

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

[http ://balkanski-foundation.org/](http://balkanski-foundation.org/)

Concours Général de Physique «Minko Balkanski»

12 août 2025

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

La sismologie

Ce problème vous propose d'étudier quelques aspects d'une technique utilisée en géophysique : la sismologie. Dans trois parties largement indépendantes, vous étudierez les ondes longitudinales dans le sol, les détecteurs sismiques et enfin une modélisation simple de la source de ces ondes.

1. Ondes longitudinales

On choisit une modélisation unidimensionnelle du milieu élastique que constitue le sol. Il est décrit par une chaîne infinie de points matériels tous identiques de masse m , repérés par un indice p et reliés par des ressorts de même raideur k (Figure 1).

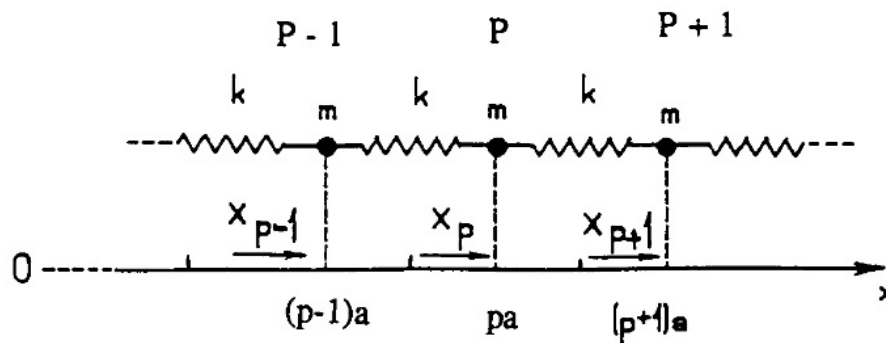


FIGURE 1 – Modèle de milieu élastique

On considère que seules les forces élastiques interviennent et que les mouvements se font uniquement suivant l'axe x . Au repos toutes les masses sont distantes de a . On note x_p le déplacement de la masse d'indice p par rapport à sa position d'équilibre.

1. Déterminer l'équation pilote donnant accès au mouvement de la masse d'indice p .
2. On recherche les solutions sous la forme d'ondes : $x_p = X_0 \cos(Kpa - \omega t)$ avec ω réel. Montrer que la relation entre ω et K est donnée par $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} |\sin(\frac{Ka}{2})|$. Tracer la courbe donnant ω en fonction de K .
3. Comment peut-on interpréter les différentes valeurs de K associées à une valeur donnée de ω ? On s'intéressera à la parité et à la périodicité des valeurs de K .
Dans ces conditions peut-on restreindre le domaine de définition de K ? Déterminer les vitesses de phase et de groupe des ondes longitudinales. Le milieu est-il dispersif?
4. Montrer que la chaîne peut être considérée comme un filtre dont on donnera la nature et la pulsation de coupure ω_c .
5. Dans le cas $\omega > \omega_c$, sous quelle nouvelle forme peut-on chercher x_p ? Commencer par explication qualitative et sans calculs ce qui se passe, ensuite déterminer explicitement la forme de x_p .
6. On s'intéresse maintenant au domaine K faible. Par quelle inégalité entre grandeurs physiques peut-on définir K faible? Que devient la relation liant K à ω ? Que deviennent les vitesses de phase et de groupe, le milieu est-il dispersif? Quel type d'ondes, plus connu, a-t-on trouvé ici?
7. Le modèle précédent peut-il être utilisé pour décrire les vibrations longitudinales d'un réseau cristallin unidimensionnel? Que modélisent alors les masses et les ressorts? Dans un cristal quelles sont les forces en jeu à l'échelle microscopique? Les forces élastiques en constituent-elles une modélisation acceptable?

8. Des études de géophysique sur la propagation des ondes sismiques longitudinales dans le sol terrestre donnent les résultats suivants (Figure 2) pour la vitesse de propagation en fonction de la profondeur. Les fréquences observées étant de l'ordre de 1 à 10 Hz. Que représentent les discontinuités de vitesse, que peut-on en déduire quant à la structure du globe terrestre ?

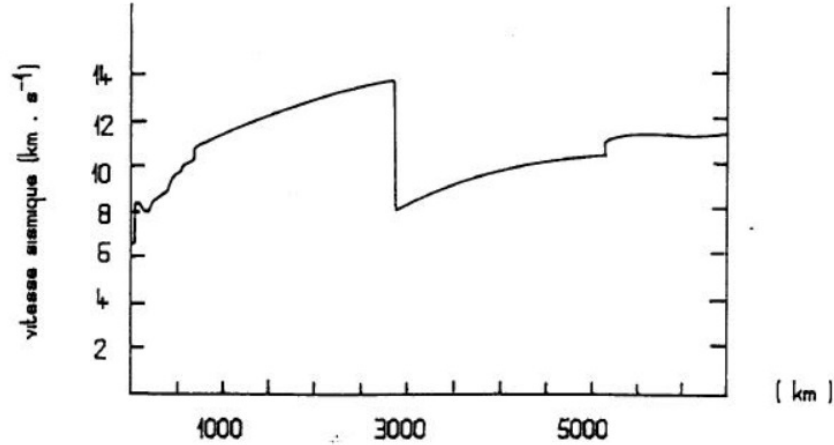


FIGURE 2 – Vitesse de propagation des ondes en fonction de la profondeur

2. Etude du sismographe

Dans toute cette partie, la surface du sol sera considérée comme plane.

Le sismographe est un appareil destiné à enregistrer les vibrations du sol sous l'action d'un séisme. Nous envisageons un mouvement du sol décrit par une vibration verticale :

$$Z_S = Z_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

par rapport à un niveau de référence $Z = 0$ dans un référentiel galiléen.

9. Le sismographe est constitué d'un support rigide de hauteur h auquel on suspend une masse m par l'intermédiaire d'un ressort sans masse, de raideur k . Le ressort prend alors une longueur l_1 (Figure 3). La masse a un mouvement vertical amorti par un frottement fluide, le coefficient de frottement est noté λ .

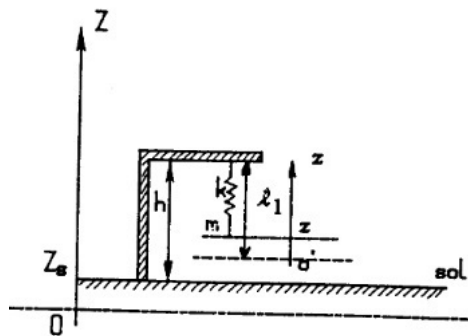


FIGURE 3 – Le sismographe

- (a) Déterminer l'équation pilote donnant le mouvement de la masse m , repérée par la cote $z(t)$.

- (b) Déterminer l'amplitude A du mouvement de la masse m en régime forcé et tracer la courbe donnant $\frac{A}{Z_0}$ en fonction de ω dans le cas où le coefficient d'amortissement vérifie : $\lambda^2 < 2km$.
- (c) L'utilisateur souhaite observer un mouvement dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol. Comment doit-il choisir m et k , la pulsation ω étant fixée? Justifier ce résultat physiquement.
- (d) Les fréquences de vibrations enregistrées étant dans la gamme de 1 à 10 Hz, quelle relation sur m et k obtient-on? Que dire, à l'équilibre, de l'allongement du ressort soumis au seul poids de la masse m ?
10. On introduit la suspension de La Coste.
On définit un trièdre direct $Oxyz$. Dans le plan Oyz , on définit un axe Oz' tel que l'angle $(Oz, Oz') = \alpha$ soit constant. P est un point fixe de Oz' , on note $OP = d$. Dans le plan Oyz , une tige OA de longueur l , de masse négligeable peut tourner sans frottement autour de Ox . En A est fixé un disque homogène de masse m et de rayon R .
Un ressort sans masse, de raideur k , de longueur à vide nulle et assujéti à rester rectiligne relie le point P au point A (Figure 4).

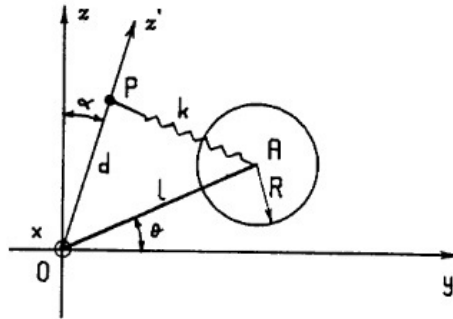


FIGURE 4 – La suspension de La Coste

- (a) Déterminer les valeurs de θ à l'équilibre du système. On envisagera les deux possibilités : $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$. On se limite au domaine : $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \alpha]$
- (b) A quelle condition la position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre? Dans ce cas, quelle est la période des petites oscillations autour de $\theta = 0$? Quelle valeur de α doit-on choisir pour avoir une période de 10s en prenant : $l = 20cm$; $R = 5cm$ et $g = 10m.s^{-2}$?
- (c) On envisage le cas où le disque est libre de tourner autour de l'axe Ax sans frottement. La période du mouvement est-elle changée, quelle est sa valeur?
11. On considère l'enregistrement des mouvements sismiques.
On revient au sismographe décrit au début de cette partie, soumis à la même vibration du sol :

$$Z_S = Z_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

en négligeant le frottement fluide d'origine mécanique de coefficient λ . On suspend à la masse m une bobine de N spires circulaires de rayon a , de masse négligeable, de résistance électrique R et de coefficient d'auto-inductance L . Les extrémités du fil constituant la bobine sont reliées aux points C et D par des fils infiniment souples et sans influence électrique ou mécanique.
La bobine mobile reste toute entière dans l'entrefer d'un aimant d'axe de symétrie Δ créant au niveau des spires un champ magnétique radial de module B constant (Figure 5).

- (a) Les bornes C et D de la bobine étant connectées à une résistance extérieure R_e , quelles sont les équations donnant le mouvement de la masse m et le courant I dans la bobine?
- (b) Rechercher les solutions de ces équations en régime forcé à la pulsation ω . Simplifier le résultat en supposant $L\omega \ll R$.

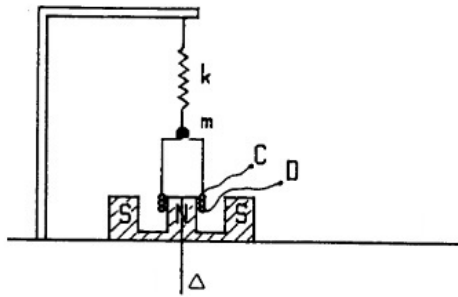


FIGURE 5 – Montage d'enregistrement des mouvements sismiques

- (c) Peut-on dire que la tension $V_s(t)$ entre les bornes C et D est proportionnelle à la vibration du sol $Z_s(t)$? Quelle opération doit-on faire subir au signal électrique pour détecter l'amplitude du mouvement du sol?
- (d) Proposer un montage électrique qui pourra accomplir cette tâche et le justifier.

3. Frottement solide

12. Les tremblements de terre peuvent apparaître lors du glissement de deux plaques tectoniques. On modélise l'une des plaques par un plan solide fixe π , l'autre plaque est modélisée par un ensemble constitué d'une masse M reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide 0 à un support S mobile à la vitesse u constante suivant l'axe x (Figure 6). Le contact entre la masse M et le plan fixe peut être caractérisé par un coefficient de frottement de glissement statique (respectivement dynamique) f_o (respectivement f) avec $f < f_o$.

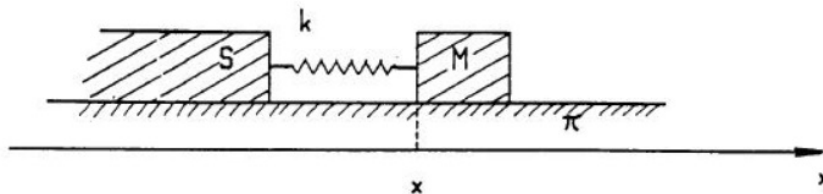


FIGURE 6 – Modèle de frottement solide

- (a) Quelle propriété de la plaque mobile est modélisée par le ressort?
 - (b) Quel est le mouvement $x(t)$ de la masse M en supposant qu'à la date $t = 0$, l'abscisse du support S est nulle, la masse M est à l'abscisse l_0 avec une vitesse nulle. On représentera x en fonction du temps t .
 - (c) Que se passe-t-il dans les deux cas limites suivants :
 $k \rightarrow \infty$
 $f = f_o$
Interpréter les résultats obtenus.
13. Essai de modélisation microscopique.
A l'échelle microscopique, les surfaces ne sont pas planes, on envisage le contact de deux systèmes représentés chacun par une plaque solide et une "pointe" (ici les deux systèmes sont positionnés l'un sur l'autre). Le système 1 est fixe et lors de son déplacement, le système 2 se soulève légèrement pour que la pointe 2 passe au dessus de la pointe 1.
L'interaction des deux pointes est caractérisée par une énergie potentielle d'interaction E_{pi} , fonction de la distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux pointes.

- (a) Dans cette question, on suppose les deux systèmes parfaitement rigides, leurs positions relatives étant repérées par la variable x , on choisit $x = 0$ lorsque les sommets S_1 et S_2 des deux pointes sont face à face. Faire un schéma qui montre les deux systèmes et leurs interactions. Donner l'allure générale de l'énergie potentielle en question. Comment est reliée la force exercée par le système 1 sur le système 2 à cette énergie potentielle ?
- (b) On doit introduire un effet supplémentaire : lors de leur interaction, les systèmes 1 et 2 peuvent subir une légère déformation. Pour simplifier, on considère encore le système 1 comme parfaitement rigide, le sommet S_1 de la pointe 1 reste en $x = 0$.
La plaque 2 étant repérée par x , la pointe S_2 se déplace de X suivant l'axe des x par rapport à la plaque 2, le sommet S_2 venant à l'abscisse $X + x$. La forme de la fonction E_{pi} est supposée inchangée. L'énergie potentielle associée à cette déformation interne au système 2 se met sous la forme : $E_{pe} = \frac{1}{2}kX^2$
Quelle est alors l'énergie potentielle totale du système notée E_{pt} en fonction de E_{pi} , de E_{pe} et des variables x et X ?
- (c) Pour une position x donnée de la plaque 2 par rapport à la plaque 1, déterminer graphiquement X_e correspondant à l'équilibre des deux pointes (on pourra introduire la variable $u = x + X$). Montrer qu'on aboutit à deux situations donnant une ou trois solutions pour X_e suivant les valeurs de certains paramètres.
Discuter qualitativement la stabilité des solutions obtenues dans les deux situations. Tracer l'allure des courbes donnant u à l'équilibre en fonction du paramètre x dans ces deux situations.
14. Quelle force doit-on exercer sur le système 2 pour le maintenir immobile, le système 1 étant toujours fixe ? On exprimera cette force en fonction de E_{pi} et de ses dérivées. Tracer les variations de cette force en fonction de x dans les différentes situations mises en évidence. Quel phénomène voit-on apparaître dans l'une d'elles ?
15. Le système 2 est mis en mouvement par rapport au système 1, la variable x varie lentement de $-\infty$ à $+\infty$. Montrer que le travail de la force de contact entre les deux solides correspond à une aire sur l'un des graphes qui ont été tracés. Montrer que dans l'une des situations envisagées, on peut justifier l'existence d'un frottement de glissement.

———— FIN DE L'ENONCE ————

Part II

English

Seismology

This problem invites you to study some aspects of a technique used in geophysics: seismology. In three largely independent tasks, you will study longitudinal waves in the ground, seismic detectors, and finally a simple modeling of the source of these waves.

1. Longitudinal waves

We choose a one-dimensional model of the elastic medium that constitutes the ground. It is described by an infinite chain of identical point masses m , indexed by p and connected by springs of identical stiffness k (Figure 7).

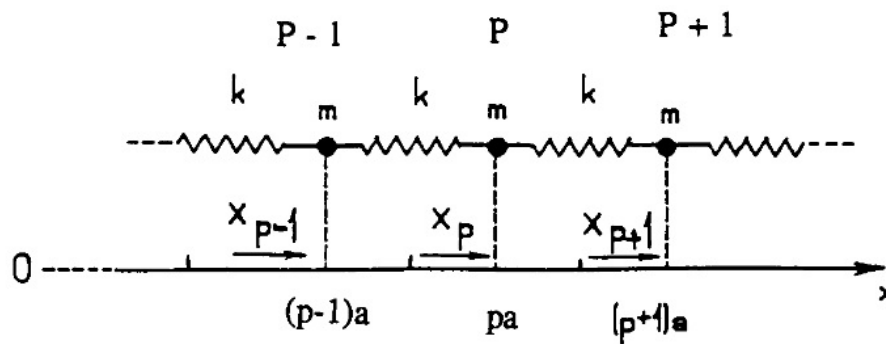


Figure 7 – Model of an elastic medium

We consider that only elastic forces act and that the movements occur solely along the x -axis. At rest, all the masses are separated by distance a . We denote by x_p the displacement of the mass with index p relative to its equilibrium position.

1. Determine the governing equation giving the motion of the mass with index p .
2. We look for solutions in the form of waves: $x_p = X_0 \cos(Kpa - \omega t)$ with ω real. Show the following relation between ω and K : $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}|\sin(\frac{Ka}{2})|$. Plot the curve giving ω as a function of K .
3. How can we interpret the different values of K associated with a given value of ω ? Focus on the parity and periodicity of the values of K .
Under these conditions, can we restrict the domain of definition of K ? Determine the phase and group velocities of the longitudinal waves. Is the medium dispersive?
4. Show that the chain can be considered as a filter, specifying its type and cutoff angular frequency ω_c .
5. In the case $\omega > \omega_c$, in what new form can we look for x_p ? Begin with a qualitative explanation without calculations of what happens, then explicitly determine the form of x_p .
6. We now focus on the low- K domain. By what inequality between physical quantities can we define low K ? What does the relation linking K to ω become? What do the phase and group velocities become? Is the medium dispersive? What type of waves, which are more familiar, have we found here?
7. Can the previous model be used to describe the longitudinal vibrations of a one-dimensional crystal lattice? What do the masses and springs model in this case? In a crystal, what forces are involved at the microscopic scale? Are elastic forces an acceptable model for them?

8. Geophysical studies on the propagation of longitudinal seismic waves in the Earth's ground give the following results (Figure 8) for the propagation velocity as a function of depth, with observed frequencies of the order of 1 to 10 Hz. What do the velocity discontinuities represent, and what can we deduce about the structure of the Earth?

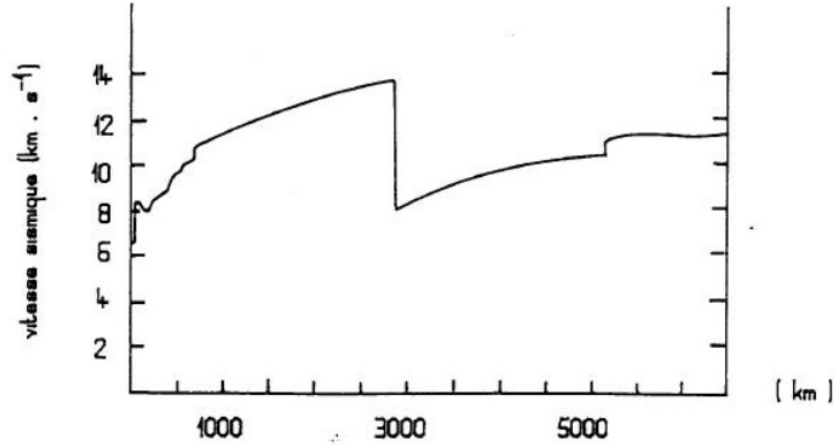


Figure 8 – Propagation velocity of waves as a function of depth

2. Study of the seismograph

In this part, the ground surface will be considered as flat.

The seismograph is a device intended to record ground vibrations caused by an earthquake. We consider a ground motion described by a vertical vibration:

$$Z_S = Z_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

relative to a reference level $Z = 0$ in a Galilean reference frame.

9. The seismograph consists of a rigid support of height h from which a mass m is suspended via a massless spring of stiffness k . The spring then takes on a length l_1 (Figure 9). The mass moves vertically and is damped by fluid friction, with friction coefficient λ .

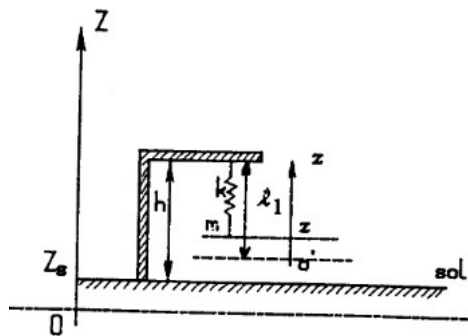


Figure 9 – The seismograph

- Determine the governing equation giving the motion of the mass m , denoted by $z(t)$.
- Determine the amplitude A of the motion of the mass m in forced regime and plot the curve giving $\frac{A}{Z_0}$ as a function of ω in the case where the damping coefficient satisfies $\lambda^2 < 2km$.

- (c) We wish to observe a motion whose amplitude is, as far as possible, equal to the amplitude of the ground motion. How should m and k be chosen, given a fixed angular frequency ω ? Justify this result physically.
- (d) Given that the recorded vibration frequencies are in the range 1 to 10 Hz, what relation between m and k is obtained? At equilibrium, what can we say about the elongation of the spring under the sole weight of the mass m ?
10. We introduce the La Coste suspension.
- We define a direct reference system $Oxyz$. In the Oyz plane, we define an axis Oz' such that the angle $(Oz, Oz') = \alpha$ is constant. P is a fixed point on Oz' , with $OP = d$. In the Oyz plane, a rod OA of length l and negligible mass can rotate without friction around Ox . At point A is fixed a homogeneous disk of mass m and radius R .
- A massless spring of stiffness k , with zero natural length and constrained to remain straight, connects point P to point A (Figure 10).

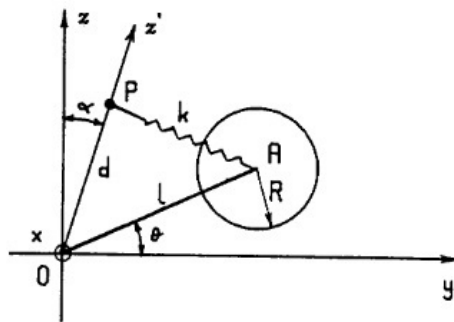


Figure 10 – The La Coste suspension

- (a) Determine the equilibrium values of θ . Consider both possibilities: $\alpha = 0$ and $\alpha \neq 0$. We limit ourselves to the domain $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \alpha]$.
- (b) Under what condition is the position $\theta = 0$ an equilibrium position? In this case, what is the period of small oscillations around $\theta = 0$? What value of α should be chosen to have a period of 10s, taking $l = 20$ cm, $R = 5$ cm, and $g = 10m.s^{-2}$?
- (c) Consider the case where the disk is free to rotate without friction around the Ax axis. Is the period of motion changed, and what is its value?
11. We now consider recording seismic movements.
- Returning to the seismograph described at the start of this section, subjected to the same ground vibration:

$$Z_S = Z_0 \cos(\omega t) \quad (4)$$

neglecting mechanical fluid friction with coefficient λ . A coil of N circular turns of radius a , negligible mass, electrical resistance R , and self-inductance L is suspended from the mass m . The ends of the wire forming the coil are connected to points C and D by infinitely flexible wires with no electrical or mechanical influence.

The moving coil remains entirely within the air gap of a magnet with symmetry axis Δ producing at the location of the turns a radial magnetic field of constant magnitude B (Figure 11).

- (a) With the coil terminals C and D connected to an external resistance R_e , what are the equations describing the motion of the mass m and the current I in the coil?
- (b) Find the solutions to these equations in forced regime at angular frequency ω . Simplify the result assuming $L\omega \ll R$.
- (c) Can we say that the voltage $V_s(t)$ between terminals C and D is proportional to the ground vibration $Z_s(t)$? What operation should be performed on the electrical signal to detect the amplitude of the ground motion?
- (d) Propose an electrical circuit that can accomplish this task and justify it.

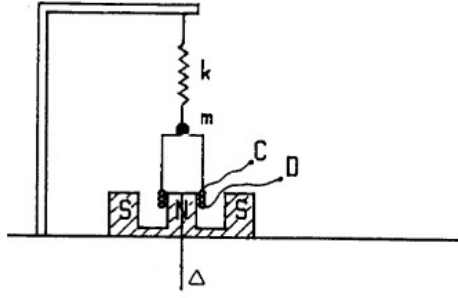


Figure 11 – Setup for recording seismic movements

3. Solid friction

12. Earthquakes can occur when two tectonic plates slide against each other. We model one of the plates by a fixed solid plane π , while the other plate is modeled as a system consisting of a mass M connected by a spring of stiffness k and zero natural length to a support S moving at constant speed u along the x -axis (Figure 12). The contact between mass M and the fixed plane can be characterized by a static (respectively dynamic) sliding friction coefficient f_0 (respectively f) with $f < f_0$.

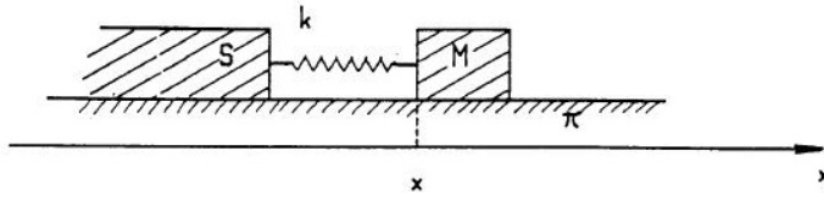


Figure 12 – Solid friction model

- What property of the moving plate is modeled by the spring?
 - What is the motion $x(t)$ of the mass M assuming that at time $t = 0$, the abscissa of the support S is zero, the mass M is at position l_0 with zero velocity? Plot x as a function of time t .
 - What happens in the two following limiting cases:
 $k \rightarrow \infty$
 $f = f_0$
Interpret the results obtained.
13. Attempt at microscopic modeling.
- At the microscopic scale, surfaces are not flat. We consider the contact of two systems, each represented by a solid plate and a "tip" (here the two systems are positioned one on top of the other). System 1 is fixed, and during its motion, system 2 lifts slightly so that tip 2 passes over tip 1.
- The interaction of the two tips is characterized by an interaction potential energy E_{pi} , a function of the distance between the summits S_1 and S_2 of the two tips.
- In this question, we assume both systems are perfectly rigid, with their relative positions denoted by variable x , choosing $x = 0$ when summits S_1 and S_2 of the two tips are facing each other. Make a diagram showing the two systems and their interactions. Give the general shape of the potential energy in question. How is the force exerted by system 1 on system 2 related to this potential energy?

- (b) We must introduce an additional effect: during their interaction, systems 1 and 2 can undergo a slight deformation. To simplify, system 1 is still considered perfectly rigid, with summit S_1 of tip 1 remaining at $x = 0$.
 Plate 2 is located at x , and tip S_2 moves by X along the x -axis relative to plate 2, so that summit S_2 is at position $X + x$. The shape of E_{pi} is assumed unchanged. The potential energy associated with this internal deformation of system 2 is given by: $E_{pe} = \frac{1}{2}kX^2$
 What is then the total potential energy of the system, denoted E_{pt} , as a function of E_{pi} , E_{pe} , and the variables x and X ?
- (c) For a given position x of plate 2 relative to plate 1, determine graphically X_e corresponding to the equilibrium of the two tips (you may introduce the variable $u = x + X$). Show that we arrive at two situations giving one or three solutions for X_e depending on the values of certain parameters.
 Discuss qualitatively the stability of the solutions obtained in the two situations. Plot the general shape of the curves giving u at equilibrium as a function of parameter x in these two situations.
14. What force must be exerted on system 2 to keep it immobile, with system 1 still fixed? Express this force as a function of E_{pi} and its derivatives. Plot the variations of this force as a function of x in the different situations identified. What phenomenon appears in one of them?
15. System 2 is set in motion relative to system 1, with variable x varying slowly from $-\infty$ to $+\infty$. Show that the work of the contact force between the two solids corresponds to an area on one of the plotted graphs. Show that in one of the situations considered, we can justify the existence of sliding friction.

————— **END OF PAPER** —————