

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

[http ://balkanski-foundation.org/](http://balkanski-foundation.org/)

Concours Général de Physique «Minko Balkanski»

14 août 2021

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème 1. Interception d'une fusée balistique (7 pts)

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m , est mise à feu à l'instant $t = 0$ depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le plan horizontal Oxy . La fusée se déplace uniquement dans le plan vertical Oxz . Le référentiel R est considéré galiléen - il est rapporté au repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur, et $\vec{r} = (x, y, z)$ le vecteur position de M .



Modélisation sans traînée

Négligeons les effets de traînée de l'air. La seule force agissante sur le mouvement de la fusée sera donc celle de la gravité.

1. Déterminer les expressions $x(t), y(t), z(t)$ de la position du point M en fonction des constantes du problème.
2. En déduire l'équation de la trajectoire du point M sous la forme $z = f(x)$.
3. En déduire la portée P et l'altitude maximale h_{max} atteintes par la fusée. On définit la portée à partir de l'altitude initiale du tir $z_0 = 0$.
4. Pour quelle valeur de α la portée P est-elle maximale? Que vaut la portée maximale P_{max} ?

On désire maintenant intercepter la fusée pendant le vol. Pour cela, on lâche sans vitesse initiale, à l'instant t_1 positif, un obus-appât au point N_0 coordonnées (x_0, z_0) . Cet obus sera assimilé à un point matériel N de masse m' , de vecteur position $\vec{r}' = (x', y', z')$. On cherche à déterminer la date t_1 du lâcher et celle de l'interception T en fonction de la position N_0 supposée connue.

5. Déterminer les expressions $x'(t), y'(t), z'(t)$ de la position de l'obus en fonction des constantes du problème.
6. En déduire à quel instant T s'effectue l'interception.
7. En déduire une équation du second degré en t_1 résultant de l'intersection des 2 trajectoires. On l'écrira en fonction des données du problème.
8. À quelle condition existe-t-il une solution à cette équation? Où doit se situer le point N_0 d'après cette condition? Faire un schéma.
9. Déterminer à quel instant t_1 l'obus doit être lâché afin de réussir l'interception. On exprimera le résultat en fonction de T et autres données du problème. Montrer que la position de N_0 doit vérifier une seconde condition. Laquelle et pourquoi? Faire un schéma récapitulatif la zone de largage possible de l'obus.
10. On suppose que la position initiale (x_0, z_0) de l'obus par rapport à celle de la fusée est connue avec une précision relative de 0.01% près. Quant aux composantes de la vitesse $\vec{v}_0$, elles sont connues à 0.1% près. En déduire l'incertitude relative sur la date T . Faire l'application numérique.

Modélisation tenant en compte la traînée

En fait, il est nécessaire de prendre en compte les frottements dus à l'air sur la fusée et l'obus. On considère que la fusée est suffisamment bien profilée pour qu'un modèle de force de frottement fluide linéaire soit convenable : l'air exerce donc une force $\vec{F}_{tr} = -\lambda \vec{v}$ sur la fusée, avec $\lambda > 0$ le coefficient de frottement. Par ailleurs, l'obus étant moins bien profilé, on le lâche toujours verticalement mais avec une vitesse initiale $\vec{v}_0' = -v_0' \vec{u}_z$ ($v_0' > 0$), et on modélise les frottements de l'air par une force fluide quadratique : $\vec{F}_{trq} = -k v' \vec{v}'$, où $\vec{v}' = -v' \vec{u}_z$ est la vitesse de l'obus ($v' > 0$) et $k > 0$ le coefficient de frottement.

11. Donner la dimension puis l'unité des coefficients λ et k .
12. Faire un schéma des forces appliquées à la fusée. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour la fusée.
13. Résoudre l'équation établie dans la question précédente. Vérifier que :

$$\vec{r}(t) = \tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \tau \vec{g}t \quad (1)$$

et projeter cette expression selon les trois axes principaux. On note $\tau = \frac{m}{\lambda}$

INDICATION : Pour arriver à l'expression de $\vec{r}$, il sera utile de pouvoir dériver. On vous donne les "règles" nécessaires pour y arriver :

La vitesse est la dérivée de la position et l'accélération est la dérivée de la vitesse : $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ et $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ où on note la dérivée par rapport au temps par $\frac{d}{dt}$.

Soient f et g deux fonctions de la variable t . On a :

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} \text{ et } \frac{d}{dt}(f+g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$$

On vous donne également les dérivées des quelques fonctions qui seront utiles :

$$\frac{d}{dt}(e^{ct}) = c \cdot e^{ct} \text{ et } \frac{d}{dt}(c \cdot t^n) = nc \cdot t^{n-1}$$

Pour répondre à la question il est suffisant de vérifier que l'expression de $\vec{r}$ donnée satisfait l'équation établie.

14. Déterminer la nouvelle expression de la date T' de l'interception. Vous pouvez utiliser l'expression de $\vec{r}(t)$ donnée dans la question précédente, même si vous ne l'avez pas vérifiée.
15. Etablir l'équation différentielle vérifiée par v' pour l'obus. Montrer que ce mouvement admet une vitesse limite v'_l qu'on exprimera en fonction des constantes du problème. Exprimer le temps caractéristique du problème τ_o en se servant de l'équation différentielle.

Pour simplifier le problème on suppose que la vitesse de l'obus varie de façon linéaire jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse limite au bout d'une durée τ_o et elle reste constante ensuite.

16. Commenter la validité de ce modèle. Tracer l'allure de $\vec{v}$ sur un graph.
17. Obtenir l'expression de $z_{obus}(t)$ sachant que $T' > t'_1 + \tau_o$.
18. Etablir une équation de t'_1 et la résoudre.

Problème 2. Propulsion d'un sous-marin (6 pts)

Les systèmes de propulsion des sous-marins doivent être silencieux pour ne pas être repérés et fonctionner de manière anaérobie, c'est-à-dire sans utiliser d'air, vu qu'en immersion totale, le milieu extérieur est l'eau et non l'air. La propulsion nucléaire est un type de propulsion largement utilisée dans les sous-marins militaires à l'heure actuelle. Les AIP (Air Independent Propulsion) représentent une autre classe de propulsion fonctionnant de manière classique, sans apport d'air et permettant de s'affranchir du danger nucléaire. Parmi ces AIP, nous allons nous intéresser au moteur de Stirling.

Moteur de Stirling

Le moteur de Stirling a été développé au XIX^e siècle et a rapidement été délaissé au profit des moteurs à combustion interne (à essence et diesel). Il pourrait cependant connaître un essor significatif dans le futur compte-tenu, entre autres, des avantages qu'il présente en matière de protection de l'environnement. La structure du moteur est représentée sur la figure ci-contre.

Dans une enceinte principale, peuvent se mouvoir d'une part un piston de travail et d'autre part un déplaceur, dont le rôle est de transvaser le fluide de travail depuis le volume de compression (zone froide) vers le volume d'expansion (zone chaude) et réciproquement. Lors du transvasement, le fluide parcourt dans un sens ou dans

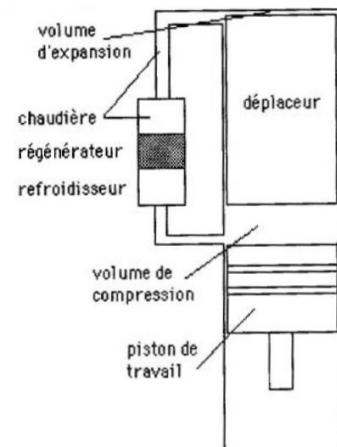


FIGURE 1 – Structure du moteur de Stirling

l'autre la chaudière à la température T_3 , le régénérateur et le refroidisseur à la température T_1 . Le fluide de travail décrit le cycle constitué des quatre phases suivantes :

- Pendant la phase de compression $1 \rightarrow 2$, le déplaceur se trouve en position haute et le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le haut.
- Au point 2, le piston reste au point mort haut et le déplaceur est ramené en position basse, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe pendant la phase $2 \rightarrow 3$ de la zone froide vers la zone chaude, commençant par se réchauffer dans le régénérateur puis recevant un transfert thermique de la chaudière.
- Pendant la phase de détente $3 \rightarrow 4$, le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé par les tubes de la chaudière. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail vers le bas.
- Pendant la phase $4 \rightarrow 1$, après que le piston a atteint le point mort bas, le déplaceur est ramené en position haute, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide commence par céder un transfert thermique au régénérateur, puis il est refroidi par le refroidisseur.

En pratique, le régénérateur est un échangeur de chaleur : il reçoit un transfert thermique du gaz chaud dans un sens de circulation, qu'il restitue dans l'autre sens, lorsque le gaz est froid.

Nous étudierons le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de rapport de capacités thermiques $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ subissent les évolutions ci dessous.

- compression $1 \rightarrow 2$ isotherme réversible à la température $T_1 = 300K$.
- échauffement $2 \rightarrow 3$ isochore jusqu'à l'état 3 de température $T_3 = 600K$.
- détente $3 \rightarrow 4$ isotherme réversible à la température T_3 .
- refroidissement $4 \rightarrow 1$ isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression. On rappelle que la capacité thermique à volume constante s'écrit : $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$, où R désigne la constante des gaz parfaits.

1. Faire 4 schémas qui correspondent aux 4 transitions ($1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$). Chaque schéma sera similaire au celui donné dans l'énoncé (Fig.1), mais il montrera les positions du piston de travail et du déplaceur pour la transition en question. Sur chaque figure préciser quelles sont les transformations en cours, mettre en évidence l'amplitude du piston de travail et utiliser des flèches pour indiquer le sens de mouvement de chaque piston.
2. Tracer l'allure du cycle dans un diagramme $(p; V)$ représentant la pression du gaz en fonction de son volume. Comment justifier si le cycle proposé est celui d'un moteur ou d'un récepteur ? Rappeler le premier principe de la thermodynamique qui relie l'énergie d'un système avec le transfert thermique et le transfert mécanique subi par ce système.
3. Montrer que le travail W_{12} reçu par le fluide au cours de la compression prend la forme $W_{12} = nRT_1 \ln(\rho)$, où $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ est le rapport de compression (le rapport de volumes pendant l'étape 1 et 2 respectivement). En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression. Préciser les signes de W_{12} et Q_{12} .
4. Exprimer le transfert thermique Q_{23} reçu par le fluide au cours de l'échauffement, en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.
5. Exprimer le travail W_{34} reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n , R , T_3 et ρ . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente. Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .
6. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe. Si le régénérateur est idéal, le transfert thermique qu'il fournit au fluide est $q_{regenerateur} = q_{23} + q_{41}$. Que peut-on en dire ?
7. Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores sont internes à la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes. En déduire le rendement r de ce cycle moteur, en fonction de T_1 et T_3 . Faire l'application numérique.

8. Écrire l'expression du rendement e_C de Carnot pour un moteur fonctionnant entre les sources de température T_1 et T_3 . Comparer au rendement r du cycle de Stirling avec régénérateur idéal. On vous rappelle que le cycle de Carnot comporte 2 transformations isothermes et 2 transformations adiabatiques. Il n'est pas nécessaire de démontrer l'expression de e_C .

Propulsion nucléaire

Un autre mode de propulsion des sous-marins utilise un réacteur nucléaire, qui fournit de l'énergie grâce à la fission nucléaire de combustible tel que l'uranium (circuit primaire). Cette énergie permet de vaporiser de l'eau, entraînant une turbine, couplée à un alternateur (voir Fig. 2). Celui-ci produit de l'électricité pour alimenter un moteur électrique faisant tourner l'hélice du sous-marin.

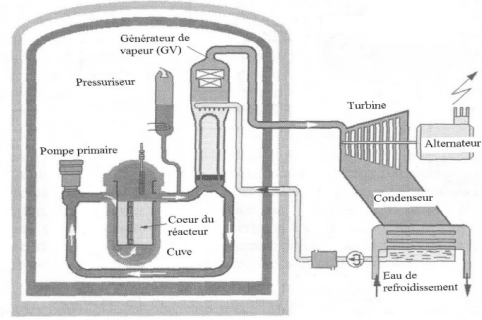


FIGURE 2 – Moteur à propulsion nucléaire

Nous nous intéresserons ici uniquement au circuit secondaire représenté schématiquement en Fig. 3.

L'eau entre dans la pompe sous forme de liquide saturé (état 1), puis est comprimé de façon adiabatique réversible à la pression qui règne dans le générateur de vapeur (GV). En entrant dans le (GV), l'eau se trouve sous forme de liquide, comprimé à la pression P_2 . Elle en ressort sous forme de vapeur (état 3), à la même pression P_2 , puis pénètre dans la turbine où elle se détend de façon adiabatique réversible en entraînant l'arbre de l'alternateur. A la sortie de la turbine (état 4), l'eau est diphasée.

Ce mélange liquide-vapeur est alors liquéfié à pression constante dans le condenseur et en sort dans l'état 1.

9. Les quatre composants de ce cycle (dit cycle de Rankine), soit la pompe, le GV, la turbine et le condenseur, fonctionnent avec un écoulement en régime permanent. L'objectif des questions qui suivent est d'établir l'expression du premier principe dans ce cas. Pour cela, on considère un composant C et on définit le système fermé Σ_f de la façon suivante :

- à l'instant t , Σ_f est constitué du fluide contenu dans C et de la masse dm_e de fluide entrant dans C entre t et $t + dt$;
- à l'instant $t + dt$, Σ_f est constitué du fluide contenu dans C et de la masse dm_s de fluide sortant de C entre t et $t + dt$

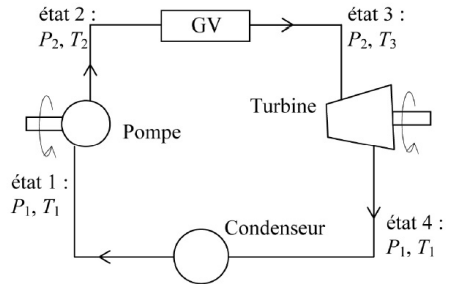


FIGURE 3 – Schéma du circuit étudié

- (a) Faire un schéma du composant C et le système Σ_f aux instants t et $t + dt$.
- (b) Justifier très précisément l'égalité $dm_e = dm_s$. On notera dm cette quantité.
- (c) On néglige les variations d'énergie cinétique (écoulement lent) et d'énergie potentielle de pesanteur (écoulement horizontal). Établir alors l'écriture suivante du premier principe :

$$\Delta h = w_u + q \quad (2)$$

où Δh désigne la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie du composant ($h_s - h_e$), w_u le travail massique utile reçu par le fluide de la part des parties mobiles du composant et q représente le transfert thermique massique reçu par le fluide dans le composant.

INDICATION : On rappelle que l'enthalpie est défini par : $H = U + pV$ où H est l'enthalpie, U est l'énergie interne, p est la pression et V est le volume.

Pour répondre à la question il suffira d'écrire le premier principe de la thermodynamique pour le système

fermé et de séparer deux terme de travail - travail utile et travail des forces de pression.

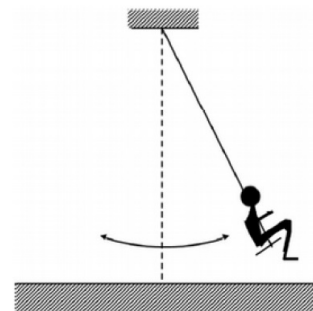
On précise que le travail massique utile n'intervient ni dans le générateur de vapeur, ni dans le condenseur et les évolutions au sein de la pompe et de la turbine sont adiabatiques.

10. On utilise le diagramme entropique de l'eau dans lequel la température T est placée en ordonnée et l'entropie massique s en abscisse (fourni en ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE). Dans ce diagramme, quelle est l'allure d'une évolution adiabatique réversible ? Justifier.
11. On donne $P_2 = 50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $P_1 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_3 = 500^\circ \text{C}$. Les points 1 et 2 correspondant aux états 1 et 2 figurent déjà sur le diagramme $(T; s)$ de l'eau fourni dans le document réponse en fin d'énoncé. Sur ce même diagramme, placer les points 3 et 4 correspondant aux états 3 et 4 du fluide, ainsi que le cycle de Rankine décrit par le fluide.
INDICATION : La transformation $2 \rightarrow 3$ s'effectue en 3 étapes - liquide, liquide+vapeur, vapeur. Pour la première étape de cette transformation les courbes ne sont pas représentées sur le diagramme, alors il est conseillé de finir la représentation du cycle par cette partie qui sera forcément moins précis que les autres.
12. A l'aide du diagramme $(T; s)$, donner les valeurs numériques de T_1 , des enthalpies massiques h_3 et h_4 respectivement dans les états 3 et 4, des entropies massiques s_4 dans l'état 4, $s_V(T_1)$ de la vapeur saturante à T_1 et $s_L(T_1)$ du liquide pur à T_1 .
13. Déterminer la valeur numérique du titre en vapeur x_4 à la sortie de la turbine. On exprimera pour cela s_4 en fonction de x_4 , $s_V(T_1)$ et $s_L(T_1)$.
 On donne $h_1 = 440 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_2 = 475 \text{ kJ.kg}^{-1}$.
14. A l'aide du premier principe pour les écoulements permanents, déterminer les expressions et les valeurs numériques de q_{cond} et q_{GV} , les transferts thermiques massiques reçus par le fluide, respectivement dans le condenseur et dans le GV.
15. Déterminer les expressions et valeurs numériques des travaux massiques utiles dans la pompe et la turbine, respectivement w_{pompe} et w_{turb} . Commenter les résultats obtenus.
16. Une fraction du travail produit par la turbine sert à entraîner la pompe. En déduire le travail massique utile w_{alt} récupérable au niveau de l'alternateur. Donner sa valeur numérique.
17. Définir et calculer numériquement le rendement η du cycle de Rankine.
18. Comparer les deux méthodes de propulsion - moteur de Stirling et propulsion nucléaire.

Problème 3. Une balançoire (7 pts)

Un enfant faisant de la balançoire est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur l . Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

On suppose que le mouvement de l'enfant est plan. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ . Les vecteurs unitaires $\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, tels que définis sur la figure, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.



Étude du mouvement de l'enfant sans frottements

Dans cette partie, tout frottement de la tige sur son axe de rotation et tout frottement dû à la résistance de l'air sont négligés.

1. A quelle condition, sur la durée de l'expérience, le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen (inertiel) ? On donnera un ordre de grandeur. Cette condition sera supposée être vérifiée dans toute la suite du problème.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ (l'équation qui relie l'accélération angulaire et l'angle $\theta(t)$) en utilisant une méthode de votre choix.

3. A quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il un oscillateur harmonique? Donner l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 correspondante.
4. Exprimer dans ces conditions la vitesse maximale de l'enfant v_{max} en fonction de l , ω_0 et θ_{max} .
5. Application Numérique : l'enfant part d'un angle $\theta_0 = 30^\circ$ sans vitesse initiale. Avec les valeurs numériques suivantes : $l = 2.5m$, $g = 10m.s^{-2}$ et $m = 20kg$, calculer la période T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale v_{max} de l'enfant.

Cas d'une force de frottements fluides

Au niveau de la liaison pivot Oz s'exercent des forces de frottement sur la tige. Le moment de ces forces (par rapport à O) est égal à $\vec{\Gamma}_f = -C \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ où C est une constante positive et $\frac{d\theta}{dt}$ est la dérivée de $\theta(t)$ par rapport au temps qui est la vitesse angulaire $\omega(t)$.

6. Exprimer l'unité de C en utilisant les unités fondamentales du Système International.
7. Établir l'équation différentielle à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$ (l'équation qui relie l'accélération angulaire, la vitesse angulaire et l'angle $\theta(t)$). En supposant que les conditions de l'expérience sont telles qu'on peut utiliser l'approximation de petites angles, réécrire l'équation.
INDICATION : Approximation de petites angles : $\sin(\theta) \approx \theta$
8. Vérifier que $\theta(t)$ sous la forme suivante satisfait l'équation différentielle, étant donné qu'à l'instant initial $\theta = \theta_0$ et la balançoire part sans vitesse initiale :

$$\theta(t) = e^{-\frac{C}{2mL^2}t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \quad (3)$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{C^2}{4m^2L^4}}$. Trouver A et B .

INDICATION : On vous donne les "règles" nécessaires pour la dérivation :

On note la dérivée par rapport au temps par $\frac{d}{dt}$.

Soient f et g deux fonctions de la variable t . On a :

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} \text{ et } \frac{d}{dt}(f+g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$$

On vous donne également les dérivées des quelques fonctions qui seront utiles :

$$\frac{d}{dt}(e^{ct}) = c \cdot e^{ct} \text{ et } \frac{d}{dt}(\sin(At)) = A \cos(At), \frac{d}{dt}(\cos(At)) = -A \sin(At)$$

9. À quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme pseudo-périodique?
10. À quelle condition peut-on approcher la pseudo-période par la période propre T_0 ?
11. Application numérique : Considérant cette condition satisfaite, on suppose que $\theta = 30^\circ$. On observe que l'amplitude du mouvement est réduite de moitié après 20 oscillations. Calculer la valeur de la constante C avec les valeurs numériques données à la question.

Les frottements ont pour conséquence d'amortir le balancement de l'enfant et un deuxième enfant vient donc aider le premier enfant qui se balance à maintenir une amplitude constante en le poussant avec une force horizontale vers l'avant, périodique non harmonique.

12. A quel moment et à quelle fréquence l'enfant pousseur doit-il appliquer sa poussée (force appliquée pour une courte durée) sur l'enfant de la balançoire pour que son action soit la plus efficace possible? Que vaut donc la période T de la force $F(t)$ pour que l'action de l'enfant pousseur soit la plus efficace possible?

On suppose que l'impulsion est suffisamment courte et l'amortissement suffisamment faible pour qu'on puisse considérer que $\theta(t)$ suit une évolution sinusoïdale de pulsation ω_0 et d'amplitude θ_0 .

13. Déterminer la puissance moyenne dissipée par les frottements en fonction de C , ω_0 la pulsation du mouvement et θ_0 l'amplitude du mouvement.
14. Application numérique : En déduire le travail fourni par l'enfant pousseur après 20 oscillations de l'enfant se balançant (les valeurs numériques des différents paramètres sont ceux utilisés ou calculés aux questions précédentes).

Faire monter la balançoire (*BONUS pts*)

Une manière de faire monter la balançoire est la suivante : l'enfant peut rester assis et mettre son dos alternativement en avant ou en arrière tout en repliant puis étendant ses jambes afin de faire lever ou abaisser son centre de gravité.

On néglige à nouveau tous les frottements dans cette partie (soit $C = 0$) et, comme précédemment, on considère que la masse de la balançoire est négligeable.

Expliquer avec des schémas comment doit l'enfant faire pour monter la balançoire. Expliquer d'où vient l'énergie pour monter la balançoire. Modéliser ce mouvement de l'enfant et arriver à une équation pilote. La résoudre ou faire une analogie avec des phénomènes connus. Commenter la validité et les limites du modèle.

———— FIN DE L'ENONCE ————

Part II

English

Problem I. Interception of a ballistic missile (7 pts)

A ballistic missile, considered to be a point M of mass m , is launched at the instant $t = 0$ from the point O with initial velocity $\vec{v}_0$, at an angle α with the horizontal plane Oxy . The movement of the missile is limited to the vertical plane Oxz . The frame of reference R is considered to be inertial and its associated coordinate system is $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. We note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ the gravitational acceleration and $\vec{r} = (x, y, z)$ the position vector of M .



Modelisation in the absence of drag

We neglect all effects of air drag. The only force taken into account is the gravitational one.

1. Determine the expressions of $x(t), y(t), z(t)$ - the coordinates of point M , as a function of the constants of the problem.
2. Deduce the trajectory equation of point M in the form $z = f(x)$.
3. Find the range P and the maximal altitude h_{max} of the missile. We measure those quantities from the launch altitude $z_0 = 0$.
4. For what value of α the range P is maximal? What is the maximal range P_{max} ?

We wish to intercept the missile during flight. We thus launch without initial velocity at the instant t_1 (such that $t_1 > 0$) a shell, which is a bait, from the point N_0 with coordinates (x_0, z_0) . We consider this shell to be a material point N of mass m' and its position is given by $\vec{r}' = (x', y', z')$. We are interested in the instant t_1 at which we should launch the shell in order to intercept the missile at the instant T as a function of the initial position N_0 , supposed to be known.

5. Determine the expressions $x'(t), y'(t), z'(t)$ giving the position of the shell.
6. Deduce at which instant T the interception takes place.
7. Deduce a second degree equation for t_1 , which represents the intersection of the two trajectories. Write it down as a function of the problem's parameters.
8. What condition should be satisfied in order for this equation to have a solution? Where should the point N_0 be situated to fulfil this condition? Make a diagram to illustrate it.
9. Determine at what instant t_1 the shell should be launched in order to achieve a successful interception. Write down the result as a function of T and other parameters of the problem. Show that the position of N_0 should satisfy a second condition. Why is that and what is the condition? Make a diagram showing the possible launch positions (the drop zone) for the shell.
10. Suppose the initial position of the shell (x_0, z_0) , given in reference to the missile, is known with relative precision of 0.01%. The velocity components are each known within 0.1% accuracy. Deduce the relative uncertainty when calculating the instant T . Calculate its numerical value.

Modelisation with drag

It is actually necessary to take into account the air drag forces acting upon both the missile and the shell. Considering the aerodynamic profile of the missile, we are going to assume linear drag force acting upon it: therefore the air is acting with the following force on the missile $\vec{F}_{tr} = -\lambda \vec{v}$, where $\lambda > 0$ is the linear drag coefficient. However, the shell having less aerodynamic shape, we launch it vertically this time with initial velocity $\vec{v}_0' = -v_0' \vec{u}_z$ and we are going to assume the drag force to be quadratic and

taking the following form $\vec{F}_{trq} = -kv'\vec{v}$, where $\vec{v} = -v'\vec{u}_z$ is the velocity of the shell ($v' > 0$) and $k > 0$ is the quadratic drag coefficient.

11. Determine the dimensions and the units of both drag coefficients λ and k .
12. Make a diagram showing the forces acting upon the missile. Write down Newton's law of motion for the missile.
13. Find the solution to the equation established in the previous question. Check that $\vec{r}(t)$ takes the following form:

$$\vec{r}(t) = \tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \tau \vec{g}t \quad (4)$$

and deduce the projections along the three principal axes. We note $\tau = \frac{m}{\lambda}$

HINT: To solve this question it would be helpful to know how to calculate derivatives. We thus give you the necessary "rules":

The velocity is the derivative of the position and the acceleration is the derivative of the velocity:

$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}$ and $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}$ where we note the derivative with respect to time with $\frac{d}{dt}$

Let f and g be two functions of the variable t . We have:

$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$ and $\frac{d}{dt}(f+g) = \frac{d}{dt}f + \frac{d}{dt}g$

We also give you the derivatives of some functions that are going to be useful:

$\frac{d}{dt}(e^{ct}) = c \cdot e^{ct}$ et $\frac{d}{dt}(c \cdot t^n) = nc \cdot t^{n-1}$

In order to answer the previous question it is sufficient to check that the given expression of $\vec{r}$ satisfies the established equation.

14. Determine the new expression of the instant of interception T' . You can use the expression of $\vec{r}(t)$ given in the previous question, even if you have not obtained it yourself.
15. Establish the differential equation that v' obeys, where v' is the velocity of the shell. Show that this equation allows for a maximal limiting velocity v'_l and give its expression as a function of the parameters of the problem. Deduce the characteristic time of the problem τ_o from the established equation.

To simplify the problem we suppose that the velocity of the shell varies in a linear fashion until it reaches the maximal limiting velocity, which it does after accelerating for a duration τ_o and afterwards it stays constant.

16. Comment on the validity of this model. Trace a graph showing the evolution of $\vec{v}$ as a function of time.
17. Obtain the expression $z_{shell}(t)$, knowing that $T' > t'_1 + \tau_o$.
18. Establish the equation determining t'_1 and solve it.

Problem II. Submarine propulsion (6 pts)

Systems governing the propulsion of submarines must be silent, in order to be harder to detect by an adversary, and at the same time must function in an anaerobic fashion - meaning in the absence of air, given that during full submersion fresh air is scarce. Nuclear propulsion is possible solution and is largely used, especially for military purposes. The AIPs (Air Independent Propulsion) are another class of submarines using more conventional methods, capable of working without a steady supply of fresh air and in the same time not using nuclear technologies thereby avoiding any nuclear risks altogether. We are going to study a particular example of those AIPs - the Stirling engine.

Stirling engine

The Stirling engine was developed during the 19th century and was fast forgotten due to the emerging internal combustion engines (working with gasoline and diesel fuel). It can, however, see much more use in the future due to, among other things, its advantages in terms of environmental protection. The structure of the engine is shown in the following figure.

In the main chamber, where the working fluid is located, we find the power piston and another piston called the displacer piston, its role is to transfer the working fluid from the compression volume (the cold zone) to the expansion volume (hot zone) and vice-versa. During this transfer the fluid is coming into contact with the hot plate at the temperature T_3 , the regenerator and the cold plate at the temperature T_1 . The working fluid is going through a cycle, which has four stages:

- During the compression stage $1 \rightarrow 2$, the displacer piston is in the uppermost position (also called top dead center) and the fluid, in its entirety situated in the cold zone, is compressed by the power piston during its upwards movement.
- At point 2, the power piston is at its uppermost position (top dead center), and the displacer piston is moving downwards, thus transferring the compressed fluid from the cold to the hot zone during the transition $2 \rightarrow 3$, the working fluid receives heat firstly from the regenerator and afterwards by the hot plate.
- During the transition $3 \rightarrow 4$ the fluid is expanding in the given volume, where it is still being heated by the hot plate. This expansion is causing both the power and displacer pistons to go downwards.
- During the transition $4 \rightarrow 1$, after the power piston has reached its bottommost position (bottom dead center), the displacer piston is moving upwards, which causes the fluid to transfer towards the compression volume (cold zone). During this transition the fluid goes through the regenerator, thus transferring heat towards it, after which it is being cooled down by the cold plate.

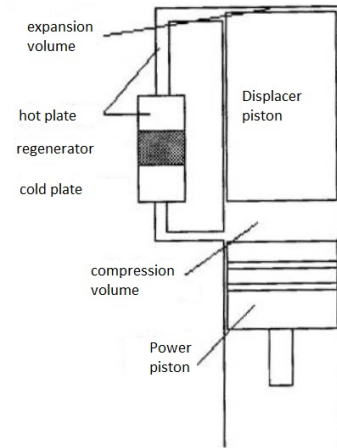


Figure 4 – Structure of Stirling engine

In practice the regenerator is a heat exchanger: the fluid transfers heat towards it during one stage and receives it back during later stage.

We are going to study the ideal Stirling cycle, during which n moles of ideal gas, with thermal capacities ratio $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ are subjected to the transformations in question, namely:

- compression $1 \rightarrow 2$ isothermal and reversible, at the temperature $T_1 = 300K$.
- heating up $2 \rightarrow 3$ isochoric transformation, ending up at the temperature $T_3 = 600K$ at point 3.
- expansion $3 \rightarrow 4$ isothermal and reversible, at the temperature T_3 .
- cooling down $4 \rightarrow 1$ isochoric transformation, ending up at point 1.

The only work during those transformations is due to the pressure. We remind you that the thermal capacity at constant volume is given by: $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$, where R is the ideal gas constant.

1. Draw four diagrams, each corresponding to one of the four transitions ($1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$). Each of those diagrams should be similar to the one given (Fig.), explicitly showing the positions of the power piston and the displacer piston for the transition in question, as well as each piston's respective range of motion and an arrow indicating its direction of movement. Write down the transformations in progress for each diagram.
2. Represent the Stirling engine cycle on a ($p; V$) diagram, which shows the gas pressure as a function of its volume. How would you determine if the system is acting as a conventional engine - using temperature difference in order to generate work, or as a heater - using external work to drive it, in order to create temperature difference? Recall the first law of thermodynamics, which accounts for the heat exchange and mechanical work acting upon a system and its internal energy.
3. Show that the work W_{12} received by the fluid during the compression stage can be expressed in the following way $W_{12} = nRT_1 \ln(\rho)$, where $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ is the compression ratio (the volumes being respectively those of state 1 and 2). Deduce the heat transfer Q_{12} received by the fluid during this compression. State explicitly the signs of W_{12} and Q_{12} .
4. Express the heat transfer Q_{23} received by the fluid during the heating up, as a function of n , R , T_1 , T_3 and γ . State explicitly its sign.

5. Express the work W_{34} received by the fluid during the expansion, as a function of n , R , T_3 and ρ . Deduce the heat transfer Q_{34} received by the fluid during the expansion. State explicitly the signs of W_{34} and Q_{34} .
6. Express the heat transfer Q_{41} received by the fluid during the cooling down as a function of n , R , T_1 , T_3 and γ . State explicitly its sign. If the regenerator is ideal, the heat it transfers to the fluid is given by $q_{regenerateur} = q_{23} + q_{41}$. Comment.
7. The heat exchanges during the isochoric transformations are internal for the engine. The only heat exchanges with the exterior are during the isothermal stages. Deduce the efficiency r of the engine as a function of T_1 and T_3 . Calculate its numerical value.
8. Write down the expression of the Carnot engine efficiency e_C operating between two heat sinks of temperatures T_1 and T_3 . Compare the result to r - the Stirling engine efficiency with the ideal regenerator. We remind you that the Carnot cycle consists of two isothermal transformations and two adiabatic transformations. It is not required to derive the expression of e_C .

Nuclear propulsion

Another method of submarine propulsion is using a nuclear reactor, which supplies energy thanks to the process of nuclear fission of a fuel such as uranium (primary circuit). This energy is used to vaporise water, which will drive a turbine, connected to an alternator. The alternator produces electrical power, which is directed towards the propeller of the submarine (Fig.5).

We are going to investigate the secondary circuit (Fig.6).

The water enters the pump in the form of saturated liquid (stage 1), after which it is compressed adiabatically and reversibly under the pressure determined by the vapour generator (VG). Entering into the VG, the water is in liquid form, compressed at the constant pressure P_2 . After the VG, the water is in vapour form (stage 3), at the same pressure P_2 , after which it goes through the turbine, where it expands adiabatically and reversibly, while driving the alternator. At the exit of the turbine (stage 4), the water is a two-phase mixture.

This liquid-vapour mixture is then liquefied at constant pressure in the condenser and exits at stage 1.

9. The four components of the cycle (called Rankine cycle), are the pump, the vapour generator, the turbine and the condenser, working with a steady flow of working fluid. The objective of the following question is to establish the expression of the first law of thermodynamics in this specific case. To accomplish this, we are going to consider a component C and define the closed system Σ_f in the following fashion:

- at the instant t , Σ_f consist of the fluid in C and the mass of fluid dm_e , which enters into C between t and $t + dt$;
- at the instant $t + dt$, Σ_f consist of the fluid in C and the mass of fluid dm_s which exits from C between t and $t + dt$

- (a) Draw a diagram of the component C and the system Σ_f at the instants t and $t + dt$.
- (b) Justify why $dm_e = dm_s$. We are going to note this quantity dm .

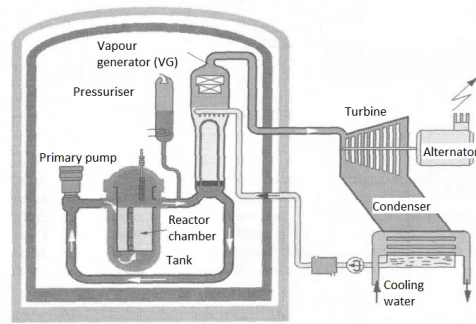


Figure 5 – Nuclear propulsion

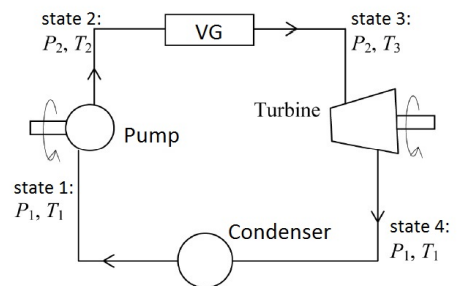


Figure 6 – Schematic representation of the studied circuit

- (c) We neglect the variation in kinetic energy (slow flow) and in gravitational potential energy (horizontal flow). Establish the following form of the first law of thermodynamics:

$$\Delta h = w_u + q \quad (5)$$

where Δh is the variation of enthalpy per unit mass between the entry and exit points of the component ($h_s - h_e$), w_u is the useful work per unit mass received by the fluid from the moving parts of the component and q is the heat transfer per unit mass received by the fluid from the component.

HINT: We remind you that the enthalpy is defined by: $H = U + pV$, where H is the enthalpy, U is the internal energy, p is the pressure and V is the volume.

In order to answer the question, it is sufficient to write down the first law of thermodynamics for the closed system and to separate two terms of work - useful work and work due to the forces of pressure.

It is known that there is no useful work done in the vapour generator or in the condenser, since they have no moving parts, and the transformations inside the pump and the turbine are adiabatic.

10. We are going to use temperature-entropy diagram for water (in ANNEX, you should turn it in when the exam is over). On this diagram, how would an adiabatic reversible transformation be represented? Justify your answer.
11. We have $P_2 = 50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $P_1 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ and $T_3 = 500^\circ \text{C}$. The points 1 and 2 correspond to states 1 and 2 and are already placed onto the $(T; s)$ diagram of water. Onto the same diagram place points 3 and 4, corresponding to states 3 and 4 and finish the Rankine cycle.
HINT: The transformation $2 \rightarrow 3$ consists of 3 stages - liquid, liquid + vapour, vapour. For the first stage of the transformation, the graph is not well represented and thus you will have to draw it by approximating. We recommend that you add in this stage last, since it is going to be the least precise.
12. With the help of the $(T; s)$ diagram, find the numerical values of T_1 , and the enthalpies per unit mass h_3 and h_4 respectively for states 3 and 4, the entropies per unit mass s_4 for state 4, $s_V(T_1)$ of pure vapour at T_1 and $s_L(T_1)$ of pure liquid at T_1 .
13. Determine the numerical value of the vapour to vapour+liquid ratio x_4 at the exit of the turbine. Express s_4 as a function of x_4 , $s_V(T_1)$ and $s_L(T_1)$.
We know that $h_1 = 440 \text{ kJ.kg}^{-1}$ and $h_2 = 475 \text{ kJ.kg}^{-1}$.
14. Using the first law of thermodynamics for steady flows, determine the expressions and the numerical values of q_{cond} and q_{VG} , the heat exchanges per unit mass, received by the fluid, respectively in the condenser and in the VG.
15. Determine the expressions and numerical values of the useful work per unit mass received by the fluid in the pump and in the turbine, respectively w_{pompe} and w_{turb} . Comment the results.
16. A fraction of the work produced by the turbine is used to drive the pump. Deduce the work per unit mass we are able to harvest at the alternator w_{alt} . Calculate its numerical value.
17. Define and calculate the numerical value of the efficiency η of the Rankine cycle.
18. Compare the two propulsion methods - Stirling engine and nuclear propulsion.

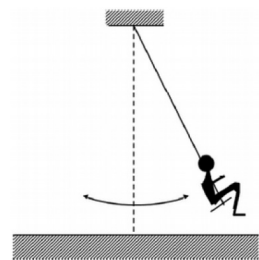
Problem III. A swing (7 pts)

A child on a swing is considered to be a point M of mass m , suspended from point O by a rigid rod of negligible mass and length l . The gravitational acceleration $\vec{g}$ is supposed to be uniform.

Furthermore, we suppose the movement of the child to be in a plane. The angle between the vertical and the rigid rod is called θ . The unitary vectors $\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, form an orthonormal right-hand triad.

Study of the child's movement in the absence of drag

In this part of the problem, all friction between the rod and the axis of rotation and all drag due to air resistance, are neglected.



1. What condition on the duration of the experiment should be true in order for the reference system to be considered as inertial? Give an order of magnitude. We suppose this condition to be met in the rest of the problem.
2. Establish the differential equation of movement for $\theta(t)$ (the equation that connects the angular acceleration and the angle $\theta(t)$), using a method of your choosing.
3. Under what condition the child on the swing will be a harmonic oscillator? Give the expression of the corresponding angular frequency ω_0 .
4. Express the maximal velocity v_{max} achieved by the child in those conditions as a function of l , ω_0 and θ_{max} .
5. Numerical application: the child starts off from an angle $\theta_0 = 30^\circ$ without initial velocity. Calculate the period of oscillations T_0 and the maximal velocity v_{max} , given that $l = 2.5m$, $g = 10m.s^{-2}$ and $m = 20kg$.

Case of linear friction force

There is some friction at the pivot point O where the rod is attached. We model this phenomenon by adding a torque (or a moment of force) accounting for this friction. The torque with respect to O is given by $\vec{\Gamma}_f = -C \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ where C is a positive constant and $\frac{d\theta}{dt}$ is the derivative of $\theta(t)$ with respect to time, which is the angular velocity $\omega(t)$.

6. Express the units of C in terms of SI (Système International) units.
7. Establish the differential equation that governs the behaviour of $\theta(t)$. Suppose that the experimental conditions allow us to use the small angles approximation and rewrite the equation using it.
HINT: Small angles approximation: $\sin(\theta) \approx \theta$
8. Given that at the initial moment $\theta = \theta_0$ and the swing has no initial velocity, check that $\theta(t)$ in the following form satisfies the differential equation:

$$\theta(t) = e^{-\frac{C}{2mL^2}t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \quad (6)$$

where $\Omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{C^2}{4m^2L^4}}$. Find A et B .

HINT: We remind you of the "rules" of taking derivatives:

We note the derivative with respect to time by $\frac{d}{dt}$.

Let f and g be two functions of the variable t . We have:

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} \text{ and } \frac{d}{dt}(f+g) = \frac{d}{dt}f + \frac{d}{dt}g$$

We also give you the derivatives of some functions that might be useful:

$$\frac{d}{dt}(e^{ct}) = c \cdot e^{ct} \text{ and } \frac{d}{dt}(\sin(At)) = A \cos(At), \frac{d}{dt}(\cos(At)) = -A \sin(At)$$

9. What inequality should C satisfy in order for the movement of the child to be considered pseudo-periodic?
10. Under what condition can we approximate the pseudo-period with the period found earlier T_0 ?
11. Numerical application: Consider this condition to be met, we suppose that $\theta = 30^\circ$. We make the observation that the amplitude of the movement is reduced in half over 20 oscillations. Calculate the value of the constant C .

The friction is slowing down the swing and so a second child comes to help the first one by pushing the swing with a horizontal force, which is periodic, but not harmonic, and the 2nd child is compensating the effects of friction, so it tries to keep the maximal angle reached by the swing the same. This force is applied over a short period of time and is constant over that duration.

12. At which instant and at what frequency should the 2nd child apply its force, in order to be most efficient? What is the period T of that force $F(t)$?

Suppose that the force is applied over a sufficiently small duration and the friction is weak enough so we can assume $\theta(t)$ is following a sinusoidal evolution of angular frequency ω_0 and amplitude θ_0 .

13. Determine the average power dissipated by the friction as a function of C , ω_0 the angular frequency of the movement and θ_0 - the amplitude of the movement.
14. Numerical application: Deduce the amount of work the 2nd child has to generate over 20 oscillations.

Make the swing rise on our own (*EXTRA pts*)

A way of making the swing rise is the following: the child stays seated and slightly moves its body back and forth, while simultaneously folding and expanding its legs to make its center of mass move up or down.

We neglect the air drag (meaning $C = 0$) and, as before, we consider the mass of the swing to be negligible.

Explain, using diagrams, how precisely the child should move in order to make the swing rise and accelerate. Explain where the energy to rise the swing comes from. Model the movement of the child and find the equation that governs the behaviour of the swing. Solve it or make an analogy with a well known physics phenomenon. Comment on the validity and limitations of our model.

———— **END OF PAPER** ————

ANNEXE / ANNEX

NOM / NAME :

