INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://balkanski-foundation.org/

Concours Général de Physique «Minko Balkanski»

27 août 2022

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème 1. La technique *Patch Clamp*

Inventé par E. Neher et B. Sakmann, le patch-clamp (ou l'électrophysiologie cellulaire) est la technique de référence pour l'étude électrophysiologique des canaux ioniques. Chaque canal est traversé par un flux ionique élevé (de l'ordre de 10^6 ions/seconde) et génère un courant électrique. Le patch-clamp consiste donc à enregistrer l'activité électrique d'une membrane cellulaire.

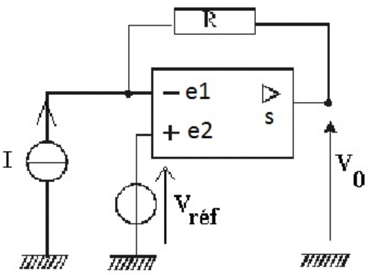
Préliminaires

La loi d'Ohm

On considère un milieu homogène conducteur de conductivité électrique σ. Une charge, de masse m et de charge q, est susceptible de se déplacer librement à l'interieur de ce matériau, mais subit au cours de son mouvement de nombreux chocs que l'on modélise globalement par une force de frottement du type $\overrightarrow{f_{fr}} = -\alpha\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la charge et α une constante positive. On suppose que le matériau étudié est placé dans un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_x}$ où $E = constante$. La charge subit alors une force électrique $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$. On négligera les forces de pesanteur.

1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation vérifiée par la vitesse $\overrightarrow{v}$ et par l'accélération $\overrightarrow{a}$.
2. Préciser la vitesse limite $\overrightarrow{v_\infty}$ atteinte par la charge et le temps caractéristique τ du régime transitoire.
3. Sachant que le matériau possède n charges mobiles par unité de volume, en déduire le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ en fonction de $n, q, \alpha, \overrightarrow{E}$, lorsque le régime permanent est atteint.
4. Rappeler la loi d'Ohm et la présenter sous sa forme locale. En déduire que la conductivité du matériau vaut $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$.
5. Montrer que la force $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$ est une force conservative. Préciser l'expression de l'énergie potentielle E_p. On prendra $E_p(x = 0) = 0$. En déduire l'expression du potentiel $V(x)$ en fonction de E et x.
6. Une portion de ce conducteur de section S et de longueur L est soumise à une difference de potentiel U. En déduire que la résistance R de cette portion vaut $R = \frac{L}{\sigma S}$.

Conversion intensité-tension par un montage amplificateur opérationnel

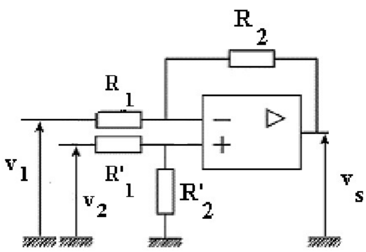


L'amplificateur opérationnel (AO) est supposé parfait et fonctionne en régime linéaire. Admettons que dans ce régime $v_{e1} = v_{e2}$ - le potentiel à l'entré 1 est égal au potentiel à l'entré 2, et $i_{e1} = i_{e2} = i_s = 0$, les courants entrants et sortants de l'AO sont nuls. Sur le schéma on voit une source de courant et une source de tension.

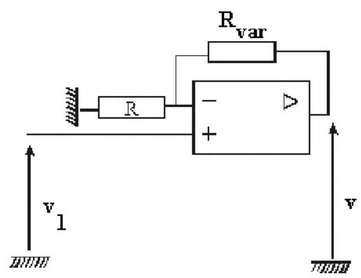
7. Exprimer la tension de sortie V_0 en fonction de l'intensité du courant i, de la tension de réference V_{ref} et de R.

Montage soustracteur et amplificateur

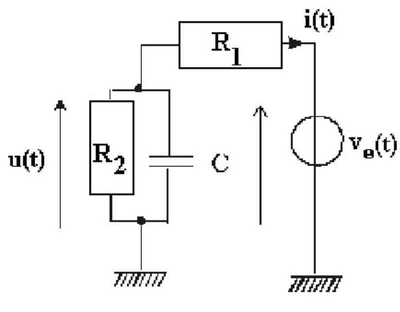
Comme dans la question précedente - on suppose que l'AO est parfait et fonctionne en régime linéaire.



8. Exprimer la tension de sortie v_s en fonction de v_1 et de v_2 ainsi que des différentes résistances. Le montage est présenté sur la figure en dessus.
9. Que se passe-t-il si les quatre résistances sont identiques ?
10. L'AO est à nouveau supposé parfait et fonctionnant en régime linéaire. Déterminer la tension v en fonction de v_3, R et R_{var}. Donner un nom à ce montage. Le montage est présenté sur la figure au-dessous.



Étude d'un régime transitoire

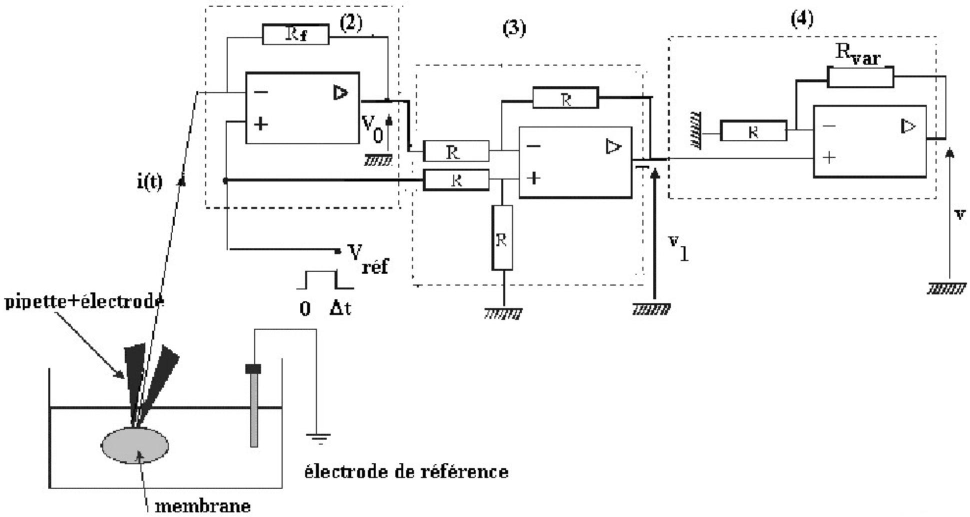


Nous considerons le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C, initialement déchargé, de deux résistances R_1 et R_2, alimenté par un générateur délivrant un signal variable dans le temps $v_e(t)$. Nous allons appliquer à ce circuit une stimulation d'amplitude $\Delta V = V_{ref} > 0$ et de durée Δt, c'est-à-dire $v_e(t)$ va varier dans le temps suivant cette loi.

11. Donner l'allure de $v_e(t)$.
12. Exprimer $i(t = 0^+)$ en fonction de v_{ref} et R_1. (0^+ vaut dire le moment juste après $t = 0$)
13. Exprimer $i(t = \Delta t^-)$ en fonction de v_{ref}, R_1 et R_2. On suppose Δt suffisament grand pour que le circuit ait atteint un régime permanent à l'instant Δt^-. (Δt^- vaut dire le moment juste avant $t = \Delta t$)

14. Établir l'équation vérifiée par $u(t)$ en fonction de R_1, R_2, C et $v_e(t)$. Préciser la constante de temps τ' de ce circuit.
15. En supposant $\tau' << \Delta t$, préciser la valeur $u(\Delta t)$. Qualitativement proposer comment $u(t)$ varie dans le temps. Qualitativement proposer comment $i(t)$ varie dans le temps.

Modèle simplifié de l'amplificateur *Patch Clamp*



Les techniques de potentiel imposé à une membrane ont pour finalité le maintien du potentiel membranaire d'une cellule ou d'un groupe de cellules à une valeur fixe et l'enregistrement simultané des courants ioniques liés aux transferts d'ions à travers la membrane. Toute mesure nécessite une paire d'électrodes : une électrode de mesure reliée à un convertisseur et une électrode de référence indifférente (généralement une électrode au calomel ou au chlorure d'argent), montées en opposition. La pipette d'enregistrement est un simple tube de verre contenant une solution ionique de composition fixée par l'expérience dans lequel est placée une électrode d'argent chlorurée. L'ensemble permet la conduction électrique entre la membrane cellulaire ou l'intérieur de la cellule et le premier étage de l'amplificateur qui est un convertisseur courant tension (bloc (2)). Nous donnons ci-dessus le schéma électrique équivalent en configuration cellule entière qui permet l'enregistrement de courants macroscopiques. Le second étage (blocs (3) et (4)) retranche la tension de référence et amplifie le signal d'un facteur compris entre 1 et 200.

Étude de l'amplificateur

En utilisant les résultats des question préliminaires :

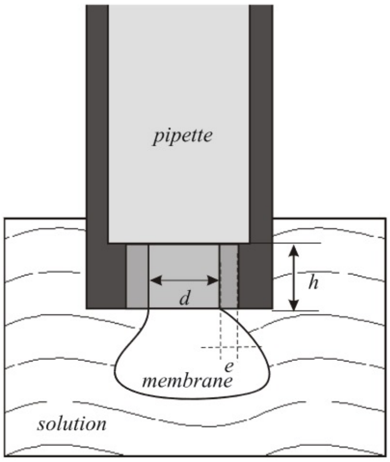
16. Exprimer V_0 en fonction de V_{ref}, $i(t)$ et R_f.
17. Exprimer V_1 en fonction de V_{ref} et V_0, puis en fonction de $i(t)$ et R_f.
18. Exprimer v en fonction de $i(t)$, R_f, R et R_{var}.

Mesure de la résistance de *seal*

La pipette est modélisable par une résistance $R_{pip} = 10M\Omega$. La zone de contact (ZC) entre la pipette et la membrane peut être représentée par un cylindre de diamètre $d = 1\mu m$ et de hauteur $h = 2\mu m$, de conductivité $\sigma = 10^{-2}\Omega^{-1}.cm^{-1}$.

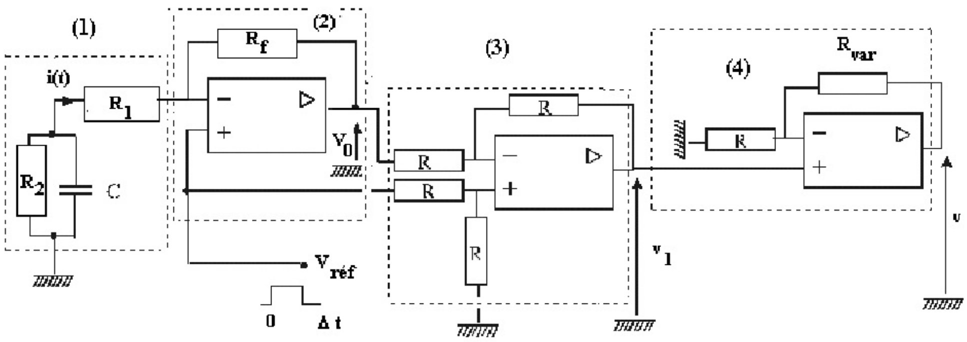
19. En utilisant le résultat établi dans la partie préliminaire, exprimer la résistance d'accès R_{accs} à la membrane en fonction de h, d et σ. Calculer numériquement R_{accs}.

Il se forme de plus une résistance de jonction, ou de fuite, appelée résistance de *seal* conditionnant la stabilité de la liaison pipette membrane. Cette résistance est constituée par une colonne cylindrique entourant la zone ZC, de même conductivité σ que ZC. Cette colonne a l'épaisseur $e = 3 \times 10^{-10}m$ $(e << d)$ et la hauteur $h = 2\mu m$.



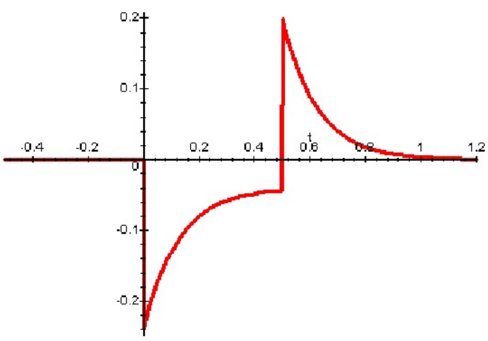
20. Exprimer la résistance de jonction R_{seal} en fonction de h, d, e et σ. Calculer numériquement R_{seal}.
21. Quel est alors le montage électrique équivalent à l'association de ces trois résistance : R_{pip}, R_{accs} et R_{seal} ? Compte tenu des valeurs numériques, simplifier le montage.

Mesure en configuration cellule entière



On modélise par R_1 la résistance équivalente de la pipette précédente, R_2 et C représentent la résistance et la capacité de la membrane (bloc 1) :

22. Déduire de l'enregistrement de $v(t)$ donné ci-dessous les valeurs de R_1, R_2 et C. On précise que $V_{ref} = 5mV$, $R_f = 100M\Omega$ et $R_{var} = 0$. Sur cet enregistrement, l'abscisse t est en secondes et l'ordonnée v est en volts.



Problème 2. Cabine de sauna

Le complexe sportif du stade nautique comporte une cabine de sauna, de volume constant $V = 14m^3$. Initialement elle renferme de l'air se trouvant dans les mêmes conditions que l'air extérieur, c'est-à-dire à la pression $P_0 = 1bar$ et à la température $T_0 = 20°C$. Un radiateur, fonctionnant à sa puissance maximale, $P = 10kW$, permet d'atteindre rapidement, une température intérieure $T_1 = 80°C$, après quoi on maintient cette température constante en réduisant la puissance du radiateur. En régime permanent, la température du sauna est égale à T_1, sauf le corps de la personne se trouvant dans la cabine. Cette personne doit maintenir la température de sa peau à $T_2 = 37°C$, et ceci uniquement grâce à l'évaporation de l'eau perdue par transpiration.
La capacité thermique totale de la cabine, air non compris, est $C = 70kJ.K^{-1}$.
On donne les capacités thermiques massiques de l'air : $c_v = 0.72\frac{J}{g.K}$, $c_p = 1\frac{J}{g.K}$, sa masse volumique sous $1bar$ et à $20°C$: $\mu = 1.3\frac{g}{m^3}$. La chaleur latente de vaporisation de l'eau est $L_v = 2400\frac{J}{g}$.

1. Calculer la durée t qui permet d'atteindre la température T_1 en supposant que la cabine soit parfaitement étanche et adiabatique.
2. Déterminer la pression finale dans la cabine.
3. On estime que les pertes thermiques sont caractérisées par un flux :

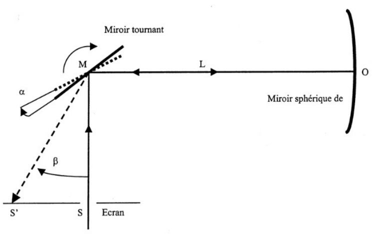
$$\Phi = A(T_1 - T_0) \tag{1}$$

   avec $A = 70W/K$.
   La durée calculée précédemment est-elle surestimée ou sous-estimée ?
4. À quelle fraction de la puissance maximale le radiateur doit-il fonctionner pour maintenir la température de $80°C$?
5. Le transfert de puissance entre le corps humain et l'air du sauna est donné par :

$$\Phi' = B(T_2 - T_1) \tag{2}$$

   avec $B = 14.2W/K$.
   Quelle est la perte de masse de la personne lors d'une séance de 10 min ?

Problème 3. Vitesse de la lumière



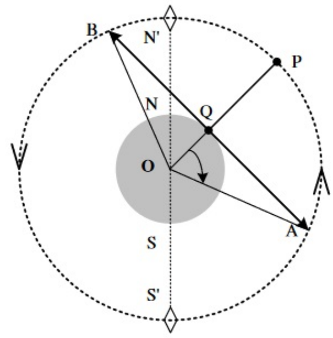
On considère le dispositif suivant, dû à Léon Foucault :
Un écran percé d'un trou en S laisse passer un faisceau lumineux qui, après des réflexions successives sur un miroir tournant plan puis sur un miroir sphérique de centre de courbure M et finalement de nouveau sur le miroir tournant, est recueilli sur l'écran à la position S'.

1. On appelle α l'angle dont le miroir a tourné pendant l'aller-retour M-O-M.
   Donner la valeur de l'angle β en fonction de l'angle α.
2. On note d la distance SM et L la distance OM. Le miroir tourne à vitesse angulaire constante Ω. Exprimer la distance SS' en fonction de d, L, Ω et la vitesse de la lumière dans le milieu traversé c.
3. Le miroir tourne à une vitesse de 1000 tours par seconde. On donne $L = 15m$ et $d = 10m$. On mesure un écart entre la source et l'image $SS' = 12.5mm$. Evaluer numériquement c.

Problème 4. Satellites de télécommunication

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

Satellite sur orbite circulaire



1. Un sattelite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = ||\overrightarrow{v}||$ et h.
2. Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre. Etablir le *théorème du viriel* : $2E_c + E_p = 0$.
3. À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. X) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h, G, M_T et R_T. Calculer τ pour $h = 8 \times 10^5 m$.
4. Calculer $\frac{T}{\tau}$. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites identiques, appelé *train de satellites*. Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de $800 km$. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un *train* afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite voient au moins un satellite à tout instant. Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?
5. Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train des questions précédentes ?
6. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\overrightarrow{f_{alpha}}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\overrightarrow{f_{alpha}} = -\alpha M_S v \overrightarrow{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α. Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi précédement reste applicable en présence de $\overrightarrow{f_{alpha}}$. Établir l'équation vérifiée par h.
7. Un satellite placé sur une orbite d'altitude $800 km$ subit une diminution d'altitude d'environ $1 m$ par révolution. Sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α. Calculer, avec la même approximation, ce qu'il devient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

8. En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^{\beta}}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui des questions précédentes (perdant 1m par révolution pour un altitude d'environ 800km) perd, à l'altitude de 400m, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

Stabilisation de l'attitude d'un satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIème, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.
On considère le modèle suivant : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur $2l$. Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ $(l << r_0)$. Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen. Le plan orbital est Oxy. Une façon d'approcher le problème c'est de considérer le référentiel (R') défini par le repère $(Ox'y'z)$ lié au satellite tournant autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω. Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

9. Exprimer les forces gravitationnelles qui agissent sur M_1 et M_2. Trouver les configurations d'équilibre et discuter de leur stabilité. Trouver le period d'oscillations du satellite.

——— **FIN DE L'ENONCE** ———

Part II

English

Task 1.The *Patch Clamp* technique

Invented by E. Neher and B. Sakmann, the patch-clamp (or cellular electrophysiology) is the reference technique for electrophysiological studies of ionic flows in individual isolated living cells, tissues or patches of cell membrane. Every individual channel under investigation is subjected to high ionic flow (in the order of 10^6 ions/second) and thus to an electric current. The patch-clamp is then the recording of electric activity of a cellular membrane.

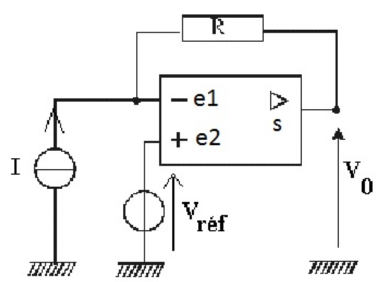
Preliminaries

Ohm's law

We consider a conductive homogeneous medium with electric conductivity σ. A charged particle of mass m and charge q, is able to move freely inside this medium, but during its movement it participates in many collisions, which we globally model by a friction force $\overrightarrow{f_{fr}} = -\alpha\overrightarrow{v}$ where $\overrightarrow{v}$ is the velocity of the charged particle and α is a positive constant. We suppose that the studied material is placed in a uniform and constant electric field $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_x}$ where $E = constant$. The charge is subjected to an electric force $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$. The weight is negligible in the current setting.

1. Apply Newton's second law of motion and determine the equation satisfied by the velocity $\overrightarrow{v}$ and by the acceleration $\overrightarrow{a}$.
2. Find the terminal velocity $\overrightarrow{v_\infty}$ reached by the charged particle and the characteristic time τ of this transient regime.
3. Knowing that the material has n mobile charges density (number of particles per volume), find the current density vector $\overrightarrow{j}$ as a function of $n, q, alpha, \overrightarrow{E}$, given that the steady state regime is reached.
4. Write down Ohm's law and give its local version. Show that the conductivity of the material is $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$.
5. Show that the force $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$ is a conservative force. Give the literal expression of the potential energy E_p. We define $E_p(x = 0) = 0$. Find the expression of the potential $V(x)$ as a function of E and x.
6. A portion of this conductor of cross section S and length L is subjected to a potential difference U. Find the resistance R of this conductor and show that it is given by $R = \frac{L}{\sigma S}$.

Current-to-voltage conversion by an operational amplifier

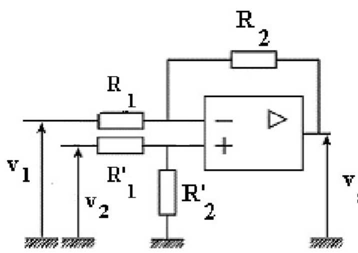


The operational amplifier (OA) is considered to be ideal and operating in linear regime. Under those conditions the AO behaves in the following way: $v_{e1} = v_{e2}$ - the potential at input 1 is equal to the potential at input 2, and $i_{e1} = i_{e2} = i_s = 0$, the currents at the inputs and the output are all equal to zero. On the schematic we see a source of voltage and a source of current.

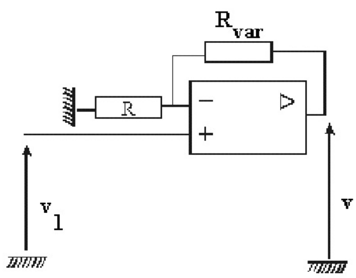
7. Express the tension at the output V_0 as a function of the current i, the reference tension V_{ref} and R.

Subtractor and amplifier

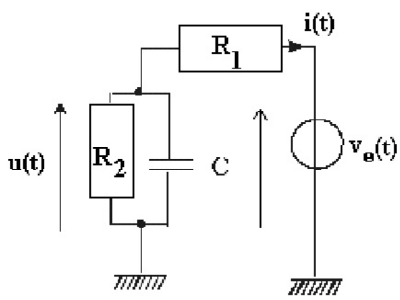
As in the previous question - we suppose that the OA is ideal and working in linear regime.



8. Express the output tension v_s as a function of v_1 and v_2 as well as the different resistances. The circuit considered in this question is shown above.
9. What will happen if the four resistances are identical?
10. The OA is supposed ideal and working in linear regime. The circuit is shown on the figure below - find the tension v as a function of v_3, R and R_{var}. Give an appropriate name to this circuit.



Study of a transient regime

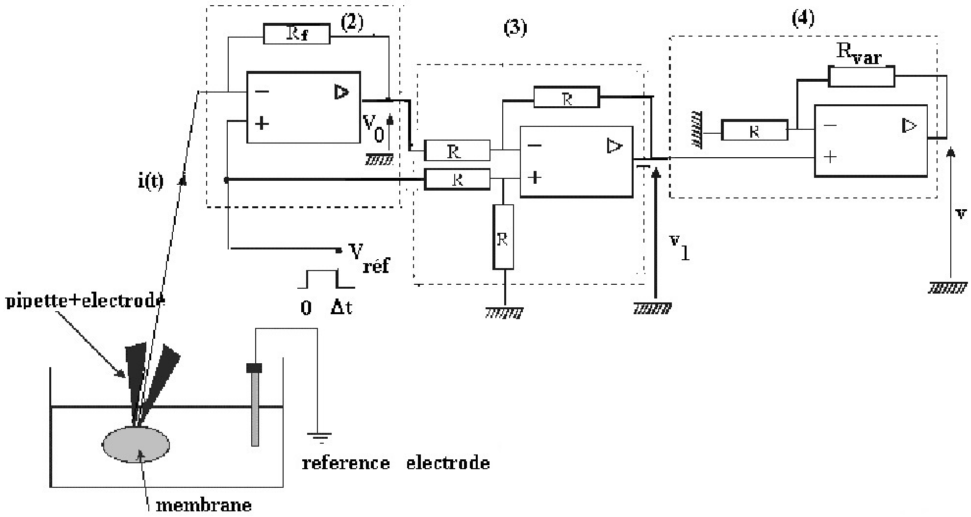


We consider the circuit shown here, consisting of a capacitor with capacity C, initially discharged, of two resistances R_1 and R_2, powered by a generator delivering a variable signal $v_e(t)$.
We are going to apply to this circuit a constant amplitude $\Delta V = V_{ref} > 0$ signal for a fixed duration Δt, meaning $v_e(t)$ will vary over time according to this law.

11. Show on a graph how $v_e(t)$ varies over time.
12. Express $i(t = 0^+$ as a function of v_{ref} and R_1. (0^+ means the moment just after $t = 0$)

13. Express $i(t = \Delta t^-)$ as a function of v_{ref}, R_1 and R_2. We suppose Δt is large enough so that the circuit reaches steady state at the instant Δt^0. (Δt^- means the moment just before $t = \Delta t$)
14. Establish the equation satisfied by $u(t)$ as a function of R_1, R_2, C and $v_e(t)$. Specify the time constant τ' of this circuit.
15. Supposing that $\tau' << \Delta t$, give the value of $u(\Delta t)$. Qualitatively propose how $u(t)$ varies over time. Qualitatively propose how $i(t)$ varies over time.

Simplified model of a *Patch Clamp* amplifier



The techniques of imposing electric potential to a membrane are aimed at maintaining the potential of a cell or a group of cells at a fixed value and at registrating the ionic currents associated with the ions crossing the membrane. Every measurement requires a pair of electrodes: one measurement electrode connected to a converter and a reference electrode (generally a saturated calomel electrode or silver chloride electrode), mounted to the studied cell. The pipette used to measure the current is a simple glass tube containing an ionic solution of a given composition, determined by the experiment, in which is placed a silver chloride electrode. This installation allows the current to flow from the cellular membrane through the first stage of the amplifier, which is a current-to-voltage converter (bloc (2)). We give here the schematic representation of an electrically equivalent circuit, used in configuration full cell, which allows the registration of macroscopic currents. The second stage (blocs (3) and (4)) subtract the reference voltage and amplify the signal by a factor between 1 and 200.

Study of the amplifier

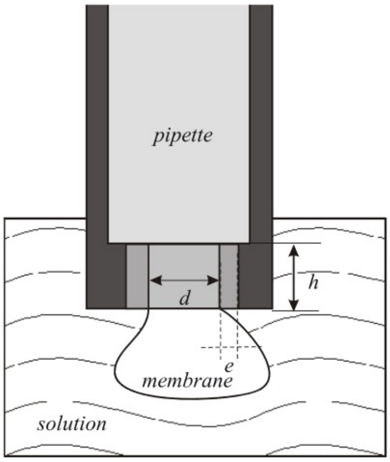
You can use the results obtained in the preliminary questions:

16. Express V_0 as a function of V_{ref}, $i(t)$ and R_f.
17. Express V_1 as a function of V_{ref} and V_0, and then as a function of $i(t)$ and R_f.
18. Express v as a function of $i(t)$, R_f, R and R_{var}.

Measurement of the *seal* resistance

The pipette can be modelled by a resistance $R_{pip} = 10M\Omega$. The contact zone (CZ) between the pipette and the membrane can be represented by a cylinder of diameter $d = 1\mu m$ and height $h = 2\mu m$, with conductivity $\sigma = 10^{-2}\Omega^{-1}.cm^{-1}$.

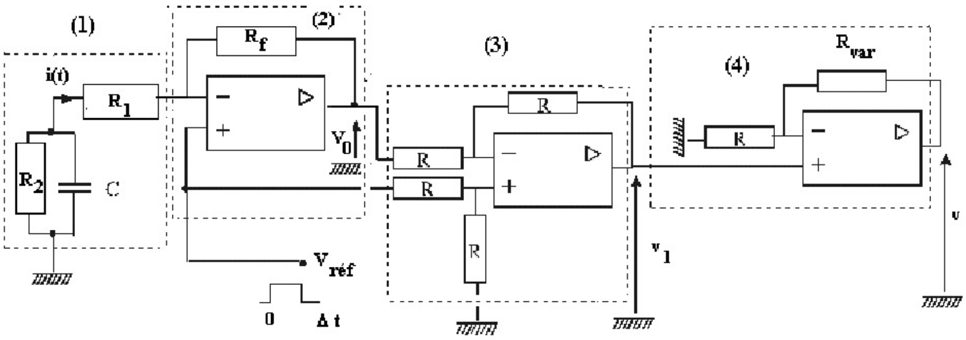
19. Using the results obtained in the preliminary questions, find the resistance of the contact zone - called access resistance, as a function of h, d and σ. Calculate the value of R_{accs}.



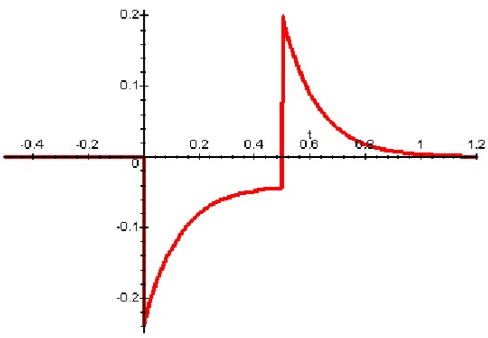
Furthermore, there is a junction resistance, which we need to take into account, it is called *seal* resistance and it is influencing the stability of the pipette-membrane circuit. This resistance is due to a cylindrical pillar surrounding the CZ of the same conductivity σ as the CZ. The thickness of this pillar is $e = 3 \times 10^{-10} m$ ($e << d$) and height $h = 2 \mu m$.

20. Express the junction resistance R_{seal} as a function of h, d, e and σ. Calculate the value of R_{seal}.
21. What is the electrically equivalent circuit from the association of those three resistances: R_{pip}, R_{accs} and R_{seal}? Taking into account the numerical values, simplify the circuit.

Measurements in whole cell configuration



We model the equivalent resistance of the pipette by R_1, while R_2 and C are representing the resistance and the capacity of the membrane (bloc1):



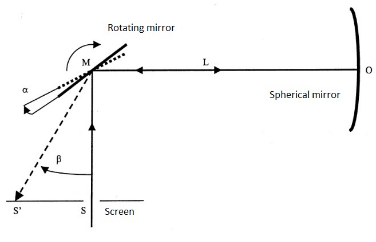
22. Using the collected data of $v(t)$, which is given below (the horizontal axis t is in seconds and the vertical axis v is in volts), find the values of R_1, R_2 and C. For those measurements we also know that $V_{ref} = 5mV$, $R_f = 100M\Omega$ and $R_{var} = 0$.

Task 2. Sauna room

The sports complex of the nautical stadium has a sauna room, which has constant volume $V = 14m^3$. Initially the air in this room is in the same conditions as the external air, meaning its pressure is $P_0 = 1bar$ and its temperature is $T_0 = 20°C$. A heater, used at maximum power - $P = 10kW$, allows to reach a room temperature of $T_1 = 80°C$, after which this temperature is maintained by reducing the power of the heater to an appropriate level. At steady state the temperature in the room is equal to T_1, except for the body of the person, which is present in the room. This person has to maintain temperature $T_2 = 37°C$, which is achieved by water evaporation due to transpiration.
The thermal capacity of the whole room, air not included, is $C = 70kJ.K^{-1}$.
The specific capacities of air are the following: $c_v = 0.72\frac{J}{g.K}$, $c_p = 1\frac{J}{g.K}$, its density at $1bar$ and at $20°C$: $\mu = 1.3\frac{g}{m^3}$. The latent heat of vaporization of water is $L_v = 2400\frac{J}{g}$.

1. Calculate the duration t over which the sauna room will reach the temperature T_1, supposing the the sauna room is perfectly isolated and adiabatic.
2. Determine the final pressure in the room.
3. We model the thermal leaks by the following flux:
$$\Phi = A(T_1 - T_0) \tag{3}$$
where $A = 70W/K$.
Is the previously calculated duration overestimated or underestimated?
4. At what fraction of its maximum power should the heater work in order to maintain the temperature of $80°C$?
5. The heat transfer between the human body and the air in the sauna is given by:
$$\Phi' = B(T_2 - T_1) \tag{4}$$
where $B = 14.2W/K$.
How much weight is lost by a person in the sauna during one stay of 10 min duration?

Task 3. Speed of light



We consider the following installation, first studied by Leon Foucault:
A screen with a small hole at S, by which a beam of light can pass after successive reflections on a flat rotation mirror, then on a spherical mirror with its center of curvature M and lastly again on the rotating mirror, after which hits the screen at the position S'.

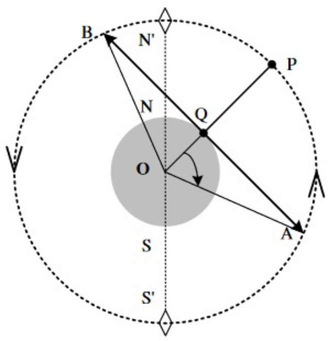
1. We define α the angle swept by the rotating mirror during the roundtrip M-O-M.
Find the value of the angle β as a function of α.

2. We call d the distance SM and L the distance OM. The rotating mirror turns at a constant angular velocity Ω. Express the distance SS' as a function of d, L, Ω and the speed of light in the medium c.
3. The rotating mirror turns with a speed of 1000 rotations per second. We also measure $L = 15m$ and $d = 10m$. After performing the measurement we find $SS' = 12.5mm$. Calculate the speed of light c.

Task 4. Telecommunication satellites

In the following we study some aspects of the physics involved in telecommunication satellites in orbit around the Earth. Except when specified, we consider the Earth to be a homogeneous sphere with radius R_T and center O, stationary in space and with no rotation.

Satellite on a circular orbit



1. A satellite of mass M_S is in circular orbit with center O, at altitude h in the order of a couple hundred kilometers (low orbit). Establish the relation between the period of revolution T and h. Express also the relation between the velocity $v = ||\overrightarrow{v}||$ and h
2. Let E_c and E_p be resp. the kinetic and potential energy of the satellite in the gravitational field of the Earth. Establish the *Virial theorem*: $2E_c + E_p = 0$.
3. For every position P of the satellite there is a corresponding point Q on the surface of the Earth, vertically underneath it. The set of those points Q defines the trail of the trajectory. For an observer at Q, the duration of visibility τ of a satellite is the time interval between it first appearing on the sky (point A on the figure) and it disappearing behind the horizon (point B. Express τ as a function of h, G, M_T and R_T.
   Calculate τ for $h = 8 \times 10^5 m$.
4. Calculate $\frac{T}{\tau}$. For the needs of mobile telephones, telecom companies place a set of identical satellites on polar orbits (meaning orbits in meridian planes) called *satellite train*. Those satellites are equidistant on their common polar orbit at an altitude of $800hm$. Calculate the minimum number of satellites needed to form such a train that every point on the surface of the Earth, in the same meridian plane as the orbit, see at least one satellite at every moment.
   How many polar orbits of this kind are needed in order to have complete coverage of the surface of the Earth - meaning that every point on the surface of the Earth sees at least one satellite at every moment? How many satellites are required in this case?
5. In this question we take into account the rotation of the Earth. Calculate the period and altitude of a satellite on a geostationary orbit. Does the notion of visibility duration has any meaning in this case? What are the advantages and disadvantages of a satellite in a geostationary orbit compared to the satellite train from the previous questions?
6. The Earth is surrounded by an atmosphere which opposes to the movement of the satellite. The friction force $\overrightarrow{f_{alpha}}$ that it exerts is proportional to the square of the velocity v of the satellite

and is given by $\overrightarrow{f_{alpha}} = -\alpha M_S v \overrightarrow{v}$, where α is positive and constant in this question. Determine the dimension of α. Write down the variations of the mechanical energy, supposing that the virial theorem is still applicable in the presence of the friction force $\overrightarrow{f_{alpha}}$. Establish the equation satisfied by h.

7. A satellite on a circular orbit at an altitude of $800km$ is subjected to a decrease in its altitude of about $1m$ per revolution. Its velocity is changed very little for one revolution. Give an estimated value of α in first order approximation. Calculate, using the same precision, what happens with the altitude after a duration of 10 years. Compare to the exact solution. Is the fact that the velocity increases in the presence of a friction force, which acts in a direction opposite to the movement, paradoxical?
8. In reality, the friction force depends on the density of the atmosphere and as so - from the altitude. In a certain range of altitude, α varies according to the law $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$, where γ and β are positive. The same satellite as in the previous questions (which looses 1m per revolution for an altitude of about 800km) looses, at the altitude of 400m, 2 meters per revolution. Calculate γ and β.

Attitude stabilization of a satellite by gravity gradient

The method of attitude stabilization by gravity gradient is used for satellites so that they point always with the same side to the Earth. It does not require any external energy. The principles of this method were established by Lagrange in the XVIIth century, in order to explain why the moon always shows the same side to the Earth.

We consider the following model: the satellite consists of two mass points M_1 and M_2 of identical mass $m = \frac{1}{2}M_S$ connected by a solid beam of negligible mass and length $2l$. The barycenter S of the satellite follows a circular orbit around the Earth of radius $r_0 = R_T + h$ ($l << r_0$). The geocentric frame of reference (R) with the associated coordinate system $(Oxyz)$ is inertial. The orbital plane i Oxy. One way to approach this problem is the consider the frame of reference (R') with coordinate system $(Ox'y'z)$, which has the satellite's barycenter immobile. The points M_1 and M_2 are in the orbital plane. We suppose there are no friction forces.

9. Express the gravitational forces acting on M_1 and M_2. Find the configurations that are in equilibrium and discuss their stability. Find the period of oscillations of the satellite.

——— **END OF PAPER** ———