

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

[http ://balkanski-foundation.org/](http://balkanski-foundation.org/)

Concours Général de Physique «Minko Balkanski»

8 août 2024

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème 1. Le vent à l'échelle des prévisions météorologiques nationales

L'air qui constitue l'atmosphère terrestre est concentré dans une couche d'une dizaine de kilomètres d'épaisseur au-dessus du sol : la troposphère.

On considère cet air comme un fluide constitué de domaines élémentaires dont les dimensions horizontales sont en France de quelques dizaines de kilomètres et les dimensions verticales d'une dizaine de mètres.

La première partie de ce problème présente différents modèles d'équilibre de l'atmosphère. La deuxième partie décrit les mouvements horizontaux et verticaux de cette atmosphère à grande échelle et présente le modèle dit du vent géostrophique.

Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un gaz parfait.

Vitesse horizontale du vent	V_h	$10ms^{-1}$
Vitesse verticale du vent	V_z	$10^{-2}ms^{-1}$
Échelle de temps des mouvements verticaux et horizontaux	τ	10^5s
Échelle des gradients horizontaux de pression	$ \nabla_h P $	$10^{-3}Nm^{-3}$

Table 1 : Échelles caractéristiques de l'atmosphère aux latitudes moyennes ($\phi \approx 45^\circ$)

Données numériques

Constante des gaz parfaits : $R = 8.3Jmol^{-1}K^{-1}$

Pression atmosphérique au niveau de la mer : $P_0 = 10^5Pa$

Masse molaire de l'air : $M_a = 29g \cdot mol^{-1}$

Rayon de la Terre : $r_T = 6.4 \cdot 10^3km$

Accélération de la pesanteur en France : $g = 9.8ms^{-2}$

Latitude typique de la France : $\phi = 45^\circ$

1. Modèles d'équilibre de l'atmosphère

On considère de l'air en équilibre dans le référentiel terrestre R . Chaque élément de ce fluide est donc en équilibre sous l'action des forces extérieures à cet élément, qui sont de deux types : les forces de pression et la force due au champ de pesanteur.

1. L'air étant considéré comme un gaz parfait, calculer sa masse volumique $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$ dans les conditions normales de température $T_0 = 273K$ et de pression $P = P_0$.
2. On choisit dans R un repère orthonormé. L'état de l'atmosphère est caractérisé par les champs de pression $P(x, y, z)$ et de température $T(x, y, z)$:
 - (a) Écrire la condition d'équilibre mécanique de l'air soumis aux forces de pression et au champ de pesanteur, supposé localement uniforme.
 - (b) En déduire que P ne dépend que de z et établir l'équation permettant de déterminer $P(z)$ en fonction de M_a, P, g, T et de la constante des gaz parfaits R .
3. On considère dans un premier temps l'atmosphère en équilibre isotherme.
 - (a) Justifier que la pression varie avec l'altitude z selon une loi du type :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (1)$$

où H est une longueur nommée hauteur d'échelle de l'atmosphère que l'on explicitera en fonction de M_a, R, g et T . Calculer la hauteur d'échelle H_0 de l'atmosphère isotherme à $T_0 = 273K$.

- (b) L'hypothèse d'une température uniforme est-elle justifiée ?
4. On considère maintenant l'atmosphère en équilibre adiabatique caractérisé à toute altitude par la relation $P = K\rho^\gamma$ où K est une constante et $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4$ est le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants des gaz parfaits diatomiques.
- (a) Discuter comment nous pouvons trouver la forme explicite de $P(z)$ et de $T(z)$. Admettons pour la suite que leurs formes explicites sont les suivantes :

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{\frac{\gamma}{\gamma-1} H_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2)$$

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{\frac{\gamma}{\gamma-1} H_0}\right) \quad (3)$$

- (b) Calculer numériquement le gradient vertical de température en Kkm^{-1} correspondant à ce modèle d'atmosphère en équilibre adiabatique.
- (c) Représenter graphiquement les allures des variations de la pression et de son gradient en fonction de l'altitude. (L'allure générale est demandée et non pas l'allure précise!)
- (d) Calculer numériquement ce gradient de pression pour $z = 0, 2500$ et $5000m$.
- (e) À partir des gradients de pression trouvés, donner un ordre de grandeur de l'échelle de la dimension verticale L_z sur laquelle la pression varie de $100Pa$.
- (f) Exprimer le rapport des masses volumiques de l'air $\rho(P, T)/\rho(P_0, T_0)$ en fonction de z, H_0 et γ . Calculer ρ à $2500m$ d'altitude.

2. Dynamique des mouvements atmosphériques à l'échelle synoptique : le vent géostrophique

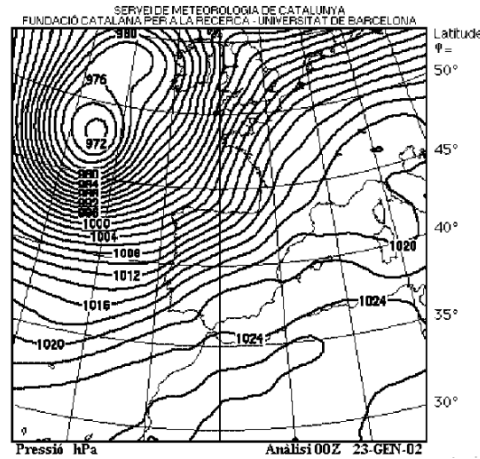


FIGURE 1 – Lignes isobares

5. La Figure 1 représente les lignes isobares, cotées en hPa et tracées de $2hPa$ en $2hPa$, au niveau de la mer en Europe de l'Ouest, le 23 janvier 2002 à 0h.
- (a) Déterminer sur cette carte de pression la valeur du gradient de pression horizontal à Bordeaux. Comparer à la donnée de la Table 1. Dorénavant, la valeur du gradient horizontal de pression utilisée dans les applications numériques sera celle donnée par cette Table 1.
- (b) Sachant qu'on attribue habituellement aux domaines élémentaires des dimensions horizontales L_h telles que la pression horizontale varie en moyenne de $100Pa$, déterminer un ordre de grandeur de L_h .

Dans la suite du problème, nous nous placerons à cette échelle.

6. (a) Donner l'expression du champ de gravitation terrestre $\vec{g}^*(\vec{r})$ en un point repéré par $\vec{r}$ par rapport au centre de la Terre, assimilée à une sphère homogène de masse M_T . On désignera par G la constante de gravitation universelle.
- (b) Proposer une expression donnant la variation avec l'altitude z du module $g^*(z) = \|\vec{g}^*\|$ en fonction du rapport $\frac{z}{r_T}$ et de $g^*(0)$. Quelle est l'erreur relative commise à 2500m d'altitude si l'on remplace $g^*(z)$ par $g_0^* = g^*(0)$.
7. Soit R_0 le référentiel barycentrique terrestre, géocentrique, que l'on considérera comme galiléen, et soit R_l le référentiel terrestre local, dont l'origine O a pour latitude ϕ (Figure 2). On choisit Ox tangent au parallèle passant par O et dirigé vers l'Est, Oy tangent au méridien passant par O et dirigé vers le Nord. Le référentiel R_l est animé par rapport à R_0 d'un mouvement de rotation diurne uniforme de vitesse angulaire ω .

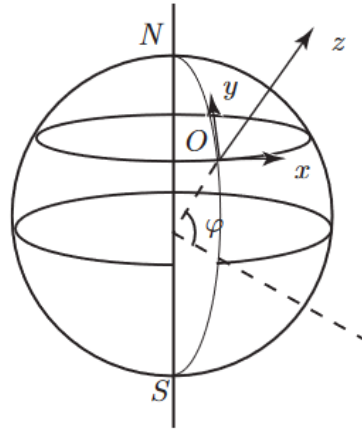


FIGURE 2 – Référentiel

- (a) Préciser dans R_l la direction de l'accélération d'entraînement $\vec{\Gamma}_E(\vec{r})$. Pour un point d'altitude z à la verticale de O , établir l'expression de son module $\Gamma_E(z)$ en fonction de ω, z, r_T et ϕ . Quelle est l'erreur relative commise sur Γ_E à 2500m d'altitude si l'on remplace $\Gamma_E(z)$ par $\Gamma_{E0} = \Gamma_E(0)$. Calculer la valeur typique de Γ_{E0} en France.
- (b) Soit $\vec{g}(\vec{r})$ le champ de pesanteur local, dont la direction est donnée par celle d'un fil à plomb. Dédurre des résultats précédents la relation entre le champ de pesanteur $\vec{g}(\vec{r})$, le champ de gravitation terrestre $\vec{g}^*(\vec{r})$ et l'accélération d'entraînement $\vec{\Gamma}_E(\vec{r})$. Justifier l'hypothèse d'un champ de pesanteur localement uniforme $\vec{g}$ utilisée en 1.
- (c) Une particule de masse m se déplace à la vitesse $\vec{V}$ dans R_l . Donner l'expression de l'accélération d'inertie due à la vitesse $\vec{\Gamma}_C$ en fonction de $\vec{V}$ et $\vec{\omega}$. Exprimer cette force d'inertie $\vec{F}_C$ dans $Oxyz$ en fonction de m, ω , de la latitude ϕ et des composantes (V_x, V_y, V_z) de $\vec{V}$.
8. Sur l'air atmosphérique en mouvement s'exercent les forces de pesanteur, d'inertie due à la vitesse et de gradient de pression. Écrire l'équation vectorielle du mouvement d'un domaine particulière. En déduire les trois équations donnant les coordonnées de l'accélération locale $\vec{\Gamma} = \vec{A}$ dans $Oxyz$.
9. On se propose tout d'abord d'étudier les mouvements verticaux de l'air dans le cadre du modèle d'atmosphère en équilibre adiabatique.
 - (a) Évaluer les ordres de grandeur des différents termes situés dans le second membre de l'équation du mouvement vertical, en utilisant les résultats trouvés à la question 4.d) lorsqu'on se place à 2500m d'altitude, pour une latitude $\phi = 45^\circ$ et un vent de l'ordre de $10ms^{-1}$. Que peut-on en déduire sur l'importance de la composante verticale de la force d'inertie due à la vitesse?
 - (b) Les observations montrent qu'en dehors de très brèves périodes d'adaptation aux perturbations verticales, les ascendances ou descendances sont particulièrement stables dans le temps. Que peut-on en conclure concernant l'amplitude de l'accélération verticale? À partir des données de la Table 1, estimer l'ordre de grandeur de l'accélération verticale. En effectuant alors les

simplifications légitimes, à quoi se réduit l'équation du mouvement vertical de l'air ? Conclure quant aux résultats de la partie 1.

10. On étudie maintenant les mouvements horizontaux de l'air en se plaçant à $2500m$ d'altitude.
- En s'appuyant sur les données de la Table 1, simplifier les équations du mouvement horizontal. On définit le paramètre de Coriolis k par $k = 2\omega \sin\phi$: quelles sont ses valeurs numériques respectives à des latitudes de 45° dans les hémisphères Nord et Sud.
 - On définit la vitesse relative horizontale par $\vec{V}_h = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$. Montrer que la force de Coriolis horizontale (celle qui porte le paramètre k) par unité de masse peut s'exprimer sous la forme : $\vec{f}_{Ch} = -k(\vec{e}_z \wedge \vec{V}_h)$. Que peut-on en conclure sur l'orientation du vecteur $\vec{f}_{Ch}$ par rapport au vecteur $\vec{V}_h$ dans les hémisphères Nord et Sud ?
 - Calculer le module de la force horizontale de Coriolis rapportée à l'unité de masse $\vec{f}_{Ch}$ à une altitude de $2500m$ pour laquelle le vent a une vitesse horizontale de $15ms^{-1}$ à une latitude de 45° . En prenant comme gradient horizontal de pression à la même altitude celui donné par la Table 1, calculer le module de la force de pression horizontale par unité de masse $\vec{f}_{Ph}$.
 - De façon générale, les observations montrent que les accélérations tangentielles subies par les domaines particuliers dans leurs mouvements horizontaux sont toujours très faibles dans les grands mouvements atmosphériques sous nos latitudes moyennes. De même les accélérations normales sont en général très petites sauf à l'avant des dépressions mobiles. En vous appuyant sur les données de la Table 1, estimer l'ordre de grandeur des modules des quantités $\vec{f}_{Ch}$, $\vec{f}_{Ph}$ et de l'accélération horizontale $\vec{\Gamma}_h = \vec{A}_h$. Que peut-on en conclure pour la valeur de la somme vectorielle $\vec{f}_{Ph} + \vec{f}_{Ch}$?
11. On appelle vent géostrophique le vent fictif de vitesse horizontale $\vec{V}_g$ vérifiant identiquement l'équation $\vec{f}_{Ph} + \vec{f}_{Ch} = 0$.
- Montrer que ce vent est entièrement déterminé par la connaissance de la distribution spatiale de pression et exprimer son champ de vitesse $\vec{V}_g$ à l'aide du gradient horizontal de pression $\vec{\nabla}_h(P)$.
 - Quelle est la valeur de l'accélération Γ_g et la nature locale de la trajectoire des particules constituant le vent géostrophique ? Préciser sur un schéma les orientations respectives de $\vec{V}_g$, $\vec{f}_{Ph}$ et $\vec{f}_{Ch}$ dans les hémisphères Nord et Sud.
 - Compte tenu des ordres de grandeurs donnés dans la Table 1, vérifier que, pour la latitude de 45° , le module V_g de la vitesse géostrophique est égal à V_h . Définir à l'aide de la figure 3 la fourchette de latitude pour laquelle l'écart relatif $\frac{|V_g - V_h|}{V_h}$ reste inférieur à 30%.

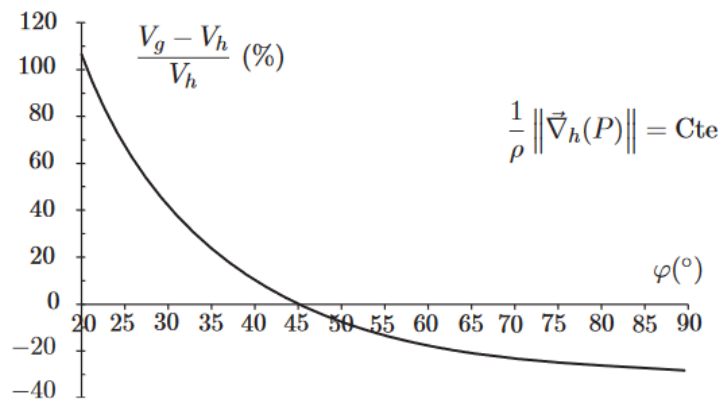


FIGURE 3 – Écart relatif en fonction de la latitude

- En déduire les deux conditions nécessaires pour que le vent géostrophique soit une bonne approximation $\vec{V}_g \approx \vec{V}_h$ du vent réel. Ces conditions sont-elles vérifiées aux latitudes équatoriales ($\phi < 20^\circ$) ?

Problème 2. Purification des eaux par décantation en bassin

Le but de ce problème est d'étudier de façon simplifiée quelques étapes du traitement des eaux de rivière afin de les rendre potables. Les débris les plus gros peuvent facilement être éliminés par une filtration sur grille, mais il semble plus difficile d'ôter les particules de petite taille ou dissoutes. Dans l'ordre chronologique, quelques étapes du parcours de l'eau en usine de traitement : dans un premier temps on est concerné par la purification par décantation en bassin qui permet d'éliminer les particules de taille supérieure à une dizaine de micromètres et, après coagulation, les particules colloïdales dont la taille inférieure à quelques micromètres. Certaines molécules ne pouvant être éliminées par simple décantation, il faut utiliser l'adsorption moléculaire par le charbon actif en poudre. Finalement, on traite les problèmes de mise à l'équilibre de calcification de l'eau.

La décantation est un procédé qui permet l'élimination de particules en suspension dans l'eau grâce à l'action de la gravité. Les particules se déposent au fond d'un bassin et forment une boue qui pourra être évacuée ultérieurement. On supposera qu'une fois déposées, les particules ne reviennent pas en suspension. L'eau à décanter remplit un bassin de profondeur H ; l'axe vertical, orienté vers le haut, est noté Oz et son origine est placée au fond du bassin.

La viscosité cinématique de l'eau à $10^\circ C$ vaut $\nu = 1.31 \times 10^{-6} SI$.

1. Donner l'expression de la force subie par un solide de volume V plongé dans un liquide de masse volumique μ . A quelle condition une particule de masse volumique μ_{sol} pourra-t-elle se déposer sur le fond du bassin de décantation, en supposant que l'eau du bassin est immobile ?
2. Une particule sphérique de rayon R , en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide immobile, subit une force de frottement, dite force de Stokes, donnée par $\vec{F}_S = -6\pi\mu\nu R\vec{v}$, où μ et ν sont respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide. Quelle est la dimension de ν ? Montrer que la particule atteint une vitesse limite v_d , dite vitesse de décantation, que l'on exprimera en fonction de R , ν , g et de la densité $d = \frac{\mu_{sol}}{\mu}$.
3. Calculer la vitesse de décantation de particules de sable de rayons $R = 50\mu m$, $5\mu m$ et $0.5\mu m$, et de masse volumique $\mu_{sol} = 2.65 gcm^{-3}$. Quel temps leur faut-il pour parcourir un mètre ? Que penser de la décantation comme moyen d'élimination des particules en suspension ?

———— FIN DE L'ENONCE ————

Part II

English

Task 1. Wind at the national weather forecast scale

The air that makes up the Earth's atmosphere is concentrated in a layer about ten kilometers thick: the troposphere.

This air is considered to be a fluid made up of elementary domains whose horizontal dimensions in France are about a few dozen kilometers and its vertical dimensions about ten meters.

The first part of this problem presents different models of atmospheric equilibrium. The second part describes the horizontal and vertical movements of this atmosphere on a large scale and presents the so-called geostrophic wind model.

Throughout the problem, air will be considered as an ideal gas.

Horizontal velocity of the wind	V_h	$10ms^{-1}$
Vertical velocity of the wind	V_z	$10^{-2}ms^{-1}$
Timescale of horizontal and vertical movements	τ	10^5s
Scale of horizontal pressure gradients	$ \nabla_h P $	$10^{-3}Nm^{-3}$

Table 1: Characteristics of the atmosphere at medium latitudes ($\phi \approx 45^\circ$)

Some numerical values

Ideal gas constant: $R = 8.3Jmol^{-1}K^{-1}$

Atmospheric pressure at sea level: $P_0 = 10^5Pa$

Molar mass of air: $M_a = 29g \cdot mol^{-1}$

Radius of the Earth: $r_T = 6.4 \cdot 10^3km$

Gravitational acceleration in France: $g = 9.8ms^{-2}$

Typical latitude of France: $\phi = 45^\circ$

1. Atmospheric equilibrium models

We consider air in equilibrium in the terrestrial reference frame R . Each element of this fluid is therefore in equilibrium under the action of forces external to this element, which are of two types: pressure forces and the force due to the gravitational field.

1. Air being an ideal gas, calculate its density $\rho_0 = \rho(P_0, T_0)$ under normal conditions - temperature $T_0 = 273K$ and pressure $P = P_0$.
2. We choose an orthonormal reference system in R . The state of the atmosphere is characterized by the pressure fields $P(x, y, z)$ and temperature fields $T(x, y, z)$:
 - (a) Write the mechanical equilibrium condition of air subjected to pressure forces and the gravity field, assumed to be locally uniform.
 - (b) Deduce that P only depends on z and establish the equation allowing us to determine $P(z)$ as a function of M_a, P, g, T and the ideal gas constant R .
3. We first consider the atmosphere in isothermal equilibrium.
 - (a) Justify that the pressure varies with the altitude z according to a law of the type

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (4)$$

where H is a length called the scale height of the atmosphere to be expressed as a function of M_a, R, g and T . Calculate the scale height H_0 of the isothermal atmosphere at $T_0 = 273K$.

- (b) Is the assumption of uniform temperature justified?

4. We now consider the atmosphere in adiabatic equilibrium characterized at any altitude by the relation $P = K\rho^\gamma$ where K is a constant and $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4$ is the ratio of the heat capacities at constant pressure and volume of ideal diatomic gases.

- (a) Discuss how we can find the explicit form of $P(z)$ and $T(z)$. From now on we assume that their explicit forms are:

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{\frac{\gamma}{\gamma-1} H_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5)$$

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{\frac{\gamma}{\gamma-1} H_0}\right) \quad (6)$$

- (b) Numerically calculate the vertical temperature gradient in Kkm^{-1} corresponding to this model of atmosphere in adiabatic equilibrium.
- (c) Trace the general appearances of the pressure variations and its gradient as a function of altitude. (The general appearance is requested and not the precise one!)
- (d) Numerically calculate the pressure gradient for $z = 0, 2500$ and $5000m$.
- (e) From the pressure gradients found, give an order of magnitude of the scale of the vertical dimension L_z on which the pressure varies by $100Pa$.
- (f) Express the ratio of the air densities $\rho(P, T)/\rho(P_0, T_0)$ as a function of z, H_0 and γ . Calculate ρ at $2500m$ altitude.

2. Dynamics of atmospheric movements: the geostrophic wind

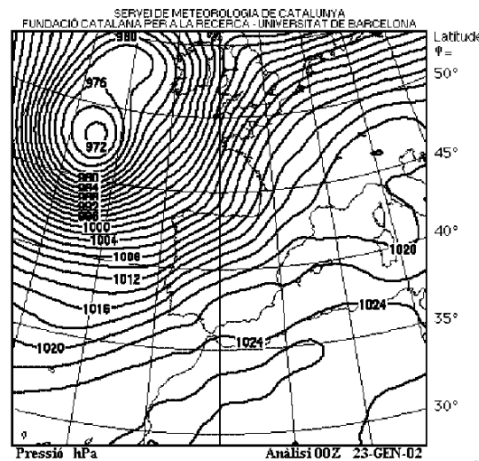


Figure 4 – Isobaric lines

5. Figure 4 shows the isobaric lines in hPa and separated by $2hPa$ each, at sea level in Western Europe on 23 January 2002 at midnight.

- (a) Determine on this pressure map the value of the horizontal pressure gradient in Bordeaux. Compare with the data in Table 1. From now on, the value of the horizontal pressure gradient used in numerical applications will be that given by Table 1.
- (b) Knowing that we usually attribute horizontal dimensions L_h to elementary domains such that the horizontal pressure varies on average by $100Pa$, determine an order of magnitude of L_h .

In the rest of the problem, we analyse on this scale.

6. (a) Give the expression of the Earth's gravitational field $\vec{g}^*(\vec{r})$ at a point identified by $\vec{r}$ relative to the center of the Earth, assumed to be a homogeneous sphere of mass M_T . We will denote by G the universal gravitational constant.
- (b) Propose an expression giving the variation with altitude z of the module $g^*(z) = \|\vec{g}^*\|$ as a function of the ratio $\frac{z}{r_T}$ and $g^*(0)$. What is the relative error committed at $2500m$ altitude if we replace $g^*(z)$ by $g_0^* = g^*(0)$.

7. Let R_0 be the terrestrial barycentric, geocentric reference frame, which we will consider as Galilean, and let R_l be the local terrestrial reference frame, whose origin O has latitude ϕ (Figure 5). We choose Ox tangent to the parallel passing through O and directed towards the East, Oy tangent to the meridian passing through O and directed towards the North. The reference frame R_l is in motion with respect to R_0 by a uniform diurnal rotation movement of angular velocity ω .

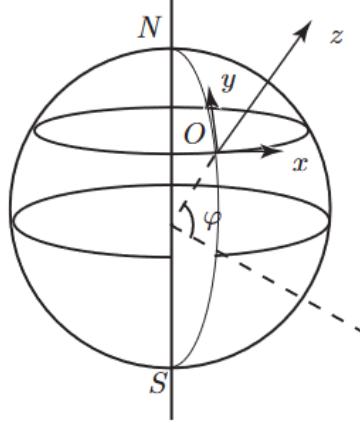


Figure 5 – Reference frames

- (a) Specify in R_l the direction of the resulting acceleration $\vec{\Gamma}_E(\vec{r})$. For a point of altitude z vertically above O , establish the expression of its modulus $\Gamma_E(z)$ as a function of ω, z, r_T and ϕ . What is the relative error made on Γ_E at 2500m altitude if we replace $\Gamma_E(z)$ by $\Gamma_{E0} = \Gamma_E(0)$. Calculate the typical value of Γ_{E0} in France.
 - (b) Let $\vec{g}(\vec{r})$ be the local effective gravitational field, whose direction is given by that of a freely hanging pendulum. Deduce from the previous results the relationship between the gravitational field $\vec{g}(\vec{r})$, the terrestrial gravitational field $\vec{g}^*(\vec{r})$ and the resulting acceleration $\vec{\Gamma}_E(\vec{r})$. Justify the hypothesis of a locally uniform gravitational field $\vec{g}$ used in 1.
 - (c) A particle of mass m moves at speed $\vec{V}$ in R_l . Give the expression for the inertial acceleration due to that speed $\vec{\Gamma}_C$ as a function of $\vec{V}$ and $\vec{\omega}$. Express this inertial force $\vec{F}_C$ in $Oxyz$ as a function of m, ω , of latitude ϕ and of the components (V_x, V_y, V_z) of $\vec{V}$.
8. The forces of gravity, inertia and pressure gradient act on moving atmospheric air. Write the vector equation of motion of a particle domain. Deduce the three equations giving the coordinates of the local acceleration $\vec{\Gamma} = \vec{A}$ in $Oxyz$.
9. We first propose to study the vertical movements of air within the framework of the adiabatic equilibrium atmosphere model.
- (a) Evaluate the orders of magnitude of the different terms located in the second term of the equation of vertical motion, using the results found in question 4.d) when placed at an altitude of 2500m, for a latitude of $\phi = 45^\circ$ and a wind of the order of $10ms^{-1}$. What can we deduce from this about the importance of the vertical component of the inertial force due to speed?
 - (b) Observations show that apart from very brief periods of adaptation to vertical disturbances, the updrafts or downdrafts are particularly stable over time. What can we conclude from this concerning the amplitude of the vertical acceleration? From the data in Table 1, estimate the order of magnitude of the vertical acceleration. By then making the legitimate simplifications, what does the equation of vertical air motion reduce to? Conclude with regard to the results of Part 1.
10. We now study the horizontal movements of the air by placing ourselves at an altitude of 2500m.
- (a) Based on the data in Table 1, simplify the equations of horizontal motion. We define the Coriolis parameter k by $k = 2\omega \sin\phi$: what are its respective numerical values at latitudes of 45° in the Northern and Southern hemispheres.

- (b) The horizontal relative velocity is defined by $\vec{V}_h = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$. Show that the horizontal Coriolis force (the one carrying the parameter k) per unit mass can be expressed in the form: $\vec{f}_{Ch} = -k(\vec{e}_z \wedge \vec{V}_h)$. What can we conclude about the orientation of the vector $\vec{f}_{Ch}$ relative to the vector $\vec{V}_h$ in the Northern and Southern hemispheres?
- (c) Calculate the modulus of the horizontal Coriolis force per unit mass $\vec{f}_{Ch}$ at an altitude of $2500m$ for which the wind has a horizontal speed of $15ms^{-1}$ at a latitude of 45° . Taking as the horizontal pressure gradient at the same altitude that given by Table 1, calculate the modulus of the horizontal pressure force per unit mass $\vec{f}_{Ph}$.
- (d) In general, observations show that the tangential accelerations undergone by the particle domains in their horizontal movements are always very small in the large atmospheric movements in our mid-latitudes. Similarly, normal accelerations are generally very small except in front of moving depressions. Using the data in Table 1, estimate the order of magnitude of the moduli of the quantities $\vec{f}_{Ch}$, $\vec{f}_{Ph}$ and of the horizontal acceleration $\vec{\Gamma}_h = \vec{A}_h$. What can we conclude for the value of the vector sum $\vec{f}_{Ph} + \vec{f}_{Ch}$?
11. The fictitious wind with horizontal speed $\vec{V}_g$ which identically satisfies the equation $\vec{f}_{Ph} + \vec{f}_{Ch} = 0$ is called geostrophic wind.
- (a) Show that this wind is entirely determined by knowledge of the spatial distribution of pressure and express its velocity field $\vec{V}_g$ using the horizontal pressure gradient $\vec{\nabla}_h(P)$.
- (b) What is the value of the acceleration Γ_g and the local nature of the trajectory of the particles constituting the geostrophic wind? Specify on a diagram the respective orientations of $\vec{V}_g$, $\vec{f}_{Ph}$ and $\vec{f}_{Ch}$ in the Northern and Southern hemispheres.
- (c) Given the orders of magnitude in Table 1, verify that, for the latitude of 45° , the module V_g of the geostrophic velocity is equal to V_h . Define using Figure 6 the latitude range for which the relative deviation $\frac{|V_g - V_h|}{V_h}$ remains less than 30%.

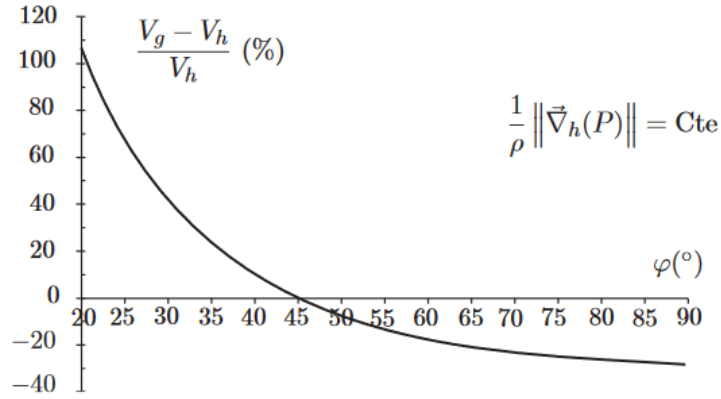


Figure 6 – Relative deviation as a function of latitude

- (d) Deduce the two conditions necessary for the geostrophic wind to be a good approximation $\vec{V}_g \approx \vec{V}_h$ of the real wind. Are these conditions verified at equatorial latitudes ($\phi < 20^\circ$)?

Task 2. Water purification by settling

The aim of this problem is to study in a simplified way some stages of the treatment of river water in order to make it drinkable. The largest debris can easily be eliminated by filtration on a grid, but it seems more difficult to remove small or dissolved particles. In chronological order, some stages of the water's journey in the treatment plant: firstly, we are concerned with purification by decantation in a basin which eliminates particles larger than ten micrometers and, after coagulation, colloidal particles smaller than a few micrometers. Since some molecules cannot be eliminated by simple decantation, molecular adsorption by powdered activated carbon must be used. Finally, we deal with the problems of balancing

the calcification of the water.

Decantation is a process that allows the elimination of particles suspended in water through the action of gravity. The particles settle at the bottom of a basin and form a sludge that can be evacuated later. It will be assumed that once deposited, the particles do not return to suspension. The water to be decanted fills a basin of depth H ; the vertical axis, oriented upwards, is noted Oz and its origin is placed at the bottom of the basin.

The kinematic viscosity of water at $10^\circ C$ is $\nu = 1.31 \times 10^{-6} SI$.

1. Give the expression for the force experienced by a solid of volume V immersed in a liquid of density μ . Under what conditions will a particle of density μ_{sol} be able to settle on the bottom of the settling basin, assuming that the water in the basin is immobile?
2. A spherical particle of radius R , moving at speed $\vec{v}$ in a stationary fluid, is subjected to a friction force, called the Stokes force, given by $\vec{F}_S = -6\pi\mu\nu R\vec{v}$, where μ and ν are the density and kinematic viscosity of the fluid, respectively. What is the dimension of ν ? Show that the particle reaches a limiting speed v_d , called the settling speed, which will be expressed as a function of R , ν , g and the density $d = \frac{\mu_{sol}}{\mu}$.
3. Calculate the settling speed of sand particles of radii $R = 50\mu m$, $5\mu m$ and $0.5\mu m$, and density $\mu_{sol} = 2.65 gcm^{-3}$. How long do they take to travel one meter? What should we think of settling as a means of eliminating suspended particles?

————— **END OF PAPER** —————