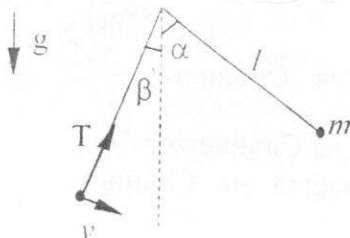


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Плевен, 26 – 28 ноември 2004 г.
Специална тема

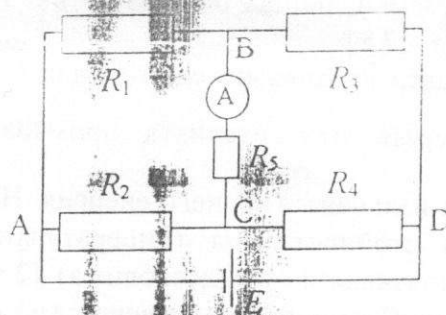
Задача 1. Математично махало с променлива дължина.

Малко топче с маса m е окачено на безтегловна нишка с дължина l и отклонено на ъгъл α ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) спрямо вертикалата (виж Фиг.1). След като се пусне, махалото извършва свободни люлеения. Земното ускорение е g . Намерете:

- а) Колко е скоростта на топчето v , когато нишката сключва ъгъл β с вертикалата ($|\beta| < \alpha$). [1 т]
- б) Колко е силата на опъване на нишката T , когато нишката сключва ъгъл β с вертикалата ($|\beta| < \alpha$). [2 т]
- в) Нека първоначалния ъгъл на отклонение α , изразен в rad , е много малък ($\alpha \ll 1$). Използвайки резултатите от подусловие б), намерете силата на опъване на нишката T като функция на времето. [3 т]
- г) Горният край на нишката на махалото е прокаран през малка дупка. Той започва много бавно и равномерно да се издърпва нагоре, в резултат на което дължината на махалото намалява с Δl ($\Delta l \ll l$). Ако в края на издърпването промяната на максималния ъгъл на отклонение на махалото е $\Delta \alpha$, намерете $\Delta \alpha / \alpha$. [4 т]



Фиг. 1



Фиг. 2

Задача 2. Уитстонов мост.

Уитстоновият мост е електрична схема, с която може да се мери неизвестно съпротивление. Пет съпротивления R_1 , R_2 , R_3 , R_4 и R_5 (R_5 е вътрешното съпротивление на амперметъра) са включени към източник на постоянно напрежение с електродвижещо напрежение E , както е показано на Фиг. 2

- а) Нека $R_2 = 100 \, \Omega$, $R_3 = 300 \, \Omega$ и $R_4 = 200 \, \Omega$. При каква стойност на съпротивлението R_1 , токът I_5 , минаващ през съпротивлението R_5 , ще бъде нула (в това състояние Уитстоновият мост се нарича балансиран)? [1 т]
- б) Намерете стойността на тока I_5 , минаващ през съпротивлението R_5 , при произволни стойности на съпротивленията R_1 , R_2 , R_3 , R_4 и R_5 и електродвижещото напрежение E . [5 т]
- в) Нека R_1 е неизвестно съпротивление и Уитстоновият мост, в рамките на експерименталната грешка, е балансиран чрез промяна на съпротивлението R_3 . Приемете, че R_5 е много по-малко от останалите съпротивления във веригата ($R_5 \ll R_1, R_2, R_3, R_4$). Максималният ток, при който амперметърът все още

показва нула (чувствителността на амперметъра), е $I_{5\max}$. Всички съпротивления с изключение на неизвестното R_1 са известни с голяма точност и $R_2 = R_4$.

Намерете формула за относителната грешка $\epsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1}$, с която може да се

определи стойността на R_1 и я пресметнете за следните стойности: $I_{5\max} = 1 \mu A$, $E = 2 V$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 k\Omega$ [2 т]

г) Нека R_1 е неизвестното съпротивление и Уитстоновият мост, в рамките на експерименталната грешка, е балансиран чрез промяна на съпротивлението R_3 . Приемете, че $R_3 = 500 \Omega$ и е много по-голямо от останалите съпротивления във веригата ($R_3 \gg R_1, R_2, R_3, R_4$). Максималният ток, при който амперметърът все още показва нула, е $I_{5\max}$. Всички съпротивления с изключение на неизвестното R_1 са известни с голяма точност и $R_2 = R_4$. Получете формула за относителната

грешка $\epsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1}$, с която може да се намери стойността на R_1 и я пресметнете за

следните стойности: $I_{5\max} = 1 \mu A$, $E = 2 V$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$. [2 т]

Задача 3. Слънце.

а) Слънчева константа (A) се нарича енергията на слънчевото лъчение, падаща на Земята за единица време и на единица площ. Нека $A = 1400 W/m^2$. Намерете температурата на слънчевата повърхност (ако допуснете, че тя излъчва като

идеално черно тяло) Константата на Стефан-Болцман е $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Разстоянието Земя-Слънце е $a = 150 \cdot 10^6 km$. Радиусът на Слънцето е

$R_s = 6,96 \cdot 10^8 m$. [3 т]

б) Ако Слънцето излъчва по един и същ начин в продължение на 1 милиард години, намерете относителната промяна на масата на Слънцето $\frac{\Delta M}{M}$

вследствие на излъчената от него енергия. Началната маса на Слънцето е $M = 2 \cdot 10^{30} kg$. За стойността на температурата на повърхността на Слънцето използвайте получената от подусловие а) [2 т]

в) Приемете, че Слънцето е съставено само от водород и хелий, като масовата концентрация на водорода $n_H = 75\%$. След последователност от ядрени реакции, четири ядра водород (1_1H) се превръщат в едно ядро хелий (4_2He), при което се отделя $26,7 MeV$ енергия. Ако Слънцето излъчва по един и същ начин благодарение на по-горе описаната реакция, намерете масовата концентрация на водорода след 10 милиарда години. Масата на протона е $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$. За стойността на температурата на повърхността на Слънцето използвайте получената от подусловие а) [3 т]

г) Звезда с радиус, равен на слънчевия и период на въртене $T_z = 25$ дни, но с по-голяма маса, завършва своя живот като неутронна звезда (пулсар, много плътен и бързо въртящ се обект). Ако неутронната звезда излъчва радиоимпулси с период на повторение $T_H = 1 ms$, съвпадащ с периода на въртене на пулсара, намерете нейния радиус. Приемете плътността на неутронната звезда и на звездата – нейн предшественик, за независещи от радиусите им. Масите им също приемете за равни. [2 т]

Полезна математика: Ако $x \ll 1$, то $\sin x \approx x$ и $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Плевен, 26 – 28 ноември 2004 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Математично махало с променлива дължина.

а) Нека изберем за нулево ниво на потенциалната енергия на топчето точката на окачване. Използвайки закона за запазване на пълната механична енергия и сравнявайки механичната енергия в началния момент време, когато топчето е неподвижно и отклонено на ъгъл α и момента, когато топчето е отклонено на ъгъл β и има скорост v , се получава:

$$-mgl \cos \alpha = -mgl \cos \beta + \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

Решавайки уравнение (1) спрямо скоростта v се получава

$$v = \sqrt{2gl(\cos \beta - \cos \alpha)} \quad [2 \tau] \quad (2)$$

б) В момента, когато топчето е отклонено на ъгъл β и има скорост v , тъй като то се движи по дъга от окръжност, то има центростремително (нормално) ускорение a_n . Това ускорение се определя от проекцията по направление на нишката на равнодействащата сила, действаща на топчето. Равнодействащата сила е сума на две сили: силата на тежестта на топчето mg и силата на опъване на нишката T . Така получаваме:

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{T - mg \cos \beta}{m} \quad (3)$$

Решавайки уравнение (3) спрямо T и замествайки скоростта v с полученото в уравнение (2) се получава:

$$T = mg \cos \beta + \frac{mv^2}{l} = mg \cos \beta + 2mg(\cos \beta - \cos \alpha) = mg(3 \cos \beta - 2 \cos \alpha) \quad [2 \tau] \quad (4)$$

в) При малки ъгли, $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$. Замествайки с тази приближена формула в уравнение (4), за силата на опъване T получаваме:

$$T = mg(3 \cos \beta - 2 \cos \alpha) = mg\left[3\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) - 2\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] = mg\left(1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\beta^2\right) \quad (5)$$

При малки ъгли махалото трепти хармонично по закона:

$$\beta = \alpha \cos(\omega t) \quad (6)$$

където $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ с T_0 е означен периодът на махалото

Замествайки (6) в (5) намираме

$$T = mg\left(1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\beta^2\right) = mg\left[1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2 \cos^2(\omega t)\right] \quad (7)$$

Опростирайки последния израз, получаваме:

$$T = mg\left\{1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2 \cdot \frac{[1 + \cos(2\omega t)]}{2}\right\} = mg\left[1 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{4}\alpha^2 \cos(2\omega t)\right] \quad [3 \tau] \quad (8)$$

г) При издърпване на нишката през малката дупка (точка на окачване) външна сила извършва работа

$$A = F_{cp} \Delta s \quad (9)$$

Средната сила F_{cp} е равна усреднената по времето сила на опъване на нишката T . От уравнение (8) се вижда, че

$$F_{cp} = mg\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad (10)$$

Това води до промяна на пълната енергия на махалото. За да намерим тази промяна, най-удобно е да сравним енергията на махалото в две положения на максимално отклонение, когато пълната енергия съдържа само потенциална енергия. Следователно промяната на енергията на махалото ΔE след скъсяване на нишката с Δl е:

$$\Delta E = -mg(l - \Delta l) \cos(\alpha + \Delta \alpha) - (-mgl \cos \alpha) \quad (11)$$

Преработвайки (11), получаваме:

$$\Delta E = -mg(l - \Delta l)\left[1 - \frac{(\alpha + \Delta \alpha)^2}{2}\right] + mgl\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

След като се разкрият скобите и се пренебрегнат членовете от втори порядък, (които са много по-малки от други членове в сумата), се получава:

$$\Delta E = mgl\alpha\Delta\alpha + mg\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\Delta l \quad (12)$$

Приравнявайки (12) с (9) се получава:

$$mgl\alpha\Delta\alpha + mg\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\Delta l = mg\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta l \quad (13)$$

Опростирайки уравнение (13) се стига до следната връзка:

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{3}{4} \frac{\Delta l}{l} \quad [4 \tau] \quad (14)$$

Задача 2. Уитстонов мост.

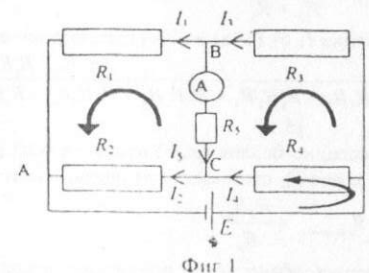
а) Нека означим токовете, течащи през съпротивления R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 съответно с I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 . Когато токът I_5 е нула, $I_1 = I_3$ и $I_2 = I_4$. Ако изразим тези токове от закона на Ом, получаваме:

$$\frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{U_{BD}}{R_3} \quad \text{и} \quad \frac{U_{AC}}{R_2} = \frac{U_{CD}}{R_4}$$

Тъй като потенциалите на точка С и точка D в този случай са равни, следва че $U_{AB} = U_{AC}$ и $U_{BD} = U_{CD}$. Разделяйки горните уравнения и съкращавайки равните напрежения, получаваме:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{или} \quad R_1 = R_3 \frac{R_2}{R_4}$$

При зададените стойности за съпротивления се получава: $R_1 = \frac{300\Omega \cdot 100\Omega}{200\Omega} = 150\Omega \quad [1 \tau]$



Фиг. 1

б) Нека токовете I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 , течащи през съпротивления R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 ,

имат посоки, както са означени на Фиг. 1. Тъй като имаме 5 неизвестни (токовете), трябва да използваме 5 независими уравнения, които могат да се получат от законите (правилата) на Кирхоф. Иска те да са следните:

$$I_1 = I_1 + I_3 \quad (\text{първо правило приложено за точка В}) \quad (15a)$$

$$I_2 = I_4 + I_3 \quad (\text{първо правило приложено за точка С}) \quad (15б)$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (\text{второ правило приложено за контура ВАС}) \quad (15в)$$

$$R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0 \quad (\text{второ правило приложено за контура DBC}) \quad (15г)$$

$$R_4 I_4 + R_2 I_2 = E \quad (\text{второ правило приложено за контура DCAE}) \quad (15д)$$

Тази система от 5 уравнения с 5 неизвестни решаваме чрез последователно елиминирание на неизвестните. Първо от (15a) елиминираме тока I_3 :

$$I_3 = I_1 + I_3 \quad (16a)$$

$$I_2 = I_4 + I_3 \quad (16б)$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (16в)$$

$$R_3(I_1 + I_3) + R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0 \quad (16г)$$

$$R_4 I_4 + R_2 I_2 = E \quad (16д)$$

След това от (16б) елиминираме тока I_2 :

$$I_2 = I_4 + I_3 \quad (17a)$$

$$R_1 I_1 - R_2(I_4 + I_3) - R_3 I_3 = 0 \quad (17б)$$

$$R_3 I_1 + (R_3 + R_5) I_3 - R_4 I_4 = 0 \quad (17г)$$

$$R_4 I_4 + R_2(I_4 + I_3) = E \quad (17д)$$

След това от (17в) елиминираме тока I_1 :

$$I_1 = \frac{R_2 I_4 + (R_2 + R_3) I_3}{R_1} \quad (18a)$$

$$R_3 \frac{[R_2 I_4 + (R_2 + R_3) I_3]}{R_1} + (R_3 + R_5) I_3 - R_4 I_4 = 0 \quad (18г)$$

$$(R_4 + R_2) I_4 + R_2 I_3 = E \quad (18д)$$

Опростявайки уравнение (18г) се получава:

$$(R_2 R_3 - R_1 R_4) I_4 + (R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_1 R_5) I_3 = 0 \quad (19г)$$

От уравнение (18д) може да се изрази тока I_4 :

$$I_4 = \frac{E - R_2 I_3}{R_2 + R_4} \quad (19д)$$

Замествайки I_4 от (19д) в (19г) след опростяване се получава:

$$I_3 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_1 R_4 + R_1 R_2 R_5 + R_2 R_1 R_3 + R_1 R_4 R_3 + R_4 R_1 R_5} \quad (20г)$$

При идеално балансиран Уитстонов мост ($I_3 = 0$) съгласно получения резултат в подусловие а), стойността на неизвестното съпротивление е

$$R_{\text{изчислено}} = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad (20)$$

На практика, обаче, токът през амперметъра никога не е точно нула, а е само малък от чувствителността на амперметъра ($I_3 \ll I_{3\text{max}}$). В този случай стойността на съпротивлението R_4 ще се различава от $R_{\text{идеално}}$ с ΔR_4 :

$$R_4 = R_{\text{идеално}} + \Delta R_4 \quad (21)$$

равенство (20г) може да се представи във вида

$$I_3 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_1 R_4 + R_1 R_2 R_5 + R_2 R_1 R_3 + R_1 R_4 R_3 + R_4 R_1 R_5} \quad (22)$$

Тъй като в този случай $R_3 \ll R_1, R_2, R_3, R_4$, равенство (22) се опростява до

$$I_3 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_1 R_4} \quad (23)$$

Замествайки в (23) R_4 с резултата от (21) и (20), и отчитайки, че $R_2 = R_4$ се получава:

$$I_3 = \frac{[R_2 R_3 - (R_3 + \Delta R_1) R_2] E}{(R_3 + \Delta R_1) R_2 R_3 + (R_3 + \Delta R_1) R_2^2 + (R_3 + \Delta R_1) R_3 R_2 + R_2^2 R_3} \quad (24)$$

Ако допуснем, че $\Delta R_1 \ll R_1$ (което е естествено за точен експеримент)

$$I_3 \approx - \frac{\Delta R_1 R_2 E}{R_2 R_3^2 + R_3 R_2^2 + R_3^2 R_2 + R_2^2 R_3} = - \frac{\Delta R_1 E}{2(R_2 + R_3) R_3} \quad (25)$$

Следователно относителната грешка е

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{\Delta R_1}{R_3} = \frac{2(R_2 + R_3) I_{3\text{max}}}{E} \quad (26)$$

При зададените стойности на величините се получава:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{2(10k\Omega + 10k\Omega) 10^{-6} A}{2V} = 0,02 = 2\% \quad [2 \tau] \quad (30)$$

г) В това подусловие разсъждавайки по същия начин като в подусловие в), но отчитайки сега, че съпротивлението на амперметъра е много по-голямо от останалите съпротивления във веригата ($R_3 \gg R_1, R_2, R_3, R_4$) равенство (22) се опростява до:

$$I_3 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_4 + R_4 R_1) R_3} \quad (31)$$

Отчитайки отново (21) и (20), и отчитайки, че $R_2 = R_4$, равенство (31) се преобразува до:

$$I_3 = \frac{[R_2 R_3 - (R_3 + \Delta R_1) R_2] E}{[(R_3 + \Delta R_1) R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_2 + R_2 (R_3 + \Delta R_1)] R_3} \approx - \frac{\Delta R_1 R_2 E}{4 R_2 R_3 R_3} = - \frac{\Delta R_1 E}{4 R_3 R_3} \quad (32)$$

Следователно относителната грешка е

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{\Delta R_1}{R_3} = \frac{4 R_3 I_{3\text{max}}}{E} \quad (33)$$

При зададените стойности на величините се получава

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{4 \cdot 500\Omega \cdot 10^{-6} A}{2V} = 0,001 = 0,1\% \quad [2 \tau] \quad (34)$$

Задача 3. Слънце.

а) Ако допуснем, че слънчевата повърхност излъчва като идеално черно тяло, то излъчената от нея енергия от единица площ за единица време съгласно закона на Стефан-Болцман ще бъде

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \sigma T^4 \quad (35)$$

а от цялата слънчева повърхност излъчената мощност ще бъде

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \sigma T^4 4\pi R_c^2 \quad (36)$$

Тази мощност равномерно се разпределя на сфера с радиус разстоянието Земя-Слънце a . Следователно падащата мощност на единица площ на Земята (т.е. Слънчевата константа A) ще бъде

$$A = \frac{\sigma T^4 4\pi R_c^2}{4\pi a^2} = \frac{\sigma T^4 R_c^2}{a^2} \quad (37)$$

Така за температурата на повърхността на Слънцето се получава

$$T = \left(\frac{A a^2}{\sigma R_c^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (38)$$

След заместване се получава

$$T = \left(\frac{1400 \frac{W}{m^2} \cdot 150^2 \cdot 10^{18} m^2}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 6,96^2 \cdot 10^{16} m^2} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 5800 K \quad [3 \tau] \quad (39)$$

б) Съгласно формулата на Айнщайн

$$E = mc^2, \quad (40)$$

всяко тяло, което излъчва енергия, губи от своята маса. Използвайки тази формула, получаваме:

$$\frac{\Delta M}{M_c} = \frac{\Delta E}{c^2 M_c} = \frac{\sigma T^4 4\pi R_c^2 t}{c^2 M_c} \quad (41)$$

Използвайки (38) за T , можем да представим отговора и в друг вид:

$$\frac{\Delta M}{M_c} = \frac{\sigma T^4 4\pi R_c^2 t}{c^2 M_c} = \frac{\sigma \frac{A a^2}{\sigma R_c^2} 4\pi R_c^2 t}{c^2 M_c} = \frac{4\pi A a^2 t}{c^2 M_c} \quad (42)$$

Замествайки с дадените стойности получаваме:

$$\frac{\Delta M}{M_c} = \frac{4\pi A a^2 t}{c^2 M_c} = \frac{4,3,14 \cdot 1400 \frac{W}{m^2} \cdot 150^2 \cdot 10^{18} m^2 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s}{3^2 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} kg} = 6,9 \cdot 10^{-5} \quad [2 \tau] \quad (43)$$

Важният извод, който може да се направи е, че една звезда по време на своя живот променя малко своята маса. С други думи масата на звездата е един от параметрите (константите), които определят нейното развитие.

в) Нека с N_H бележим броя водородни атоми в Слънцето. Следователно масовата концентрация на водорода в Слънцето е (ако приемем че масата на водорода е приблизително равна на масата на протона):

$$n_H = \frac{N_H m_p}{M_c} \quad (44)$$

Поради излъчването, за време t броят на водородните атоми ще намалее с

$$\Delta N_H = \frac{4I}{E_n} \quad (45)$$

където E_n е енергията отделена при превръщането на 4 протона в ядро хелий, а I е излъчената енергия за време t . Следователно след време t водородната концентрация ще бъде

$$n_H' = \frac{N_H m_p}{M_c} = \frac{(N_H - \Delta N_H) m_p}{M_c} = \frac{(N_H - \frac{4I}{E_n}) m_p}{M_c} = n_H - \frac{4\sigma T^4 4\pi R_c^2 t m_p}{M_c E_n} \quad (46)$$

Замествайки с дадените стойности, получаваме

$$n_H' = n_H - \frac{4\sigma T^4 4\pi R_c^2 t m_p}{M_c E_n} = \frac{4,3,14 \cdot 1400 \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 5800^4 K^4 \cdot 4,3,14 \cdot 6,96^2 \cdot 10^{16} m^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} kg}{2 \cdot 10^{30} kg \cdot 26,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} J} = 0,75 - 0,096 \approx 0,65 = 65\% \quad [3 \tau] \quad (47)$$

г) При свиването на звездата, нейния инерчен момент намалява, в резултат на което ъгловата скорост силно нараства. При постоянна плътност инерчният момент на кълбо е пропорционален на квадрата на радиуса на кълбото: $I \propto r^2$ или $I = k r^2$ (за кълбо $k = 2/5$, но конкретната стойност не е нужна за решението). Следователно, използвайки закона на запазване на момента на импулса, получаваме:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad \text{или} \quad k r_1^2 \frac{2\pi}{T_1} = k r_2^2 \frac{2\pi}{T_2} \quad (48)$$

След съкращаване се получава:

$$r_H = r_2 \sqrt{\frac{T_H}{T_2}} \quad (49)$$

Замествайки с дадените стойности, получаваме

$$r_H = 6,96 \cdot 10^8 m \sqrt{\frac{10^{-3} s}{25 \cdot 24 \cdot 3600 s}} \approx 15 km \quad [2 \tau] \quad (50)$$