INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://balkanski-foundation.org/

Concours Général de Physique «Minko Balkanski»

17 août 2020

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Ако намерите грешка в условията на задачите, отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите**.

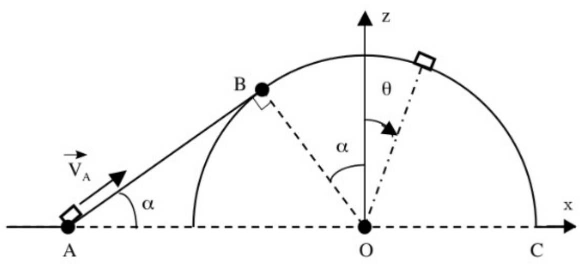
Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème 1. *(6pts)*

Un bloc de glace de masse $m = 5,0 kg$ et de centre d'inertie M est lancé sur un tremplin composé d'une part, d'une rampe rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale, et d'autre part d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2,0 m$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (cf figure ci-contre). Le tremplin est conçu de sorte que le triangle AOB est rectangle en B (donc la rampe est tangente au cercle en B). À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, puis il glisse sans frottement sur le tremplin.



On admet que le mouvement a lieu dans le plan Oxz et on définit la base cartésienne associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. On désigne par $g = 9,8 m.s^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur. Le référentiel d'étude est terrestre et considéré galiléen.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ à l'instant t sur la rampe, en fonction des données, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$.
2. Montrer que le point B est atteint seulement si la norme v_A de $\vec{v}_A$ est supérieure à une valeur v_ℓ. Exprimer v_ℓ puis calculer sa valeur numérique.

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

3. Exprimer la date t_B à laquelle le glaçon atteint le point B.
4. Exprimer la norme v_B de la vitesse au point B.

On s'intéresse maintenant à la phase du mouvement sur l'arc BC. La position de M est repérée par l'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}_z; \overrightarrow{OM}})$. On travaille dans la base polaire définie par $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dirigé vers les θ croissants (sens positif horaire).

5. Faire un schéma des forces appliquées au glaçon, puis projeter le théorème de la résultante cinétique sur les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.
6. Montre que l'expression de la vitesse angulaire suivant satisfait les équations de mouvement établies lors de la question précédente $\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R} \cdot cos(\theta) + Const.$ Exprimer la constante en termes des paramètres du problème.
7. En déduire l'expression de la réaction normale $\vec{N}$ du support en fonction de θ, m, g et R, v_B et α.
8. A quelle condition sur v_B, puis sur v_A, n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ? Que donne la valeur numérique ?
9. Déterminer finalement l'expression de la position θ_d, valeur de θ pour laquelle le glaçon quitte la piste.
10. Application numérique : que se passe-t-il si $v_A = 7,0 m.s^{-1}$?

Problème 2. *(5pts)*

On s'intéresse ici à des disques de type CD-RW ("réinscriptible"), c'est-à-dire sur lesquels il est possible d'enregistrer des informations mais aussi de les effacer. La structure de ces disques est la suivantes : une couche de matériau photosensible (à base d'argent, d'indium, de tellure et d'antimoine), est insérée entre la couche métallique réfléchissante et la couche de polycarbonate. Ce matériau photosensible possède deux variétés allotropiques (on parle de "polymorphisme") : l'une est polycristalline et transparente, l'autre est amorphe et opaque. Si l'on fait fondre la couche photosensible polycristalline pendant une durée brève, elle adopte l'état amorphe lors du refroidissement. C'est le processus "d'écriture". "L'effacement"

s'obtient en chauffant la couche photosensible moins fortement mais pendant une durée plus longue. Ce processus permet de ramener la couche photosensible dans son état polycristallin. On s'intéressera ici exclusivement au processus d'écriture de l'information. On note h_1 l'épaisseur de la couche photosensible, c_1 sa capacité thermique massique, μ_1 sa masse volumique, et ℓ_1 son enthalpie massique de fusion. Sa température de fusion est notée T_{fus}.
INDICATION : L'enthalpie de fusion est l'énergie absorbée sous forme de chaleur par un corps lorsqu'il passe de l'état solide à l'état liquide à température et pression constantes.

Généralités sur les systèmes diphasés

1. Quelle est la particularité d'un mélange diphasé d'un corps pur dont la pression P est fixée ?
2. Comment appelle-t-on les transitions liquide → vapeur et solide → vapeur ?
3. Dessiner l'allure du diagramme (P, v) d'un corps pur pour la transition liquide-vapeur, v représentant le volume massique. Tracer un ou plusieurs isothermes et préciser les domaines du liquide seul, de l'équilibre liquide-vapeur et de la vapeur sèche.

Evaluation de la vitesse maximale d'écriture

Le faisceau laser d'écriture est assimilé à un cylindre circulaire de rayon r_0, d'axe orthogonal à la surface du disque. La puissance thermique apportée par le laser à la couche photosensible est notée $\mathcal{P}_0$. Elle est supposée uniformément répartie dans la section du faisceau. Le laser fonctionne en régime stationnaire. Dans un premier temps, le disque ne tourne pas.

4. Exprimer en fonction des données la masse m_1 de couche photosensible qui reçoit la lumière du laser.
5. Exprimer le transfert thermique Q_1 qu'il faut apporter à la masse m_1 de matière photosensible pour la faire passer de la température ambiante T_0 à la température fusion T_{fus} sans changer d'état ?
6. Exprimer le transfert thermique Q_2 qu'il faut apporter à la masse m_1 pour la faire fondre entièrement, la température restant constante et égale à T_{fus} ?
7. On suppose que la puissance du laser est totalement absorbée par la couche photosensible. Exprimer en fonction des données la durée minimale Δt_{min} pendant laquelle il est nécessaire d'illuminer le disque à l'arrêt, pour réchauffer et faire fondre entièrement la zone de la couche photosensible située en face du faisceau ?
8. Calculer Δt_{min} pour $c_1 = 2,50^2 J.K^{-1}.kg^{-1}$, $T_0 = 300K$, $T_{fus} = 900K$, $\ell_1 = 1,00 \times 10^5 J.kg^{-1}$, $\mathcal{P}_0 = 14,0mW$, $h1 = 1,00\mu m$, $r_0 = 0,550\mu m$, $\mu_1 = 3,00 \times 10^3 kg.m^{-3}$.

À présent, le disque optique est animé d'un mouvement de rotation tel que la piste du CD-RW défile à vitesse linéaire constante v_1 devant le faisceau laser.

9. Quelle est la surface dS balayée sur le disque optique par le faisceau laser pendant une durée dt ?
10. Quel est la masse dm de matériau photosensible que le laser doit amener de la température ambiante T_0 à la température T_{fus} puis faire fondre pendant dt ?
11. En déduire l'expression de la vitesse maximale $v_{1,max}$ d'écriture du CD-RW pour la puissance $\mathcal{P}_0$ du laser.
12. Calculer $v_{1,max}$ à l'aide des valeurs numériques données à la question 8.

Problème 3. *(2.5pts)*

La recherche d'exoplanètes nécessite des techniques très précises d'analyse des signaux lumineux en provenance des étoiles. Son développement a parallèlement conduit à l'émergence de l'astérosismologie, qui étudie les vibrations internes des étoiles. Le son qui leur est associé ne nous parvient pas directement, mais les fréquences obtenues peuvent être utilisées pour en déduire des informations sur l'étoile. En outre des artistes ont travaillé à partir de ces données pour créer des œuvres musicales.

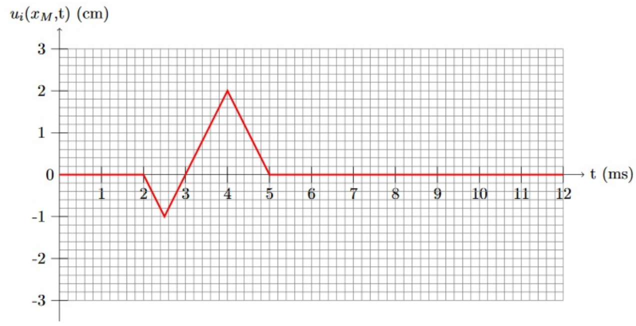
On recherche un ordre de grandeur de ces fréquences par analyse dimensionnelle. La cohésion de l'étoile est assurée à cette échelle par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir la masse M_e de l'étoile, son rayon R, et la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$.

1. Rappeler l'expression de la loi de gravitation universelle entre deux masses supposées ponctuelles. On fera un schéma.
2. Par analyse dimensionnelle, établir une expression possible de la fréquence de vibration f en fonction de M_e, R et $\mathcal{G}$, en introduisant un coefficient sans dimension k.
3. Que trouve-t-on pour le Soleil (on prendra $k = 1$) ? Est-ce une fréquence audible par l'oreille humaine ? Données : $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} kg$, $R_{\odot} = 7 \times 10^5 km$, $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Problème 4. *(6.5pts)*

Propagation d'un signal le long d'une corde

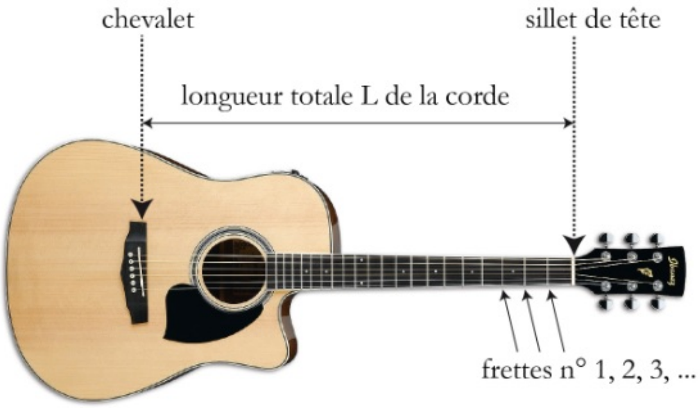
Un signal progressif (perturbation) se propage le long d'une corde d'axe (Ox), tendue.
À la date $t = 0$ le signal part du point O, origine de l'axe (Ox) et se propage selon les x croissants. Le graphique ci-contre représente le déplacement au cours du temps d'un point M de la corde d'abscisse $x_M = 8,0cm$, déplacement noté $u_i(x_M, t)$



1. À quelle date t_1 la perturbation arrive-t-elle en M ?
   Calculer la célérité c de l'onde le long de la corde.
2. La célérité des ondes sur une corde tendue dépend de la tension T de cette corde (force avec laquelle elle est tendue) et de sa masse linéique μ (masse par unité de longueur). Par analyse dimensionnelle, donner l'expression de c en fonction de T et μ, à un facteur multiplicatif sans dimension près.
3. Pour augmenter cette célérité, pourrait-on tendre la corde plus fortement ? Choisir une corde de masse plus grande (pour une même longueur) ? Produire une perturbation d'amplitude différente ? Justifier les réponses.
4. Pendant quelle durée Δt le point M est-il affecté par le passage de l'onde ? Quelle est la longueur de la perturbation ?
5. On considère un point N d'abscisse $x_N = 32,0cm$. À quelle date t_2 la perturbation arrive-t-elle en N ? Représenter l'évolution temporelle du signal au point N sur une figure.
6. Exprimer l'allure $u_i(x, t_3)$ de la corde à la date $t_3 = 8,0ms$. La représenter sur une figure. On placera les points M et N sur la corde.
7. La corde est en fait fixée à un support à l'abscisse $x = L = 40cm$. Justifier qu'il existe une onde réfléchie $u_r(x, t)$. Établir son expression en fonction de l'onde incidente u_i en x_M. Représenter l'allure de $u_r(x, t_4)$ à la date $t_4 = 15,0ms$ sur une figure.

Positionnement des frettes d'une guitare

On considère la corde de «La» d'une guitare, corde homogène, quasi-inextensible, de masse linéique μ(masse par unité de longueur) et de longueur L, tendue entre ses deux extrémités fixes O et A avec une tension constante T. Les points O (au niveau du chevalet, cf. figure ci-dessous) et A (au niveau du sillet) sont solidaires de la guitare. À l'équilibre, la corde est rectiligne.
Pour le guitariste, les notes accessibles sont quantifiées par des barrettes (frettes), placées sur le manche. Ces frettes permettent de réduire momentanément la longueur de la corde, la tension T (et donc la célérité c des ondes) restant constante. En bloquant la corde avec le doigt contre la frette, le guitariste diminue la longueur de la corde libre de vibrer (longueur de vibration allant alors de la frette jusqu'au chevalet) et obtient la note voulue. On cherche à déterminer les emplacements à donner aux frettes lors de la construction du manche de la guitare.



8. Donner la définition d'un mode propre sinusoïdal de vibration de la corde. Indiquer le lien entre la longueur L de la corde et la longueur d'onde λ_n du n-ième mode propre.En déduire les expressions des fréquences f_n correspondantes, en fonction de c et L, et l'expression mathématique du n-ième mode $u_n(x,t)$
9. Dessiner l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental (n= 1) à deux instants différents. Faire de même pour les trois harmoniques suivants (n= 2, 3 et 4)
10. La corde de « La » a une longueur $L_{La} = 0,64m$, et correspond à la fréquence $f_{La} = 440Hz$. En déduire la célérité des ondes dans cette corde.
11. Justifier où il faut placer la frette permettant de «monter» la note d'une octave, c'est-à-dire pour doubler la fréquence fondamentale et donc obtenir la fréquence $f'_{La} = 2f_{La}$?
12. La guitare s'appuie sur la gamme «dodécaphonique» (12 sons) : do - do# - ré - ré# - mi - fa - fa# - sol - sol# - la - la# - si - do (note de l'octave supérieure). L'intervalle entre deux notes consécutives de cette gamme s'appelle le demi-ton. Le signe #, ou «dièse», signifie qu'un demi-ton est ajouté à la note. On passe d'une note de la gamme à la suivante en multipliant la fréquence toujours par la même constante K. En répétant 12 fois l'opération, on retrouve l'intervalle d'une octave.Calculer la valeur de la constante K.
13. Déterminer,en fonction uniquement de K et de L_{La}, la distance Δx sur le manche de la guitare entre le sillet et la première frette permettant de passer du La au La# . Calculer la valeur numérique de Δx.
14. Le fait d'effleurer la corde, sans la presser complètement, permet de la laisser vibrer sur toute sa longueur tout en imposant un nœud de vibration à l'endroit où l'on pose le doigt : ceci a pour effet de supprimer une partie des harmoniques. Dans le cas de la corde «La», de fréquence fondamentale $f_{La} = 440Hz$, en effleurant la corde soit au quart soit aux trois quarts de sa longueur L_{La}, un son plus aigu est émis, avec seulement quelques harmoniques. Évaluer la fréquence f de vibration du son émis.

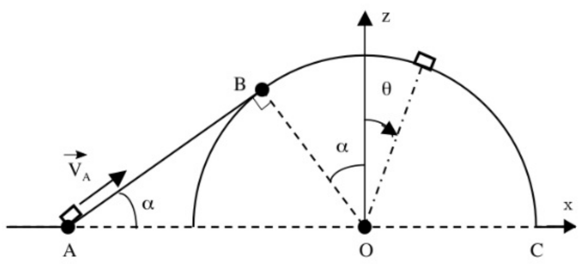
——— FIN DE L'ENONCE ———

Part II

English

Problem I. *(6pts)*

A block of ice of mass $m = 5,0kg$ and center of mass M is launched on a track consisting of, firstly, a rectangular ramp AB tilted at an angle $\alpha = 30°$ with respect to the horizontal, and secondly, a circular part BC of radius $R = 2,0m$ and angle $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (see the figure). The trampoline is designed so that the triangle AOB has right angle at B (so the ramp is tangent to the circle at B). At moment $t = 0$, the ice is launched from A with velocity $\overrightarrow{v}_A$, then it slides without friction on the track. Assume that the movement happens in the plane Oxz and we define the associated cartesian system $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$. We denote $g = 9,8m.s^{-2}$ the gravitational acceleration. The reference frame is the one of the laboratory and it is considered to be Galilean (inertial).



1. Determine the expression of the velocity $\overrightarrow{v}(t)$ at moment t on the ramp as a function of the given data, in the basis $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$.
2. Show that the point B is reached only if the norm v_A of $\overrightarrow{v}_A$ is larger than a given value v_ℓ. Express v_ℓ and calculate its numerical value.

For the next questions, we assume that the previous condition is verified.

3. Express the moment t_B when the ice reaches the point B.
4. Express the norm v_B of the velocity at point B.

We are now interested in the phase of movement on the arc BC. The position of M is defined by the angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}_z;\overrightarrow{OM}})$. We work in the polar basis given by the vectors $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$ and $\overrightarrow{u}_\theta$ directed along increasing values of θ (i.e. clockwise).

5. Make a diagram with the forces acting on the ice, then project them along the vectors $\overrightarrow{u}_r$ and $\overrightarrow{u}_\theta$ as to obtain two scalar equations.
6. Show that the following expression of the angular velocity satisfies the equations of motion already established in the previous question $\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{R} \cdot cos(\theta) + Const.$ Express the constant in terms of known parameters.
7. Deduce the expression of the normal reaction $\overrightarrow{N}$ of the support as a function of θ, m, g, R, v_B and α.
8. Under what condition on v_B, and then on v_A, there won't be a take-off before the summit of the track? Calculate the respective numerical values.
9. Determine the expression of the position θ_d, the value of θ for which the ice leaves the track.
10. Numerical application: what happens if $v_A = 7,0m.s^{-1}$?

Problem II *(5pts)*

We consider CD-RW ("rewritable") discs, i.e. on which it is possible to save information, as well as to delete it. The disc structure is as follows: a layer of photosensitive material (composed of silver, indium, antimony, tellurium) is inserted between the metal reflecting layer and the polycarbonate layer. This photosensitive material has two allotropic forms (one speaks of "polymorphism"): one of them is polycrystalline and transparent, the other one is amorphous and opaque. If one melts the photosensitive polycrystalline layer in a short lapse of time, it takes the amorphous form upon cooling. It is the "writing" process. The "deletion" is obtained by heating less intensively, but for a longer period of time.

This process brings the photosensitive layer to its polycrystalline phase. We will be interested only in the writing process.

Let h_1 denote the thickness of the photosensitive layer, c_1—its specific heat capacity, μ_1—its density, and ℓ_1—its specific enthalpy of fusion. Its melting temperature is denoted T_{melt}.
HINT: The enthalpy of fusion is the energy, typically heat, required by a given quantity of a substance to change its state from a solid to a liquid, at constant pressure and temperature.

Biphasic systems

1. What is the particularity of a biphasic mixture of a pure substance at fixed pressure P?
2. How does one call the transitions liquid $\rightarrow$ vapour and solid $\rightarrow$ vapour?
3. Draw the shape of the (P, v) diagram of a pure substance for the transition liquid-vapour, v representing the specific volume. Plot one or several isotherms and specify the domains of pure liquid, liquid-vapour equilibrium and dry vapour.

Evolution of the maximal writing speed

The shape of the writing laser beam is approximated by a circular cylinder of radius r_0, with axis orthogonal to the disc surface. The thermal power transferred by the laser to the photosensitive layer is denoted $\mathcal{P}_0$. It is assumed uniformly distributed over the beam section. The laser operates at stationary regime. At first the disc is immobile.

4. Express the mass m_1 of photosensitive material receiving laser light as a function of the problem parameters.
5. Express the heat transfer Q_1 needed for a mass m_1 of photosensitive material to heat up from room temperature T_0 to the melting temperature T_{melt} without changing state?
6. Express the heat transfer Q_2 needed for a mass m_1 to melt completely, at constant temperature equal to T_{melt}?
7. We assume that the laser's power is completely absorbed by the photosensitive layer. Express in terms of the problem parameters the minimal lapse of time Δt_{min} during which one needs to illuminate the disc at rest, in order to heat and melt down entirely the zone of the photosensitive layer located under the light beam?
8. Calculate Δt_{min} for $c_1 = 2,50 \times 10^2 J.K^{-1}.kg^{-1}$, $T_0 = 300K$, $T_{melt} = 900K$, $\ell_1 = 1,00 \times 10^5 J.kg^{-1}$, $\mathcal{P}_0 = 14,0mW$, $h_1 = 1,00\mu m$, $r_0 = 0,550\mu m$, $\mu_1 = 3,00 \times 10^3 kg.m^{-3}$.

Currently, the opaque disc is set to rotate so that the CD-RW track runs at constant linear speed v_1 in front of the laser beam.

9. What is the surface dS swept on the optical disc by the laser beam during time dt?
10. What is the mass dm of the photosensitive material, which the laser must heat from the ambient temperature T_0 to the temperature T_{melt} and then melt in time dt?
11. Deduce the expression of the maximal speed $v_{1,max}$ of writing of CD-RW from the power $\mathcal{P}_0$ of the laser.
12. Compute $v_{1,max}$ for the numerical values given in question 8.

Problem III. *(2.5pts)*

Finding exoplanets makes it necessary to develop very precise techniques for the analysis of light signals coming from stars. This development has led in parallel to the emergence of the asteroseismology, which studies the internal vibrations of stars. Although the associated "sound" does not come to us directly, the obtained frequencies can be used to deduce information about the star. In addition, artists have used these data to create musical pieces.

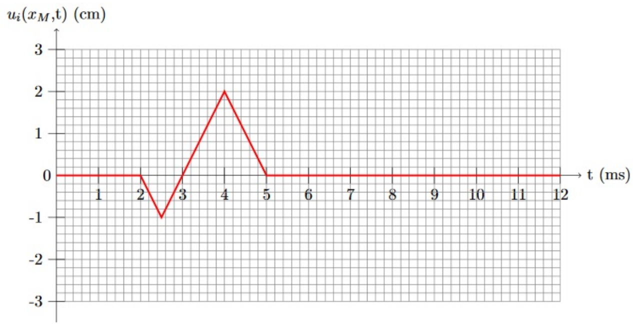
We are looking for the order of magnitude of these frequencies by dimensional analysis. The cohesion of the star is ensured on this scale by the gravitational forces. Thus, we will work with the mass M_e of the star, its radius R, and the universal gravitational constant $\mathcal{G}$.

1. Recall the expression of the law of universal gravity between two point masses. Make a diagram.
2. By dimensional analysis, establish a possible expression for the frequency of the vibration f in function of M_e, R and $\mathcal{G}$ by introducing a coefficient k without dimension.
3. What do you find for the Sun (take $k = 1$)? Is this an audible frequency? Data: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} kg$, $R_{\odot} = 7 \times 10^5 km$, $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Problem IV *(6.5pts)*

Propagation of signal along a string

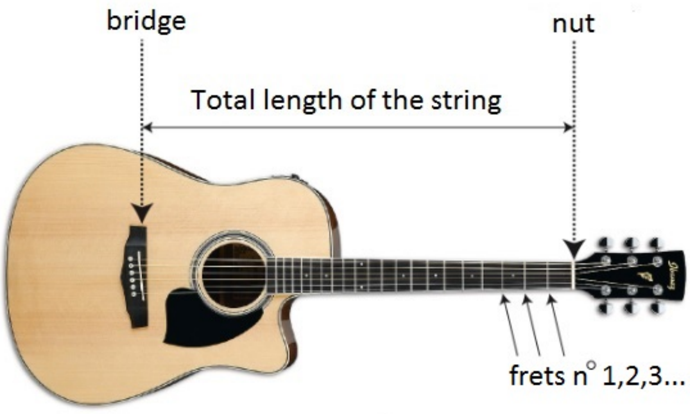
A progressive wave (perturbation) is propagating along a stretched string, coinciding with the axis Ox.
At time $t = 0$ the perturbation is at point O, the origin of the axis Ox, and propagates in the direction of increasing x. The attached graph shows the displacement as a function of time, of a point on the string, denoted M. It is located at $x_M = 8,0cm$, its displacement is *known* and denoted $u_i(x_M, t)$.



1. Determine the moment of time t_1, when the perturbation arrives at point M.
   Calculate the speed of propagation c of the perturbation along the string.
2. The speed of propagation of progressive waves on a stretched string depends on its tension T (force which is applied on the string to keep it stretched) and its mass per unit length μ. By the means of a dimensional analysis, give the expression of c as a function of T and μ and a dimensionless multiplicative factor.
3. On order to increase this speed c, can we increase the tension T? Or choose a string with higher mass per unit length? Or create a perturbation with bigger amplitude? Justify your answers.
4. For what duration Δt the point M is affected by the passage of the perturbation? What is the length of that perturbation?
5. We consider a point N situated at $x_N = 32,0cm$. At which moment of time t_2 the perturbation will arrive at N? Represent the temporal evolution of the signal received at point N on a graph.
6. Express $u_i(x, t_3)$, where $t_3 = 8,0ms$. Draw it on a graph and place the points M and N.
7. The string is fixed to a mount at $x = L = 40cm$. Justify the existence of a reflected wave. Establish its expression as a function of the incident wave u_i at x_M. Draw on a graph $u_r(x, t_4)$, where $t_4 = 15,0ms$.

Positioning of the guitar frets

We consider the A ("La") string of a guitar, it is homogeneous, quasi-inextensible, of mass per unit length μ and length L, stretched between two points O and A with a constant tension T. The points O (at the bridge, cf. the adjacent figure) and A (at the nut) are fixed with respect to the guitar. At equilibrium the string is straight.
The guitar player can access different notes by the use of bars (called frets), placed on the fretboard of the guitar neck. Those frets let the guitar player temporally reduce the length of the string, while keeping the tension T (and as so the speed of propagation of waves c) constant. This effect is accomplished by pressing the string against the fret with finger thus reducing the length of freely vibrating string (the part of the string able to freely vibrate is then fixed at the bridge and at the fret) and obtaining the desired note. We will try to find where the constructor of a guitar should place the frets on the guitar neck.



8. Give the definition of a sinusoidal normal mode of vibration of string. What is the relation between the length of the string and the wavelength of the n-th normal mode λ_n? Write down the expressions of the corresponding frequencies f_n and of the modes themselves $u_n(x,t)$ as a function of c and L.
9. Sketch the deformation of the string associated with the fundamental mode (n=1) at two different moments of time. Do the same for the 3 following modes (n=2, 3 and 4).
10. The A ("La") string is $L_{La} = 0,64m$ long and the corresponding frequency of the note is $f_{La} = 440Hz$. Find the speed of propagation of waves for this string.
11. Justify where should the manufacturer place the fret that permits the guitar player to go one octave higher, meaning to double the fundamental frequency and thus obtain $f'_{La} = 2f_{La}$.
12. The guitar is based on the «dodécaphonic» (12 sons) scale: C - C# - D - D# - E - F - F# - G - G# - A - A# - B - C (resp. do - do# - ré - ré# - mi - fa - fa# - sol - sol# - la - la# - si - do), the last C being one octave higher compared to the first C. The interval between two adjacent notes of this scale is called a semitone. The sign # ,read here as "sharp", means a semitone is added to the note. We go from one note of the scale to the next one by multiplying its frequency by the same constant factor K. By repeating this procedure 12 times, we have effectively went over 1 whole octave. Calculate the numerical value of K.
13. Determine the distance Δx on the fretboard between the nut and the first fret, which corresponds to the note A# (up from A), as a function of K and L_{La}. Calculate the numerical value of Δx.
14. Lightly touching the string over a fret, without pressing it, lets the string vibrate over its whole length (from bridge to nut), while imposing a node where the guitar player has placed his finger: the effect of this technique is to suppress some of the harmonics. In the case of the A ("La") string, of fundamental frequency $f_{La} = 440Hz$, we press lightly the string at $1/4$ or at $3/4$ of its length L_{La}, the pitch of the sound goes up and it contains only a handful of harmonics. Find the frequency of the emitted sound.

——— END OF PAPER ———