

Измерение вязкости смеси

В этой задаче исследуется зависимость вязкости смеси глицерина и воды от температуры и их относительной концентрации. Вязкость – это способность жидкости сопротивляться течению. Чем жидкость более вязкая, тем труднее ее прокачать по трубам, а значит, возникает необходимость применять более мощные насосы и более крепкие трубы, рассчитанные на повышенное давление.

Примечание для обработки данных

Существует несколько способов численного решения уравнений.

Метод простой итерации (МПИ) – один из простейших методов численного решения уравнений. Его удобно использовать для численного нахождения величин, заданных неявно как решение некоторого уравнения. Чтобы решить уравнение с помощью МПИ, его необходимо представить в виде

$$x = f(x). \quad (1)$$

Подставляя в качестве аргумента функции начальное приближение x_0 , мы получим первое приближение x_1 . Далее, подставляя x_1 в качестве аргумента функции, мы получим уже второе приближение x_2 , и т.д. Функцию $f(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы разница между последовательными приближениями уменьшалась, а результат вычислений становился всё ближе к правильному ответу. Для этого нужно, чтобы в достаточно большой окрестности правильного ответа производная функции $f(x)$ была по модулю меньше единицы. Если это не так, самый простой способ – переопределить $f(x)$:

$$f(x) \rightarrow ax + (1 - a)f(x).$$

Это преобразование инвариантно относительно уравнения (1) и на практике почти всегда позволяет достичь сходимости при должном подборе $a \in \mathbb{R}$.

Поскольку для хранения промежуточного значения в калькуляторе используется переменная `Ans`, практическая реализация МПИ состоит в том, чтобы приравнять `Ans` к начальному приближению и начать много раз вычислять $f(\text{Ans})$. При правильном подборе функции $f(x)$ результат вычислений быстро сойдётся к правильному ответу.

Другой популярный метод численного решения уравнений – **метод деления отрезка**. Чаще всего встречается деление отрезка пополам. Суть метода состоит в последовательном уменьшении отрезка, внутри которого лежит искомое решение уравнения. Для этого на каждой итерации этот отрезок делится на равные части, левая и правая части уравнения вычисляются в полученных точках, и в качестве нового отрезка выбирается тот, на котором разность левой и правой частей меняет знак. В качестве оценки для корня обычно выбирают середину отрезка.

Один из вариантов практической реализации деления отрезка – использование режима **Table**, который поддерживают некоторые модели калькуляторов. Этот режим позволяет рассчитать значения заданной функции с равным шагом в заданном диапазоне аргумента. Обычно памяти калькулятора хватает на вычисление функции примерно в 20–25 точках, поэтому на каждой итерации можно эффективно делить отрезок примерно в 20 раз.

Введение

Температура, при которой некристаллизующееся или не успевающее закристаллизоваться вещество становится твёрдым, переходя в стеклообразное состояние, называется **температурой стеклования** T_g .

Для смеси воды и глицерина зависимость температуры стеклования от массовой доли глицерина w_g можно с хорошей точностью описать многочленом:

$$T_g \text{ [K]} = 140.3 + 35.272w_g - 3.879w_g^2 + 23.467w_g^3. \quad (2)$$

Используя данное выражение и зная температуру стеклования, можно определить значение концентрации глицерина.

Road to IPhO

Считайте известными следующие численные данные:

- Плотность глицерина $\rho_g = 1260 \text{ кг/м}^3$;
- Плотность воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$;
- Молярная масса глицерина $\mu_g = 92 \text{ г/моль}$;
- Молярная масса воды $\mu_w = 18 \text{ г/моль}$.

Во всех частях задачи вы можете считать объем смеси равным сумме объемов составляющих этой смеси компонент.

Часть А. Зависимость вязкости от концентрации (6.5 баллов)

В общем случае задачу о вязкости смеси веществ решить не представляется возможным, однако для смеси воды и глицерина можно воспользоваться эмпирической формулой:

$$\eta = \xi \cdot \frac{\exp(-kn_w)}{1 + a \cdot \exp(bn_w)}.$$

Если значение молярной концентрации воды в смеси достаточно мало, то можно считать, что $a \cdot \exp(bn_w) \ll 1$. Поэтому для упрощения анализа представленной зависимости предлагается использовать приближение, работающее **только при малых** молярных концентрациях воды:

$$\eta = \xi \cdot \exp(-kn_w).$$

В таблице в листах ответов представлена экспериментальная зависимость вязкости от температуры стеклования смеси глицерина и воды. Измерения проводились при температуре $T = 25^\circ\text{C}$.

A1	Выразите молярную концентрацию воды n_w в растворе через массовую концентрацию глицерина w_g , μ_w и μ_g .	0.5
-----------	--	------------

A2	Используя уравнение (2), пересчитайте значения T_g в значения w_g .	2.0
-----------	---	------------

A3	Предложите линеаризацию, описывающую систему с малой молярной концентрацией воды, с помощью которой можно будет определить параметры ξ и k .	0.3
-----------	--	------------

A4	Постройте график линеаризованной зависимости в диапазоне $n_w \in [0, 0.2]$. Определите параметры ξ и k , используя полученный график.	1.2
-----------	---	------------

A5	Зная параметры ξ и k предложите линеаризацию, позволяющую определить значения параметров a и b .	0.3
-----------	--	------------

A6	Постройте график линеаризованной зависимости. Из графика определите a и b . Примечание: в силу неточности экспериментальных данных некоторые значения пересчитать не получится. Таких значений не более 5.	1.2
-----------	--	------------

A7	Постройте на одной миллиметровке график теоретической и экспериментальной зависимостей $\eta(n_w)$.	1.0
-----------	--	------------

Road to IPhO

Часть В. А как зависит вязкость от температуры? (2.5 балла)

Для описания зависимости вязкости η от температуры T часто используют модифицированное уравнение Андраде

$$\eta = A \cdot \exp\left(\frac{B}{T} + C\right), \quad (3)$$

где A , B и C – некоторые постоянные. Оно хорошо описывает поведение смеси при больших температурах, однако перестаёт работать при приближении к температуре стеклования.

При низких температурах, близких к температуре стеклования, вместо (1) удобно использовать уравнение Вогеля–Таммана–Фульхера:

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp\left(\frac{DT_0}{T - T_0}\right), \quad (4)$$

где η_0 , D и T_0 – некоторые постоянные.

В таблице в листах ответов представлена экспериментальная зависимость вязкости смеси от температуры. Измерения производились со смесью с объемной концентрацией глицерина $c_g = 0.5$.

В1 Используя уравнение (2), определите температуру стеклования раствора T_g .

0.5

Будем считать известным значение $\eta_0 = 3.33 \cdot 10^{-3}$ Па · с.

В2 Предложите линеаризацию, позволяющую определить значения параметров D и T_0 . Построив график линеаризованной зависимости, определите значения этих параметров.

2.0

Часть С. Определение вязкости разными способами (1 балл)

В данной части задачи предлагается найти численное значение вязкости смеси с помощью двух полученных ранее зависимостей. Для возможности сравнения полученных результатов в обоих случаях смесь находится в одинаковых условиях.

С1 Определите вязкость смеси η_n при объемной концентрации глицерина $c_g = 0.5$ и температуре $T = 25^\circ\text{C}$, используя зависимость от молярной концентрации воды.

0.4

С2 Определите вязкость смеси η_t при тех же условиях, используя зависимость от температуры.

0.4

С3 Сравните полученные результаты. Если есть расхождения, предложите возможную причину их возникновения.

0.2