

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Варна, 05-07.11.2010 г.

Специална тема

Задача 1. Изкачване на бордюр

Автомобил с маса m и радиус на колелата R трябва да изкачи бордюр с височина h , както е показано на фигурата. Разстоянието между осите на предните и на задните колела е L . Центърът на масата C на автомобила е разположен симетрично спрямо предната и задната ос. При изкачване на бордюра предните и задните гуми не приплъзват спрямо пътя. Автомобилът се движи толкова бавно, че на практика се намира в състояние на статично равновесие. Удобно е да изразите аналитичните отговори чрез „ъгъла на атака“ α , както е дефиниран на чертежа, вместо непосредствено чрез височината h .

А) Приемете, че автомобилът е със задвижване на предните колела, т.е. въртящият момент M на двигателя е приложен към предната ос, а задните гуми могат да се въртят свободно. В този случай определете: [4.0 т]

А1. Минималния коефициент μ на триене между гумите и пътя, за да може автомобилът да премине бордюра, без гумите да боксуват, както и общата сила на реакция N_1 , с която бордюрът действа върху предните гуми.

А2. Минималния въртящ момент M върху предната ос, нужен за преодоляване на бордюра.

Б) Разгледайте автомобил със задвижване на задните колела, т.е. в случая въртящият момент M на двигателя е приложен към задната ос, а предните гуми могат да се въртят свободно. В този случай определете: [4.0 т]

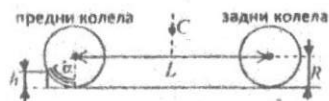
Б1. Минималния коефициент μ на триене между гумите и пътя, за да може автомобилът да премине бордюра, без гумите да боксуват, както и общата сила на реакция N_1 , с която бордюрът действа върху предните гуми.

Б2. Минималния въртящ момент M върху задната ос, нужен за преодоляване на бордюра.

В) Нека автомобилът има следните данни: $m = 1000 \text{ kg}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $L = 2.5 \text{ m}$, височината на бордюра е $h = 0.1 \text{ m}$ и $g = 10 \text{ m/s}^2$. Попълнете със съответните числени стойности таблицата:

[2.0 т]

Задвижване на	μ	$N_1 \text{ (N)}$	$M \text{ (N.m)}$
предни колела			
задни колела			



Задача 2. Газова турбина

На фиг. 2.1 е показано принципно устройство на газова турбина – двигател, който се използва при самолетите, в електростанциите и дори в някои модели спортни автомобили. На фиг. 2.2 е показан идеализиран термодинамичен цикъл на работата на газовата турбина (т. нар. цикъл на Брайтън). Компресорът поема атмосферен въздух с налягане $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ и температура $T_1 = 300 \text{ K}$ и го свива адиабатно до налягане $p_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ (процес 1–2), след което въздухът попада в горивната камера. Там той се загрява от изгаряното гориво и се разширява при практически постоянно налягане (2–3). Масата на впръсканото гориво и на продуктите от неговото изгаряне е много по-малка от

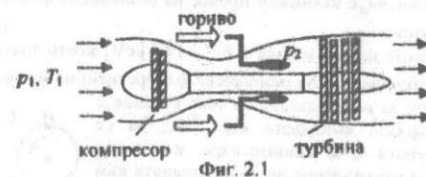
масата на постъпващия въздух. След това въздухът попада върху лопатките на турбината, като до отделянето му в атмосферата налягането му намалява адиабатно до $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ (3–4). Отделеният в атмосферата горещ въздух се охлажда при постоянно налягане до температурата на околния въздух (4–1).

А) В коя точка от цикъла температурата на въздуха е максимална? Дайте обосновка на отговора си. [1.0 т]

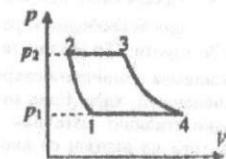
Б) Без да анализирате детайлно отделните процеси от работния цикъл, получите оценка отгоре за коефициента η на полезно действие на двигателя. Приемете, че въздухът в горивната камера се загрява до максимална температура $T_{\text{max}} = 1000 \text{ K}$. [1.0 т]

В) Получете точен израз за η чрез коефициента на компресия $k = p_2/p_1$ и показателя на адиабатата γ на въздуха. Пресметнете η , като приемете, че въздухът е съставен само от двуатомни молекули. [4.0 т]

Г) На практика горещият въздух се отделя в атмосферата с налягане p_m , което е по-голямо от външното атмосферно налягане p_1 . Адиабатното разширение на въздуха продължава в атмосферата, като при това въздухът не извършва полезна работа. Пресметнете числено КПД η' на турбината в този случай при $p_m = 2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$. [4.0 т]



Фиг. 2.1



Фиг. 2.2

Задача 3. Ефект на Мьосбауер

Ако атом премине от възбудено енергетично ниво с енергия E_1 в основното си ниво с енергия E_0 , се излъчва фотон с енергия $h\nu = E_1 - E_0$. Този фотон може да бъде погълнат от атом на същото вещество, който първоначално се намира в основното ниво E_0 и преминава във възбудено състояние с енергия E_1 . Този процес се нарича резонансна флуоресценция и се наблюдава лесно, когато излъченият фотон е в оптичната част на спектъра. В случай, когато фотонът се излъчва при преход между енергетичните нива на атомното ядро обаче резонансна флуоресценция се наблюдава само при специални условия. Причината е, че излъченият фотон (γ -квант) придава значителен импулс на излъчващото ядро, а следователно и част от своята енергия. С по-ниската си енергия γ -квантът не може да бъде погълнат от друго ядро на същия изотоп, намиращо се в основно състояние.

А) Разгледайте свободно ядро (например в газ) с маса m и разлика в енергиите между възбуденото и основното ниво $E_1 - E_0 = h\nu_0$, където ν_0 е честотата, с която би бил излъчен γ -квантът, ако ядрото беше неподвижно закрепено.

- Получете приблизителни изрази за кинетичната енергия E_d на ядрото след излъчването на γ -кванта и за енергията $h\nu_1$ на излъчения фотон, ако първоначално ядрото е

неподвижно. Изразете отговорите чрез $h\nu_0$, m и скоростта на светлината c . Можете да приемете, че $h\nu_0 \ll mc^2$ и да използвате приблизителните равенства $(1+x)^n \approx 1+nx$ и $(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$, когато $|x|, |y| \ll 1$. [2.5 т]

- Колко трябва да бъде енергията $h\nu_\gamma$ на γ -квант, за да бъде погълнат от първоначално неподвижно ядро, намиращо се в основното си състояние? [1.0 т]

Б) Ще разгледаме конкретно ядро на изотопа ^{57}Fe на желязото (молярна маса $M = 0.057 \text{ kg/mol}$). Възбудените ядра излъчват в случайни моменти от време, като средното им време на живот е $\tau = 10^{-7} \text{ s}$. Поради това, енергията на излъчените кванти не е фиксирана, а е случайно разпределена в малък интервал $\nu_1 \pm \Delta\nu$. Аналогично, неподвижното ядро може да поглъща фотони в интервал от честоти $\nu_2 \pm \Delta\nu$ със същата широчина.

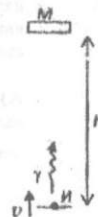
- Като използвате принципа за неопределеност, оценете полуширината $\Delta\nu$ на честотния интервал при излъчване или поглъщане. [1.0 т]
- Пресметнете при какви енергии $h\nu_0$ е възможен процес на резонансна флуоресценция за свободни ядра на желязото. [1.5 т]

В) За ядрото ^{57}Fe разликата в енергиите на двете нива е $h\nu_0 = 14.4 \text{ keV}$, което значително превишава граничната енергия за наблюдаване на резонансна флуоресценция от свободни неподвижни ядра. Един от начините за наблюдаване на това явление е радиоактивният източник M , съдържащ възбудени ядра ^{57}Fe , да се монтира на въртящ се диск. Мишената M от същите ядра в основно състояние е закрепена неподвижно в направление на допирателната към диска.

- С каква ъглова скорост ω трябва да се върти дискът, за да може максимален брой фотони, излъчени от източника, да бъдат поглънати от ядрата в мишената? Радиусът на диска е $R = 5 \text{ cm}$. [2.0 т]

Г) Когато атом се намира в кристал, между него и съседните атоми съществува силна връзка, в резултат на което атомът трепти около своето равновесно положение с определена честота $\nu_{\text{ат}}$. Трептящият атом може да поглъща механична енергия само на кванти $\epsilon = h\nu_{\text{ат}}$. Ако енергията $E_{\text{ат}}$ на откат на излъчващото ядро е по-малка от вибрационния квант енергия ϵ и температурата е сравнително ниска, импулсът на излъчения фотон не е достатъчен, за да възбуди трептене на ядрото в кристала. Фотонът се излъчва или поглъща с непроменена енергия $h\nu_0$, като откатният импулс се поема от кристала като цяло. Този ефект е бил открит от немския физик Мюсбауер през 1956 г. за ядрата на изотопа ^{57}Fe в кристалната решетка на желязото при температури, по-ниски от 77 K.

През 1959 г. английските физици Паунд и Ребка използват ефекта на Мюсбауер, за да установят промяната на честотата на фотона при движение в гравитационно поле. Схемата на опита е дадена на фигурата. Източникът I – стоманена пластинка, съдържаща възбудени ядра ^{57}Fe , е монтиран на мембраната на високоговорител. На високоговорителя се подава електрическо напрежение, изменящо се с времето така, че мембраната да се



движи вертикално с контролируема скорост. Мишената – идентична пластинка, в която ядрата на желязото са в невязбудено (основно) състояние, се намира на височина $h = 22.5 \text{ m}$ над източника.

- С каква скорост v трябва да се движи мембраната нагоре, за да се наблюдава резонансно поглъщане на γ -квантите, излъчени от източника? Присметете, че γ -квантите се излъчват и поглъщат безоткатно. [2.0 т]

Основни константи

Константа на Планк, $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Скорост на светлината във вакуум, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$

Елементарен електричен заряд, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

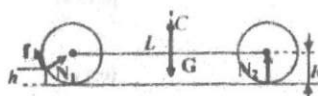
Число на Авогадро, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Ускорение на свободно падане, $g = 9.80 \text{ m/s}^2$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Варна, 6 ноември 2010 г.
Решения на специална тема

Задача 1. Изкачване на бордюр

A1) На фигурата са показани силите, които действат на автомобила. Върху задната гума не действа сила на триене, защото тя се върти свободно.



[1 т] – x 0.25 т за правилно начертана сила

От условието за баланс на силите по X:

(1) $N_1 \sin \alpha = f \cos \alpha$; [0.5 т]

и по Y:

(2) $N_1 \cos \alpha + f \sin \alpha + N_2 = mg$; [0.5 т]

Записваме условие за уравнивяване на въртящите моменти спрямо предната ос:

(3) $fR + mg \frac{L}{2} = N_2 L$ [0.5 т]

От трите уравнения определяме:

(4) $f = \frac{mgL \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L)}$ [0.25 т]

и

(5) $N_1 = \frac{mgL \cos \alpha}{2(R \sin \alpha + L)}$ [0.25 т]

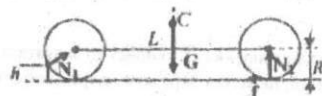
За да се движи автомобилът без боксуване, е нужно $f \leq \mu N_1$, откъдето определяме:

(6) $\mu \geq \tan \alpha$ [0.5 т]

A2) Разглеждаме предната гума като отделно тяло. От условието за уравнивяване на въртящите моменти върху гумата:

(7) $M = fR = \frac{mgLR \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L)}$ [0.5 т]

B1) Действащите в този случай сили са представени на чертежа:



[1 т] – x 0.25 т за правилно начертана сила

От условието за баланс на силите по X:

(8) $N_1 \sin \alpha = f$; [0.5 т]

и по Y:

(9) $N_1 \cos \alpha + N_2 = mg$; [0.5 т]

Записваме условие за уравнивяване на въртящите моменти спрямо предната ос:

(10) $fR + mg \frac{L}{2} = N_2 L$ [0.5 т]

От трите уравнения (8) – (10) определяме:

(11) $f = \frac{mgL \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)}$ [0.25 т]

(12) $N_1 = \frac{mgL}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)}$ [0.25 т]

(13) $N_2 = \frac{mg(2R \sin \alpha + L \cos \alpha)}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)}$ [0.25 т]

За да се движи автомобилът без боксуване е нужно $f \leq \mu N_2$, откъдето определяме:

(14) $\mu \geq \frac{L \sin \alpha}{L \cos \alpha + 2R \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + 2(R/L) \tan \alpha}$ [0.25 т]

B2) Аналогично на т. A2) въртящият момент на двигателя се уравнивява от въртящия момент на силата на триене:

(15) $M = fR = \frac{mgLR \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)}$ [0.5 т]

B) При зададената височина h имаме:

$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \approx 0.667$; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745$; $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$ [0.5 т]

Като използваме останалите числени данни, попълваме таблицата:

Задвижване на	μ	N_1 (N)	M (N·m)
предни колела	1.12	3060	1030
задни колела	0.88	6610	1480

[1.5 т] – по 0.25 т за всяка правилно пресметната стойност

Задача 2. Газова турбина

A) По време на процеса 1–2–3 газът се загрява, а по време на 3–4–1 се охлажда.

Следователно, най-висока е температурата в т. 3. [1.0 т]

B) От теоремата на Карно:

$\eta \leq 1 - T_{\min} / T_{\max} = 0.7$ [1.0 т]

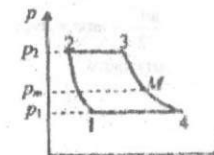
B) Газът приема топлина само по време на процеса 2–3:

$Q^{(+)} = Q_{2-3} = C_p(T_3 - T_2)$ [0.5 т]

и отдава топлина по време на процеса 4–1:

$Q^{(-)} = |Q_{4-1}| = C_p(T_4 - T_1)$ [0.5 т]

КПД на процеса е:



$$\eta = 1 - \frac{Q^{(1)}}{Q^{(2)}} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_1 - T_2)} \quad [0.5 \text{ т}]$$

От адиабатните процеси 1-2 и 3-4 имаме:

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{\gamma-1/\gamma} = k^{1-1/\gamma} \quad \text{и} \quad T_3/T_4 = (p_2/p_1)^{\gamma-1/\gamma} = k^{1-1/\gamma} \quad [1.0 \text{ т}]$$

откъдето получаваме:

$$\eta = 1 - \frac{1}{k^{1-1/\gamma}} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Двумотомните молекули имат $i = 5$ степени на свобода. Затова:

$$\gamma = (i + 2)/i = 7/5. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $k = 10$, намираме:

$$\eta = 1 - \frac{1}{10^{2/7}} \approx 0.48 \quad [0.5 \text{ т}]$$

Г) Общата работа, която извършва въздухът за един цикъл, е:

$$A = \eta Q^{(1)} = \eta C_p (T_3 - T_2) = 7/2 R \eta (T_3 - T_2). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Ползват работата A' се получава, като от общата работа извадим работата A_{M-4} , която газът извършва при свободното си разширение в атмосферата от налягане p_m до налягане p_1 :

$$A_{M-4} = U_{M1} - U_4 = 5/2 R (T_{M1} - T_4). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $T_1 = T_{M1} = 1000 \text{ K}$, за адиабатния процес 3-4 имаме:

$$T_4 = T_3/k^{2/7} = 518 \text{ K}, \quad T_{M1} = T_3/(p_2/p_m)^{2/7} = 631 \text{ K} \quad [1.0 \text{ т}]$$

От друга страна за адиабатния процес 1-2 имаме:

$$T_2 = T_1/k^{2/7} = 579 \text{ K}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Така намираме:

$$A' = 7/2 R \eta (T_3 - T_2) - 5/2 R (T_{M1} - T_4) = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} (3.5 \times 0.48 \times 421 \text{ K} - 2.5 \times 113 \text{ K}) = 3530 \text{ J/mol} \quad [0.5 \text{ т}]$$

и

$$Q^{(1)} = 7/2 R (T_3 - T_2) = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} 3.5 \times 421 \text{ K} = 12300 \text{ J/mol} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Следователно КПД в този случай е:

$$\eta = \frac{A'}{Q^{(1)}} = 0.29 \quad [0.5 \text{ т}]$$

Задача 3. Ефект на Мьосбауер

А) От закона за запазване на импулса имаме:

$$mv = \hbar v_1/c \quad [0.5 \text{ т}]$$

а от закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv^2}{2} + \hbar v_1 + E_1 = E_0 \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} + \hbar v_1 = \hbar v_0 \quad [0.5 \text{ т}]$$

От двете уравнения получаваме връзката:

$$\frac{mv^2}{2} + mv c = \hbar v_0.$$

откъдето:

$$v = \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\hbar v_0}{mc^2}} \right) \approx \frac{\hbar v_0}{mc} \quad [0.5 \text{ т}]$$

За кинетичната енергия на ядрото съответно получаваме:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \approx \frac{(\hbar v_0)^2}{2mc^2} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Енергията на излъчения фотон е:

$$\hbar v_1 = \hbar v_0 - E_k \approx \hbar v_0 \left(1 - \frac{\hbar v_0}{2mc^2} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

В процеса на поглъщане имаме:

$$mv = \hbar v_2/c \quad [0.25 \text{ т}]$$

$$\hbar v_2 = \hbar v_0 + \frac{mv^2}{2}, \quad [0.25 \text{ т}]$$

откъдето аналогично намираме:

$$\hbar v_2 \approx \hbar v_0 \left(1 + \frac{\hbar v_0}{2mc^2} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Б) Времето на живот на ядрото във възбудено състояние е неопределено, като можем да приемем, че $\Delta t \approx \tau$. Оттук следва, че възбуденото енергетично състояние има неопределена енергия $E_2 \pm \Delta E$, като според принципа за неопределеност за енергията:

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar, \quad [0.25 \text{ т}]$$

откъдето:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} \quad [0.25 \text{ т}]$$

Такава е неопределеността и на енергията на излъчения (поглъщания) фотон

$$\Delta E = \hbar \Delta \nu.$$

Следователно:

$$\Delta \nu \approx \frac{1}{\tau} = 10^7 \text{ Hz} \quad [0.5 \text{ т}]$$

За да може фотонът, излъчен от едно неподвижно ядро, да бъде погълнат от друго неподвижно ядро, е нужно:

$$v_2 - v_1 \leq 2\Delta \nu \quad \text{или} \quad \hbar v_2 - \hbar v_1 \leq \frac{2\hbar}{\tau} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като използваме изразите от т. А) получаваме:

$$\frac{(\hbar v_0)^2}{mc^2} \leq \frac{2\hbar}{\tau}$$

или

$$\hbar v_0 \leq c \sqrt{\frac{2\hbar m}{\tau}} = c \sqrt{\frac{2\hbar M}{N_A \tau}} = 1.1 \times 10^{-10} \text{ J} = 66 \text{ eV} \quad [1.0 \text{ т}]$$

В) Когато първоначално източникът се движи със скорост v , честотата ν' на фотоните, излъчени по посоката на движението, нараства спрямо ν_1 поради ефекта на Доплер:

$$\nu' = \nu_1 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

За да може максимален брой фотони да бъдат погълнати от неподвижните ядра в мишената, е нужно $\nu' = \nu_2$:

$$h\nu_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right) = h\nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx h\nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2mc^2} + \frac{v}{c} \right) \quad [0.5 \text{ т}]$$

оттук намираме:

$$v = \frac{h\nu_0}{mc} = 81 \text{ m/s} \quad [0.5 \text{ т}]$$

и

$$\omega = \frac{v}{R} = 1620 \text{ rad/s}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Г) Когато, източникът се движи нагоре със скорост v , честотата ν_1 на излъчените фотони е по-голяма от ν_0 поради ефекта на Доплер:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

На фотона може да бъде съпоставена маса:

$$m = \frac{h\nu_1}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

Ако приемем, че относителното изменение на енергията, а следователно и на масата на фотона е много малко, можем да считаме, че гравитационното поле извършва върху него работа:

$$A = -mgh = -\frac{h\nu_0 gh}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

Следователно, при издигане в гравитационно поле енергията на фотона намалява:

$$h\Delta\nu = A = -\frac{h\nu_0 gh}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad [0.25 \text{ т}]$$

и той достига мишената с честота:

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) (1 - gh/c^2) \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} - gh/c^2 \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

При условие, че атомите на желязото не търпят откат, за резонансно поглъщане на фотоните, е нужно:

$$\nu_2 = \nu_0 \quad [0.25 \text{ т}]$$

или

$$v = \frac{gh}{c} = 7.35 \times 10^{-7} \text{ m/s}. \quad [0.5 \text{ т}]$$