка на полукълбото енергията на шайбата е $= mgR$. В положение описващо се с

ъгъл θ , нейната енергия е $E = mgR \cos \theta + \frac{mv^2}{2}$. Двете енергии са равни:

$$mgR = mgR \cos \theta + \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} \quad [1 \text{ т}] \quad (2)$$

б) шайбата ще се откъсне от повърхността на полукълбото, когато реакцията на опората N , действаща на шайбата от повърхността на полукълбото, стане нула. Тъй като шайбата се движи по окръжност, на нея трябва да ѝ действа центростремително ускорение, равно на $\frac{v^2}{R}$. Силата, създаваща това ускорение е сума на реакцията на опората N и проекцията на силата на тежестта $mg \cos \theta$:

$$mg \cos \theta - N = \frac{mv^2}{R}, \text{ при } N = 0$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \theta_0, \text{ откъдето}$$

$$v = \sqrt{gR \cos \theta_0} \quad (3)$$

Приравнявайки (2) и (3)

$$\sqrt{2gR(1 - \cos \theta_0)} = \sqrt{gR \cos \theta_0}, \text{ откъдето намираме, че}$$

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} \quad (4)$$

Следователно височината h е:

$$h = R \cos \theta_0 = \frac{2}{3} R \quad [2 \text{ т}] \quad (5)$$

в) скоростта v_0 , на шайбата в момента на нейното откъсване от повърхността намираме като заместим (4) в (3):

$$v = \sqrt{gR \cos \theta_0} = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \quad [1 \text{ т}] \quad (6)$$

г) разстоянието l между центъра на основата на полукълбото и точката на падане на топчето се намира написвайки законите за движение на шайбата след нейното откъсване от повърхността на полукълбото. Тя се движи единствено под действие на земното ускорение, т.е. като тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта. По хоризонталата уравнението е:

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (7)$$

По вертикалата уравнението е:

$$y = y_0 - v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \quad (8)$$

t може да се получи от (7) и да се замести в (8) при което се получава:

$$y = y_0 - \frac{v_{0y}(x - x_0)}{v_{0x}} - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_{0x}^2} \quad [1 \text{ т}] \quad (9)$$

В нашия случай $v_{0x} = v_0 \cos \theta = \frac{2}{3}v_0$, $v_{0y} = v_0 \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0$, $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R$, $y_0 = \frac{2}{3}R$ и

$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$. Замествайки тези величини в (9) и полагайки за по-лесни пресмятания $x - x_0 = x'$, получаваме

$$y = \frac{2}{3}R - \frac{\sqrt{5}}{2}x' - \frac{27}{16} \frac{x'^2}{R} \quad (10)$$

Тялото ще падне при $y = 0$. Тогава $x' = l - x_0$. Така (10) се свежда до следното квадратно уравнение:

$$\frac{27}{16}x'^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}Rx' - \frac{2}{3}R^2 = 0 \quad [1 \text{ т}] \quad (11)$$

Уравнение (11) има само едно положително решение:

$$x' = \frac{4(\sqrt{23} - \sqrt{5})}{27}R.$$

$$\text{Следователно } l = x' + x_0 = \frac{4(\sqrt{23} - \sqrt{5})}{27}R + \frac{\sqrt{5}}{3}R = \frac{4\sqrt{23} + 5\sqrt{5}}{27}R \approx 1,12R \quad [1 \text{ т}]$$

Второ подусловие.

д) Тъй като по хоризонталата не действат външни сили, то хоризонталната проекция на импулса на системата шайба-тяло се запазва. В началото на движението импулсът на системата е нула, а когато шайбата се намира в най-ниската точка, той е $Mv_2 - mv_1$. Следователно

$$Mv_2 - mv_1 = 0 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (12)$$

Тъй като триене няма, в сила е и законът за запазване на механичната енергия. Сравнявайки енергията в същите две положения, получаваме:

$$mgR = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (13)$$

От последните две уравнения, намираме v_1 и v_2 . Това може да стане така: от (12) изразяваме v_2 :

$$v_2 = \frac{m}{M}v_1 \quad (14)$$

и го замества в (13):

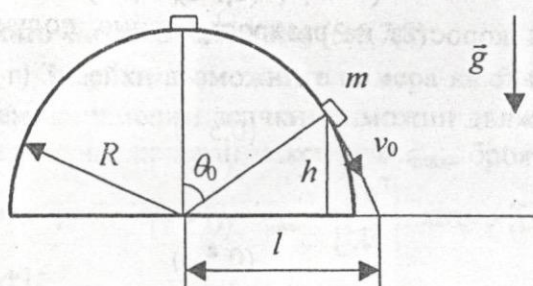
$$mgR = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M}{2} \left(\frac{m}{M} v_1 \right)^2 = \frac{m}{2} v_1^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad (15)$$

откъдето

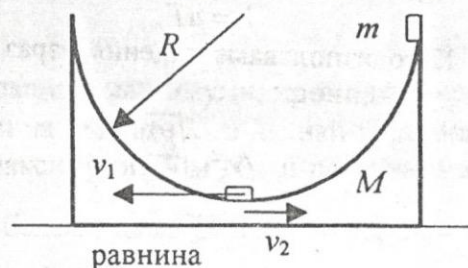
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{1 + \frac{m}{M}}} \quad [1 \text{ т}] \quad (16)$$

Използвайки (16) и (14) за v_2 получаваме

$$v_2 = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gR}{1 + \frac{m}{M}}} \quad [1 \text{ т}] \quad (17)$$

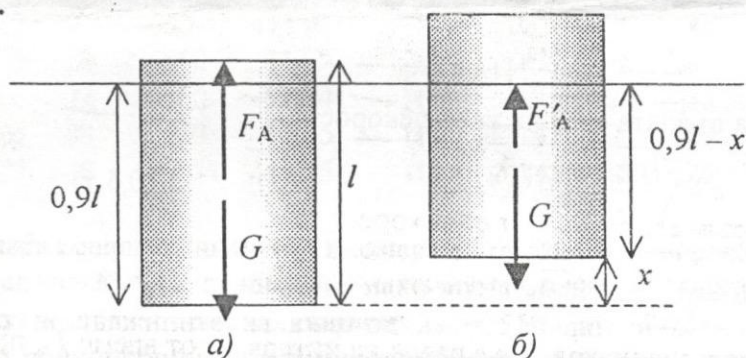


фиг. 1а



фиг. 1б

Задача 2.



а) В състояние на равновесие (положение а на чертежа) върху айсберга действат Архимедова сила и сила на тежестта, които се уравниават:

$$F_A = G \quad (0,5 \text{ т})$$

Архимедовата сила е равна на теглото на изместената от подводната част на айсберга течност:

$$F_A = \rho(0,9lS)g, \quad (0,5 \text{ т})$$

където S е площта на напречното сечение на цилиндъра. Като вземем предвид, че $G = mg$, изразяваме масата на айсберга:

$$m = 0,9\rho lS. \quad (0,5 \text{ т})$$

Ако айсбергът е изведен от състояние на равновесие, като е отместен на разстояние x нагоре (положение б на чертежа), дълбочината на потапяне става:

$$h = 0,9l - x,$$

а Архимедовата сила съответно намалява:

$$F'_A = \rho(0,9l - x)gS. \quad (0,5 \text{ т})$$

Следователно възниква равнодействаща, въртяща сила, насочена надолу:

$$F = mg - F'_A = \rho g S x, \quad (0,5 \text{ т})$$

като при получаване на второто равенство сме използвали израза за масата на айсберга. От получения израз следва, че въртящата сила е пропорционална на отместването с коефициент на пропорционалност:

$$k = \rho g S. \quad (0,5 \text{ т})$$

Следователно, айсбергът извършва хармонично трептене с период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,9l}{g}} \quad (0,5 \text{ т})$$

или $T \approx 6,0 \text{ s}. \quad (0,5 \text{ т})$

б) Дължината на вълната се изразява чрез скоростта на разпространение и периода на трептене чрез формулата:

$$\lambda = uT. \quad (0,5 \text{ т})$$

Като използваме дадения израз за скоростта на разпространение, получаваме уравнението:

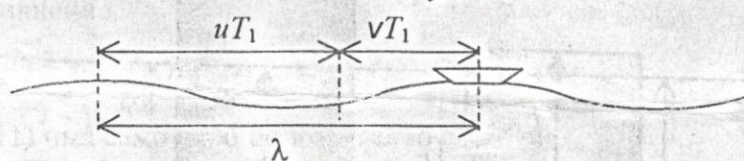
$$\lambda = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}T; \quad (0,5 \text{ т})$$

откъдето намираме:

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,8\pi l \quad (0,5 \text{ т})$$

$$\lambda \approx 56,5 \text{ m}. \quad (0,5 \text{ т})$$

в)



Гребените на вълната се движат със скорост:

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{0,9gl}. \quad (0,5 \text{ т})$$

Периодът на люлеене на лодката е равен на интервала от време T_1 , през който до лодката стигат два последователни вълнови гребена. $(1,0 \text{ т})$

След преминаване на първия гребен, до срещата със следващия гребен, лодката изминава разстояние vT_1 . За същото време, следващия гребен се премества към лодката на разстояние uT_1 . Понеже разстоянието между гребените е λ (вж. фигурата), следва:

$$vT_1 + uT_1 = \lambda, \quad (1,0 \text{ т})$$

откъдето определяме:

$$T_1 = \frac{\lambda}{u+v} = \frac{1,8\pi l}{v + \sqrt{0,9gl}} \quad (1,0 \text{ т})$$

или $T_1 \approx 5,0 \text{ s}. \quad (0,5 \text{ т})$

Указание: По условие в) се дава максимален брой точки и на тези ученици, които получават правилен израз и правилна числена стойност за периода, като

използват познатите им формули за ефекта на Доплер (Учебна програма по физика за 9. клас – профилирана подготовка).

Задача 3. Дифракционна решетка.

а) основното уравнение на дифракционната решетка е

$$d \sin \theta = k \lambda \quad [1 \text{ т}] \quad (1)$$

откъдето

$$k = \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (2)$$

При $d = 6 \text{ }\mu\text{m}$, $\sin \theta_0 = 0,55$ и $\lambda \in (400 \text{ nm} - 760 \text{ nm})$, за възможните номера на съвпадащите максимуми се получава

$$k \in \left(\frac{6,055 \mu\text{m}}{0,76 \mu\text{m}}, \frac{6,055 \mu\text{m}}{0,4 \mu\text{m}} \right) \text{ или } k \in (4,34 \div 8,25) \quad [1 \text{ т}] \quad (3)$$

тъй като k е цяло число $k \in (5, 6, 7, 8) \quad [1 \text{ т}] \quad (4)$

б, в, г) Знаейки възможните номера на съвпадащите максимуми, чрез проверка можем да намерим всички възможни дължини на вълните λ_1 и λ_2 , най-големия номер на наблюдаван максимум k_{max} , броят максимуми N_1 и N_2 и разликата в

техния брой $N_2 - N_1$. $k_{\text{max}} = \left[\frac{d}{\lambda} \right]$, като с $[]$ се бележи цяла част на число, а $N = 2k_{\text{max}} + 1$:

k_1	k_2	$\lambda_1, \text{ nm}$	$\lambda_2, \text{ nm}$	$k_{1\text{max}}$	$k_{2\text{max}}$	N_1	N_2	$N_2 - N_1$
5	6	660	550	9	10	19	21	2
5	7	660	471,4	9	12	19	25	6
5	8	660	412,5	9	14	19	29	10
6	7	550	471,4	10	12	21	25	4
6	8	550	412,5	10	14	21	29	8
7	8	471,4	412,5	12	14	25	29	4

От таблицата се вижда, че само за номера на максимумите $k_1 = 6$ и $k_2 = 8$, едната дифракционна картина съдържа 8 максимума повече от другата [1 т]. Това е изпълнено за дължините на вълните $\lambda_1 = 550 \text{ nm}$ и $\lambda_2 = 412,5 \text{ nm}$ [2 т]. Съответно общия брой максимуми на двете дифракционни картини е $N_1 = 21$ и $N_2 = 29$ [1 т].

д) тъй като условието за съвпадение на максимуми е

$$d \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2, \text{ то}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{k_1}{k_2}, \text{ което в нашия случай е } \frac{6}{8}. \text{ Следователно и други максимуми,}$$

чието отношение е $\frac{6}{8}$, ще съвпадат. Това е изпълнено за максимуми с номера 3

и 4 за λ_1 и 9 и 12 за λ_2 [2 т]. Синусите на ъглите, под които те ще се наблюдават са съответно $\sin \theta_{3,4} = 0,275$ и $\sin \theta_{9,12} = 0,875$ [1 т].