

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Варна, 12-13 ноември 2011 г.

Специална тема

Задача 1. Интерференция от три процепа

а) Електричните полета далеч от екрана създадени от трите процепа са съответно

$$E_1 = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t + \phi_1\right)$$

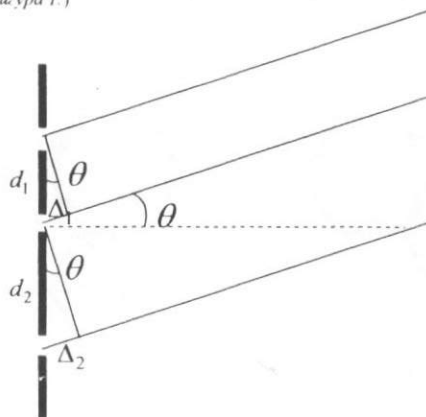
$$E_2 = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t + \phi_2\right) \quad [0.5\tau]$$

$$E_3 = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t + \phi_3\right)$$

Пълното електрично поле е

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad [0.5\tau]$$

За простота нека изберем момента време да е $t = 0$ и $\phi_1 = 0$. Тогава ϕ_2 и ϕ_3 може да изразим чрез разликата в оптичните пътища (виж *Фигура 1*.)



Фигура 1

Тогава за интензитета имаме

$$I = E^2 = E_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(\Delta_1 + \Delta_2)}{\lambda}\right) \right]^2 \quad [0.5\tau]$$

Или окончателно имаме

$$I = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d_1}{\lambda} \sin \theta\right) + \cos\left(\frac{2\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} \sin \theta\right) \right]^2 \quad [0.5\tau]$$

б) Очевидно интензитетът осцилира за двете функции и ще е максимално голям, когато и двете функции са максимални, тоест:

$$I_{\max} = 9I_0 \quad [2\tau]$$

Освен абсолютния максимум ще има и по-малки максимуми.

в) За да имаме абсолютен максимум в направление θ , трябва да се удовлетворяват следните две равенства

$$\frac{2\pi d_1}{\lambda} \sin \theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad [0.5\tau]$$

$$\frac{2\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} \sin \theta = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{d_1 + d_2} = \frac{n}{d_1} \quad [0.5\tau]$$

Окончателно имаме

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m}{n} - 1 \quad [1\tau]$$

г) За $d_1 = d_2 = d$ имаме абсолютен максимум в направление θ , когато

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad [0.5\tau]$$

$$\frac{4\pi d}{\lambda} \sin \theta = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

Очевидно нулевият максимум е при $n = 0$ и $m = 0$, което отговаря на $\theta_0 = 0$ [0.5τ], а първият до него

максимум е при $n = 1$ и $m = 2$, което отговаря на $\theta_1 = \text{Arc sin}\left(\frac{\lambda}{d}\right)$ [1τ]

д) Аналогично на първата точка имаме за електричното поле

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \Rightarrow$$

$$I = E^2 = E_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(\Delta_1 + \Delta_2)}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)}{\lambda}\right) \right]^2$$

$$\Rightarrow I_{\max} = 16I_0 \quad [1\tau]$$

Вече лесно може да се обобщи за N процепа $\Rightarrow$

$$I_{\max} = N^2 I_0 \quad [1\tau]$$

Задача 2. Черна дупка

Част 1. а) Разглеждаме тяло с маса m , изстреляно от радиуса на черната дупка R . Втора космическа скорост може да бъде изчислена чрез изравняване на кинетичната енергия и гравитационната потенциална енергия:

$$\frac{mV^2}{2} = G \frac{mM}{R} \quad [1\tau]$$

За черната дупка имаме $V = c \Rightarrow$

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad [1\tau]$$

б) Използваме последната формула като заместим в нея масата на Земята $\Rightarrow$

$$R = \frac{2GM_z}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5.9742 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm} \quad [2\tau]$$

Част 2. в) Тъй като фотонът е локализиран в черната дупка (в област с размер радиуса на Шварцшилд R), неговият импулс P не е точно определен. Като оценка ще приемем, че импулсът P е приблизително равен на неопределеността в импулса ΔP .

От съотношението за неопределеност на Хайзенберг следва

$$P \approx \hbar / R \quad [0.5\tau]$$

Тогава енергията на фотона е

$$E = Pc \approx \hbar c / R [0.5\tau]$$

Следователно средната температура на черната дупка е

$$E = Pc = kT \Rightarrow$$

$$T \approx \frac{\hbar c}{Rk} [1\tau]$$

г) Ще намерим минималната маса $M_{\min}$, при която все още може да се формира черна дупка. За целта разглеждаме тяло с маса m , затворено в черната дупка с радиус $R \Rightarrow$ импулсът P на тялото не е точно определен, а имаме

$$P \approx \hbar / R [0.5\tau]$$

След което приемаме, че импулсът на тялото е от порядъка $P \approx mc \Rightarrow$

$$mc \approx \frac{\hbar}{R} [0.5\tau]$$

Сега заместваме и радиуса на Шварцшилд $R = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow$

$$mc \approx \frac{\hbar c^2}{2GM} \Leftrightarrow M \approx \frac{\hbar c}{2Gm} [1\tau]$$

Най-малка долна граница за масата $M_{\min}$ на черната дупка имаме, когато m е най-голямо, а най-голямата маса на частицата може да е масата на самата черна дупка

$$\Rightarrow M_{\min} \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{2G}} [1\tau]$$

Или числено имаме

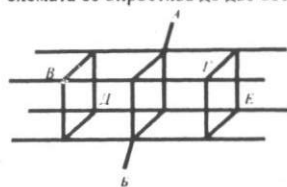
$$M_{\min} \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg} [1\tau]$$

Следователно за тяло с маса по-малка от минималната съществуват квантови ограничения и тялото не може да стане черна дупка независимо от силата, с която го свиваме

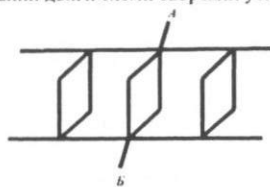
Забележка: В таблицата от условието на задачата са дадени масата на електрона и масата на протона, но те не са нужни при решаването на задачата

Задача 3. Съпротивление на безкрайни вериги

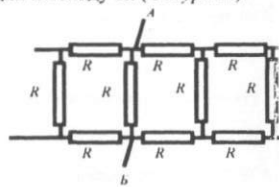
а) При включване на източник на напрежение между точки А и Б, ребрата В-Г и Д-Е имат еднакъв потенциал (Фигура 2а) и могат да се махнат понеже по тях не тече ток (Фигура 2б). След което схемата се опростява до две безкрайни дълги схеми свързани успоредни помежду си (Фигура 2в).



Фигура 2а



Фигура 2б



Фигура 2в

Сега вече можем да пресметнем съпротивлението между точки А и Б.

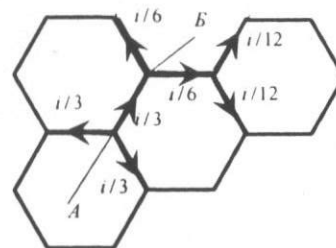
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{r}, [1\tau]$$

където r е съпротивлението на полубезкрайната верига. След това използваме добре познатия трик, че съпротивлението на безкрайно дълга верига не се променя ако махнем едно повтарящо се звено. Тогава за r имаме

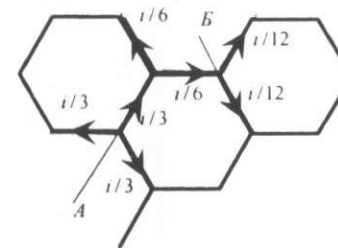
$$r = 2R + \frac{Rr}{r+R} [1\tau] \Rightarrow$$

$$R_{AB} \approx \frac{R}{\sqrt{3}} [1\tau]$$

б) От съображение на симетрия се вижда, че ако в точка А от веригата приложим положителен потенциал, то към точка Б ще протича ток $i/3 [0.5\tau]$ от общия ток (Фигура 3б). Аналогично, ако към точка Б приложим отрицателен потенциал, към точка А ще протича ток $i/3 [0.5\tau]$ от общия ток. Използвайки принципа на суперпозицията и прилагайки едновременно и положителното напрежение към точка А, и отрицателното към точка Б, получаваме ток $2i/3 [0.5\tau]$, който ще протече между точки А и Б $\Rightarrow$ Според закона на Ом имаме $U_{AB} = R_{AB} \cdot 2i/3 [0.5\tau]$ или за ефективното съпротивление между точки А и Б имаме $R_{AB} = 2R/3 [1\tau]$



Фигура 3б



Фигура 3в

в) Аналогично на точка б) разглеждаме тока, който протича по отделните клонове. Токът в близките клонове е $i/3 [0.5\tau]$, докато в по-далечните е $i/6 [0.5\tau]$ (Фигура 3в). Токът, който протича между точки А и Б при едновременно подаване на потенциал към тях, е

$$I = i/3 + i/6 = i/2, [1\tau]$$

а падът на напреженията между точки А и Б е

$$U = I \cdot 2R = iR [1\tau]$$

Следователно ефективното съпротивление между точки А и Б ще е $R_{AB} = U/I = R [1\tau]$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Варна, 12.11.2011 - 13.11. 2011 година

Специална тема

Задача 1. Интерференция от три процепа

Три процепа с незначителна ширина са изрязани успоредно върху екран, както е показано на Фигура 1. Разстоянието между процепите е съответно d_1 и d_2 . Върху екрана с процепите пада монохроматична светлина с дължина на вълната λ . Да се намери:

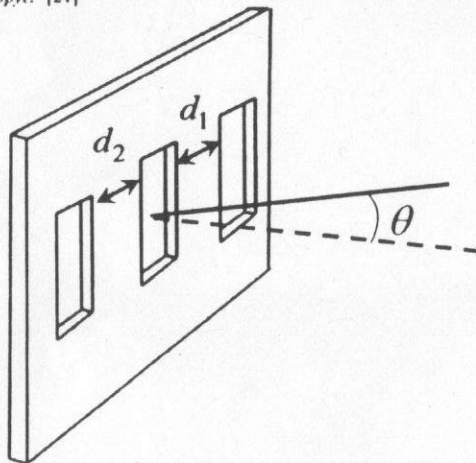
а) Разпределението на интензитета I на електричното поле от другата страна на екрана като функция на ъгъла θ (мерен спрямо нормалата към екрана) на голямо разстояние от процепите, ако единичен процеп дава интензитет I_0 . [2т]

б) Колко ще е интензитетът I на абсолютните максимуми. [2т]

в) При какво отношение на d_1 и d_2 ще имаме абсолютен максимум в направление с ъгъл θ . [2т]

г) При какви ъгли θ_0 и θ_1 се наблюдава нулевият и първият абсолютен максимум в случай че $d_1 = d_2 = d$. [2т]

д) Нека вместо три да имаме четири процепа на равни разстояния d един от друг. Намерете интензитета I на абсолютния максимум, ако единичен процеп дава интензитет I_0 . Да се изведе обща формула за интензитета на абсолютния максимум за N процепа, отстоящи на равни разстояния d един от друг. [2т]



Фигура 1

Задача 2. Черна дупка

Част 1. Черна дупка е обект с много силно гравитационно поле – толкова силно, че втора космическа скорост е по-голяма от скоростта на светлината. Поради това дори и светлината не е в състояние да преодолее гравитацията и да напусне космическия обект. Граничният радиус, при който светлината не може да напусне черната дупка, се нарича радиус на Шварцшилд (това е радиусът на черната дупка).

а) Намерете радиуса на Шварцшилд R за тяло с маса M . [2т]

б) Намерете числено радиуса на кълбото, до който трябва да се свие Земята, за да се превърне в черна дупка, ако Земята има маса M_1 . [2т]

Част 2. Съотношението за неопределеност (принцип за неопределеност на Хайзенберг) позволява много често да се правят бързи оценки, без да се търси точно решение на разглежданите задачи. Съотношението за неопределеност за импулса и координатата се дава като $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.

а) Разгледайте фотон с енергия $E = pc$, който е затворен в черна дупка с радиус R . Тази енергия съответства на определена средна абсолютна температура T на черната дупка, която се дава със

съотношението $E = kT$, където k е константа на Болцман. Оценете температурата на черна дупка като използвате съотношението за неопределеност на Хайзенберг. [2т]

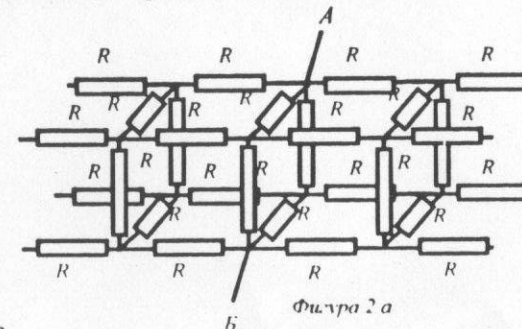
г) Използвайки съотношението за неопределеност на Хайзенберг, намерете (символно и числено) долната граница на масата ($M_{\min}$), под която черната дупка няма да може да съществува от гледна точка на квантовата механика. [4т]

Фундаментални физични величини:

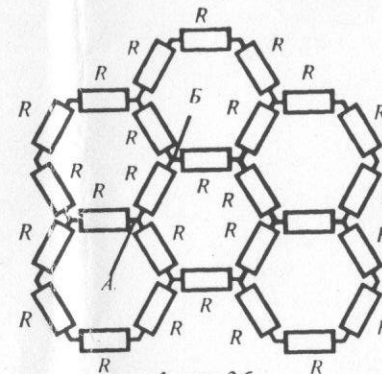
- скоростта на светлината във вакуум, $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- редуцирана константа на Планк, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.
- гравитационна константа $G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.
- масата на Земята $M_1 = 5.9742 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.
- масата на електрона $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- масата на протона $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Задача 3. Съпротивление на безкрайни вериги

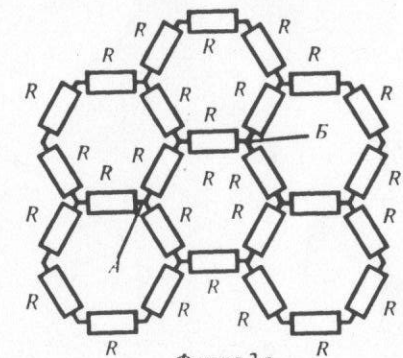
Съпротивлението на всеки единичен клон от безкрайните вериги е показано на Фигура 2. Намерете съпротивлението R_{AB} между точки А и Б:



Фигура 2 а



Фигура 2 б



Фигура 2 в

а) случая на Фигура 2 а. [3т] б) случая на Фигура 2 б. [3т] в) случая на Фигура 2 в. [4т]

Упътване: За решението на б) и в) може да използвате принципа на суперпозицията