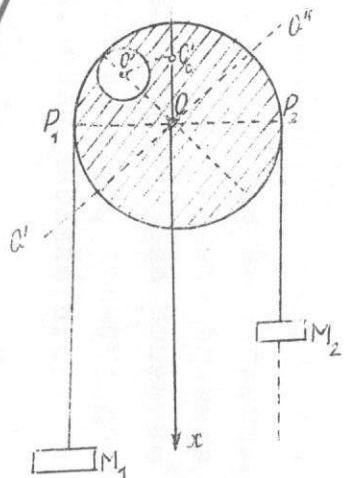


3. декември 2001г

1. задача /75 точки/. В метален диск с радиус R е изрязан цилиндричен отвор с радиус $r = \frac{R}{3}$ и с ос, успоредна на перпендикулярната на диска права $Q'Q''$, която минава през центъра O на окръжността, ограничаваща една от основите му и отстояща на разстояние $d = \frac{2R}{3}$ от тази права /вж. фигурата/. Дискът може да се върти свободно и без триене около споменатата права $Q'Q''$, която е хоризонтална и неподвижна. През диска е прехвърлена неразтегаема нишка с нищожно малка маса, в краищата на която са окачени две тела M_1 и M_2 с маси m_1 и m_2 съответно като $m_1 > m_2$. Хлъзгането на нишката по периферията на диска да не се отчита. Масата на изрязания диск е M .



а/ Да се намерят ускоренията на телата M_1 и M_2 и големината на ъгловото ускорение на диска;

б/ Какво е движението на диска при

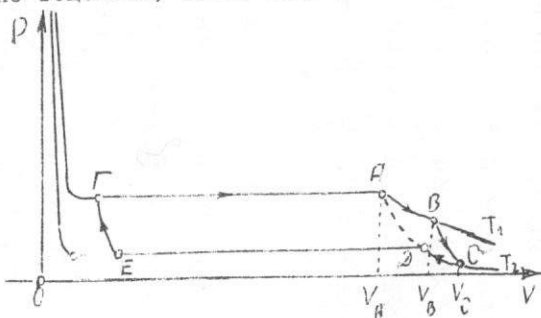
$$m_1 = m_2 = m?$$

в/ Да се определят силите на опъване на двете части на нишката M_1P_1 и M_2P_2 при $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$;

г/ Да се определи периода на движението на диска при малки негови трептения, ако $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$;

д/ Възможно ли е трептенията на диска да са малки, ако в началния момент центърът на отвора му O' е в положение O'_0 ? Обосновете отговора си!

2. задача. На фигурата са дадени две изотерми на 1 mol от дадено вещество, което може да извършва фазовия преход течност - газ.



Системата от това вещество извършва обратимия кръгов процес ГАВСДЕГ като процесите ВС и ЕГ са адиабатни. Газообразната фаза АВСД да се разглежда като идеален газ, а в състоянието Г системата е изцяло в течна фаза. Топлината на изпарение

при процеса ГА е постоянна и е $\lambda = 50 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$, температурите на изотермите са $T_1 = 400 \text{ K}$ и $T_2 = 200 \text{ K}$, $\ln(V_B/V_A) = 0,60$ и $\ln(V_C/V_B) = 0,75$, където V_A , V_B и V_C са обемите на системата в състоянията А, В и С съответно.

а/ Да се определят извършената работа A и обмененото количество топлина Q при дадения кръгов процес;

б/ Да се определи коефициента на полезно действие /кпд/ η на топлинна машина, чието работно тяло е дадената система и то извършва периодически кръговия процес ГАВСДЕГ;

в/ Да се определи коефициента на Поасон γ на системата, който участва в уравнението на адиабатния процес ВС, имащо вида $P \cdot V^\gamma = \text{const}$;

г/ Да се определи изменението ΔU_{DA} на вътрешната енергия на системата при преминаването ѝ от състояние Д в състояние А.

Универсалната газова константа $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$

Задачата дава 100 точки.

3. задача /125 точки/. а/ Да се намерят законите за трансформация при преход от една инерциална отправна система /ИОС/ К към друга ИОС К' на пълната механична енергия E и на проекцията p_x върху оста Ox на импулса $\vec{p}$ на едно тяло, което се движи по оста Ox на ИОС К. Началото O' на ИОС К' се движи със скорост с големина V спрямо ИОС К, абсцисните оси на К и К' постоянно съвпадат, а ординатните им оси, както и апликатните им оси са постоянно успоредни.

б/ Скоростта $\vec{v}$ на една частица постоянно лежи в координатната равнина Oxy на една ИОС К и сключва ъгъл $\tilde{\theta}$ с оста Oy . Как се трансформира ъгълът $\tilde{\theta}$ при преход от ИОС К към ИОС К'? Как се трансформира при този преход ъгълът θ между посоката на скоростта на един фотон и абсцисната ос Ox на ИОС К?

в/ Явлението, при което посоката на даден светлинен лъч спрямо един наблюдател се променя спрямо друг наблюдател, който се движи спрямо първия, се нарича светлинна аберация. Ако θ е ъгълът, който сключва светлинен лъч с оста Ox на ИОС К, а θ' е ъгълът, който сключва този лъч с оста $O'x'$ на ИОС К', то ъгълът $\Delta\theta = \theta' - \theta$ се нарича ъгъл на аберацията. Да се определи ъгълът на аберацията за лъч, който пада перпендикулярно на оста Ox , ако $V = \sqrt{3}c/2$, където c е скоростта на светлината във вакуум. Да се определи ъгълът на аберацията в общия случай, ако $V \ll c$ с точност до величини от втори порядък на V/c ;

г/ Частица с кинетична енергия $E_k = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$, равна на утроената ѝ енергия на покой се удря в друга такава частица, която е неподвижна. Да се определят пълната механична енергия на системата от двете частици и проекциите на импулсите им върху оста Ox' спрямо ИОС К', неподвижно свързана с центъра на масите на двете частици. Да се определи и скоростта на началото ИОС К' спрямо ИОС К, спрямо

втората частица преди удара е неподвижна.

4. задача /120 точки/. Свободна микрочастица с маса в покой m_0 върши праволинейно движение по посока на оста Ox .

а/ да се определи вълната ψ , получена от наслагването на две вълни на дьо Бройл на частицата, съответстващи на нейни скорости с големина $v - \Delta v$ и $v + \Delta v$, където величината Δv е такава, че $\frac{\Delta v}{v} \ll 1$;

б/ Аргументът на по-бързо променящия се множител на ψ разглеждаме като фаза на вълната ψ , а другият множител – като модулираща функция. По-малка или по-голяма от скоростта на светлината във вакуум c е фазовата скорост на вълната ψ , т.е. скоростта, с която се движат геометричните места на точки с една и съща фаза? Какво означава получения резултат?

в/ Скоростта v_g , с която се движат максимумите на модулиращата функция се нарича групова скорост на вълната ψ . Да се определи v_g с точност до величина от порядъка на $\frac{\Delta v}{v}$;

г/ Нека микрочастицата е нерелативистска и в началния момент $t = 0$ тя е локализирана в област с ширина $\Delta x(v)$. Тогава се казва, че частицата се описва с вълнов пакет $\psi(x, t)$, който е суперпозиция на вълни на дьо Бройл и в момента t практически е отличен от 0 само в област с ширина $\Delta x(t)$. Да се определи функцията $\Delta x(t)$. Каква функция на времето е тя? Ако $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, а $\Delta x(0) = 10^{-10} \text{ m}$, каква е ширината на пакета на частицата в момента $t = 0,5 \text{ s}$?

Указание: При решаването на задачата използвайте следната формула

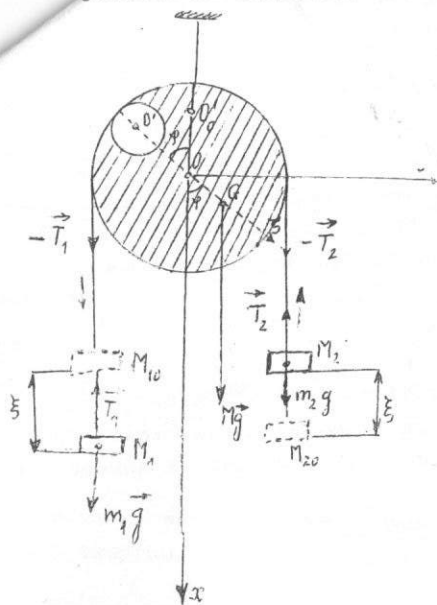
$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, (|x| \ll 1).$$

Константата на Планк е $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

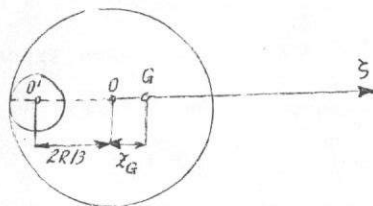
ЗАДЪЛЖИТЕЛНО СЕ РЕШАВАТ ТРИ ЗАДАЧИ ОТ ЛАДЕНИТЕ ЧЕТИРИ. АКО НЯКОЙ УЧАСТНИК Е РЕШИЛ ИЛИ СЕ Е ОПИТВАЛ ДА РЕШАВА И ЧЕТИРИТЕ ЗАДАЧИ, ТО НА НЕГО СЕ НАЧИСЛЯВА БРОЙ НА ТОЧКИ, КОИТО Е РАВЕН НА НАЙ-ГОЛЯМАТА СУМА НА ПОЛУЧЕНИТЕ ОТ НЕГО БРОЙКИ ТОЧКИ ПРИ РЕШАВАНЕТО НА ТРИ ОТ ЗАДАЧИТЕ.



на 1. задача: а/ Тъй като ускоренията не зависят от на- условия на задачата, то без ограничение на общността на наши-



фиг. 1.



фиг. 2.

получаваме

$$10 \tau. \quad |OG| = x_G = \frac{R}{12} \quad 15/$$

За да определим инерционния момент J на диска, използваме адитивността на инерционния момент и теоремата на Шайнер. Получаваме

$$10 \tau. \quad J + \frac{\pi R^2 \rho \ell}{g} \left(\frac{R^2}{2} + \frac{4R^2}{9} \right) = \frac{1}{2} \pi R^2 \ell R^2 = \frac{4}{9} M R^2 \quad 16/$$

От първото и второто уравнение на системата /2/ получаваме

$$T_1 = m_1 (g - a), \quad T_2 = m_2 (g + a), \quad 17/$$

а от третото й уравнение и като използваме /7/ и /5/ намираме

те разглеждания можем да считаме, че началното положение на центъра O' е върху оста Ox - положението O'_0 . Тогава преместванията в даден момент на M_1 и M_2 имат големина ξ и $\xi = \varphi R$. 17/

Уравненията на движение на трите тела са (фиг. 1)

$$10 \tau. \quad \begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \\ J \varepsilon = (T_1 - T_2) R + M g |OG| \sin \varphi \\ a = \varepsilon R \end{cases} \quad 12/$$

където J е инерционния момент на диска спрямо оста $O'Q''$, а G е центъра на масите му.

За да намерим $|OG|$ разглеждаме фиг. 2. От определенията на център на масите имаме

$$0 = M x_G - \frac{\rho \pi R^2 \ell}{g} 2R, \quad 13/$$

където

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 \ell (1 - \frac{1}{9})} = \frac{9M}{8\pi R^2 \ell}, \quad 14/$$

е плътността на диска, а ℓ е дебелината му. От /3/ и /4/

10т.

$$a = \frac{12(m_1 - m_2)g - M g \sin \varphi}{12(\frac{4}{9}M + m_1 + m_2)} \quad 18/$$

Следователно ускорението на M_1 е $\vec{a}_1 = (a, 0)$, а ускорението на M_2 е $\vec{a}_2 = (-a, 0)$. Големината на ъгловото ускорение на диска е $\varepsilon = a/R$.

Като имаме предвид /8/ и /1/ при $m_1 = m_2 = m$ уравнението на движение на диска добива вида

$$10 \tau. \quad \varepsilon = - \frac{3M g \sin \varphi}{8R(2M + 9m)},$$

което е уравнение на движение на физично махало.

в/ При $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$ големините на ускоренията на телата M_1 и M_2 са равни на

$$5 \tau. \quad a = - \frac{3g \sin \varphi}{52}$$

Тогава от /7/ получаваме

$$5 \tau. \quad \vec{T}_1 = \left(\frac{M}{2} g \left(1 - \frac{3}{52} \sin \varphi \right), 0 \right), \quad \vec{T}_2 = \left(\frac{M}{2} g \left(1 + \frac{3}{52} \sin \varphi \right), 0 \right).$$

г/ Периодът е

$$10 \tau. \quad T = 4\pi \sqrt{\frac{13R}{3g}}$$

5т. д/ Възможно е, защото при малки трептения енергията на махалото малко се отличава от енергията му в стабилно равновесно състояние. Когато O' е в положение O'_0 махалото е в стабилно равновесно състояние, защото тогава масовият му център има най-малка височина.

Решение на 2. задача а) Понеже изменението на вътрешната енергия на едно тяло при кръгов процес е равно на нула, то извършената работа при дадения кръгов процес е равно на обмененото при него количество топлина -

$$5 \tau. \quad A = Q, \quad 11/$$

Ясно е, че обмененото количество топлина Q_{GA} при процеса GA е равно на A . Поради това, че вътрешната енергия на идеален газ не зависи от обема му /закон на Джаул/, обмененото количество топлина при изотермен процес в идеален газ е равно на извършената при него работа -

$$5 \tau. \quad Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 2,3 RT \ln \frac{V_B}{V_A} = A_{AB}. \quad 12/$$

Като използваме съотношението

$$15 \tau. \quad \frac{dQ}{T} = dS, \quad 13/$$

където S е ентропията на системата и го приложим за дадения кръгов процес, получаваме

$$5 \tau. \quad \frac{\Delta Q_{GA}}{T_1} + \frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CDE}}{T_2} = 0, \quad 14/$$

от където като имаме предвид /2/ получаваме

$$5 \text{ т. } Q_{CE} = -\frac{T_2}{T_1} (\lambda + R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}) = -\frac{T_2}{T_1} (\lambda + 2,3 R T_1 \lg \frac{V_B}{V_A}). \quad /5/$$

Тогава

$$5 \text{ т. } A = Q = (\lambda + 2,3 R T_1 \lg \frac{V_B}{V_A}) \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 2319,17. \quad /6/$$

б/ Кпд η се дефинира така

$$5 \text{ т. } \eta = \frac{A}{Q_1}, \quad /7/$$

където Q_1 е приетото за един цикъл количество топлина. Очевидно

$$10 \text{ т. } Q_1 = Q_{GA} + Q_{AB} = \lambda + R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}. \quad /8/$$

От /6/, /7/ и /8/ получаваме

$$5 \text{ т. } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,50.$$

в/ Уравнението за адиабатен процес в идеален газ може да се напише и така

$$10 \text{ т. } T V^{\gamma-1} = \text{const.} \quad /9/$$

Приложено за адиабатния процес BC получаваме уравнението

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1},$$

откъдето получаваме

$$10 \text{ т. } \gamma = 1 + \frac{\lg \frac{T_1}{T_2}}{\lg \frac{V_C}{V_B}} = 1,40.$$

г/ Изменението ΔU на вътрешната енергия по кръговия процес ABCA е равно на 0 -

$$5 \text{ т. } 0 = \Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{AB} - A_{BC}.$$

Работата A_{BC} по адиабатния процес BC е известна

$$10 \text{ т. } A_{BC} = \frac{P_C V_C^{\gamma}}{1-\gamma} \left[\frac{1}{V_C^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_B^{\gamma-1}} \right] = \frac{R T_1}{\gamma-1} \left[\left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Следователно

$$5 \text{ т. } \Delta U_{AB} = \frac{R T_1}{\gamma-1} \left[\left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = 8,3 \cdot 10^3 \text{ J.}$$

Решение на задача 3.а) Като имаме предвид, че

$$5 \text{ т. } p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}, \quad /1/$$

където m_0 е масата при покой, а v_x е проекцията на скоростта $\vec{v}$ на тялото върху оста Oх, за проекцията p_x' на импулса на тялото върху оста O'х' получаваме последователно

$$p_x' = \frac{m_0 v_x'}{\sqrt{1-\frac{v_x'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 (v_x - V)}{(1-\frac{v_x V}{c^2}) \sqrt{1-\frac{(v_x - V)^2}{c^2(1-\frac{v_x V}{c^2})^2}}} = \frac{m_0 (v_x - V)}{\sqrt{(1-\frac{V^2}{c^2})(1-\frac{v_x^2}{c^2})}} = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

За енергията имаме

$$5 \text{ т. } E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_x'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{(v_x - V)^2}{c^2(1-\frac{v_x V}{c^2})^2}}} = \frac{m_0 c^2 (1-v_x V/c^2)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad /3/$$

Следователно търсените трансформационни формули са

$$5 \text{ т. } p_x' = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad /4/$$

б/ Компонентите на скоростта $\vec{v}$ спрямо К са $v_x = v \sin \tilde{\theta}$ и $v_y = v \cos \tilde{\theta}$, където $v = |\vec{v}|$. Компонентите на скоростта $\vec{v}'$ на същата частица спрямо К' са $v_x' = v' \sin \tilde{\theta}'$ и $v_y' = v' \cos \tilde{\theta}'$. От закона на Айнщайн за събиране на скоростите

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v_y' = \frac{v_y \sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad /5/$$

имаме

$$10 \text{ т. } v' \sin \tilde{\theta}' = \frac{v \sin \tilde{\theta} - V}{1 - \frac{v V}{c^2} \sin \tilde{\theta}}, \quad v' \cos \tilde{\theta}' = \frac{v \sqrt{1-V^2/c^2} \cos \tilde{\theta}}{1 - \frac{v V}{c^2} \sin \tilde{\theta}}. \quad /6/$$

Като разделим двете равенства в /6/, получаваме търсения закон за трансформация

$$\tan \tilde{\theta}' = \frac{v \sin \tilde{\theta} - V}{v \sqrt{1-V^2/c^2} \cos \tilde{\theta}}. \quad /7/$$

Ако θ е ъгълът между $\vec{v}$ и оста Oх, то от /5/ имаме $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$

$$5 \text{ т. } v' \cos \theta' = \frac{v \cos \theta - V}{1 - \frac{v V}{c^2} \cos \theta}, \quad v' \sin \theta' = \frac{v \sqrt{1-V^2/c^2} \sin \theta}{1 - \frac{v V}{c^2} \cos \theta}. \quad /8/$$

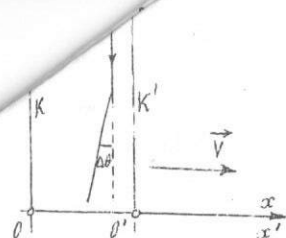
Като разделим равенствата /8/ получаваме закона за трансформация

$$5 \text{ т. } \tan \theta' = \frac{v \sqrt{1-V^2/c^2} \sin \theta}{v \cos \theta - V}. \quad /9/$$

За фотон, при $v = c$, законът /9/ добива вида

$$5 \text{ т. } \tan \theta' = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2} \sin \theta}{\cos \theta - \frac{V}{c}}. \quad /10/$$

5 т. в/ Ако $\theta = \frac{3\pi}{2}$, то от /10/ получаваме, че $\tan \theta' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\theta' = \frac{\pi}{6}$, така че $\Delta \theta = -\frac{\pi}{3}$. Ако $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\theta' = \frac{2\pi}{3}$ и $\Delta \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.



от /10/ и имаме $(1+x)^x \approx 1+xx$, ($|x| \ll 1$)

$$\tan \theta' - \tan \theta = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}} - \tan \theta \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tan \theta \left(1 + \frac{v}{c \cos \theta}\right) - \tan \theta$$

$$\Delta \theta \approx \frac{v}{c} \sin \theta$$

$$\Delta \theta = \frac{v}{c} \sin \theta \approx \frac{v}{c} \sin \theta'$$

г/ Получения закон за трансформация в

а/ е аналогичен на трансформациите на Лоренц.

Подобно както при последните остава инвариантната формата $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, така и при преход от K в K' инвариантна е квадратичната форма $E^2 - c^2 p^2$. Така в сила е равенството

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E^2 - c^2 p^2 \quad /11/$$

Прилагаме го за системата от двете частици. Спрямо K' сумарния импулс $\vec{p}' = 0$, така че

$$E'^2 = (E_k + 2m_0 c^2)^2 - \frac{c^2 m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad /12/$$

Скоростта на първата частица спрямо K намираме от формулата за кинетичната енергия

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow v = c \frac{\sqrt{E_k (E_k + 2m_0 c^2)}}{m_0 c^2 + E_k} = \frac{\sqrt{10}}{4} c, (E_k = 3m_0 c^2) \quad /13/$$

и тогава от /12/ следва, че

$$E' = \sqrt{10} m_0 c^2 = \frac{\sqrt{10}}{3} E_k = 1,69 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad /14/$$

Прилагайки закона /11/ за неподвижната спрямо K частица имаме

$$m_0^2 c^4 = \frac{1}{4} E'^2 - c^2 p'^2 \quad /15/$$

откъдето получаваме, че големините на импулсите и на двете частици спрямо K' са равни на

$$p' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} m_0 c = \frac{E_k}{\sqrt{6} c} = 2,18 \cdot 10^{-19} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

За да определим големината на скоростта V, използваме трансформационната формула /4/ за импулса на втората частица

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} m_0 c = -\frac{m_0 c^2 V}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} c = 2,32 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Решение на 4. задача: а/ Реалните части на вълните на Дьо Бройл,

аташирани към частица, която се движи със скорост $V - \Delta v$ и със скорост $V + \Delta v$ са

$$\begin{aligned} \text{Re } \psi_1 &= A \cos(k_1 x - \omega_1 t) = A \cos\left(\frac{p_1 x}{\hbar} - \frac{E_1 t}{\hbar}\right), \\ \text{Re } \psi_2 &= A \cos(k_2 x - \omega_2 t) = A \cos\left(\frac{p_2 x}{\hbar} - \frac{E_2 t}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad /1/$$

където A е амплитудата на вълните

$$E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(v - \Delta v)^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right)^2}} \approx \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ 1 - \frac{v \Delta v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\} = \quad /2/$$

$$E_2 = E_0 \left\{ 1 - \frac{v \Delta v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\}, \quad E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(v + \Delta v)^2}{c^2}}} = E_0 \left\{ 1 + \frac{v \Delta v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\} \quad /3/$$

са енергиите на частицата, когато скоростите ѝ са $v - \Delta v$ и $v + \Delta v$ съответно, а

$$p_1 = \frac{m_0 (v - \Delta v)}{\sqrt{1 - \frac{(v - \Delta v)^2}{c^2}}} \approx \frac{m_0 (v - \Delta v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ 1 - \frac{v \Delta v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ 1 - \frac{\Delta v}{v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\} \quad /4/$$

$$p_2 = p_0 \left\{ 1 + \frac{\Delta v}{v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right\}, \quad p_0 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

са съответните ѝ импулси. От /2/, /3/ и /4/ получаваме

$$\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} = \omega_0 - \Delta \omega, \quad \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar} = \omega_0 + \Delta \omega, \quad k_1 = \frac{p_1}{\hbar} = k_0 - \Delta k, \quad k_2 = \frac{p_2}{\hbar} = k_0 + \Delta k, \quad /5/$$

където

$$k_0 = \frac{m_0 v}{\hbar \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta \omega = \frac{m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2}}{\hbar \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{\Delta v}{v} \quad /6/$$

$$\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar} = \frac{m_0 c^2}{\hbar \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta k = \frac{m_0 \Delta v}{\hbar \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad /7/$$

Така наслагващите се вълни по Дьо Бройл са

$$\begin{aligned} \text{Re } \psi_1 &= A \cos\{(k_0 - \Delta k)x - (\omega_0 - \Delta \omega)t\}, \\ \text{Re } \psi_2 &= A \cos\{(k_0 + \Delta k)x - (\omega_0 + \Delta \omega)t\}. \end{aligned} \quad /8/$$

Като използваме тригонометричната формула

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad /9/$$

за реалната част на вълната ψ получаваме

$$\text{Re } \psi = \text{Re } \psi_1 + \text{Re } \psi_2 = 2A \cos(x \Delta k - t \Delta \omega) \cos(k_0 x - \omega_0 t). \quad /10/$$

б/ Фазовата скорост на вълната ψ се определя от условието

$$k_0 \Delta x = \omega_0 \Delta t,$$

Следователно

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c^2}{v} > c.$$

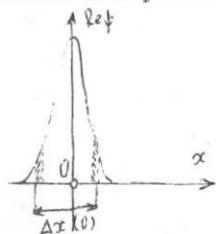
в/ Максимумите на модулиращата функция се движат със скорост, определена от условието

$$\Delta x \cdot \Delta k - \Delta t \cdot \Delta \omega = 0.$$

Следователно

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v.$$

г/ Когато една частица е локализирана в дадена област, скоростта ѝ не е определена точно и се характеризира с неопределеност, която се определя от съотношения за неопределеност на Хайзенберг. Това ни дава основание да считаме, че различни части в един вълнов пакет има различни скорости /вж. фигурата, която само ни дава представа за същността на явленията/. Нека груповите скорости на двата застриховани вълнови пакета се различават с Δv_g . Разстоянието между пакетите при $t = 0$ е приблизително равно на ширината $\Delta x(0)$ на пакета. В момента t ширината на пакета очевидно ще е равна на



10 т. $\Delta x(t) = t \cdot \Delta v_g$, /11/

при което считаме, че $\Delta x(0) \ll \Delta x(t)$. От друга

страна

$$\Delta v_g \approx \frac{\Delta v_g}{\Delta p} \Delta p, \quad /12/$$

където p е импулса на частицата. Но както знаем /вж. в // v_g е равна на скоростта v на частицата. Тогава от /12/ получаваме

$$10 т. \Delta v_g = \frac{\Delta p}{m_0}, \quad /13/$$

От съотношението за неопределеност

$$5 т. \Delta p \cdot \Delta x(0) \approx h,$$

следва, че

$$5 т. \Delta p = \frac{h}{\Delta x(0)}. \quad /14/$$

Като заместим /14/ в /11/ получаваме

$$5 т. \Delta x(t) = \frac{h t}{\Delta x(0) \cdot m_0} \quad /15/$$

Функцията /15/ е линейна.

$$\Delta x(0,5) \approx 2 \text{ km}$$