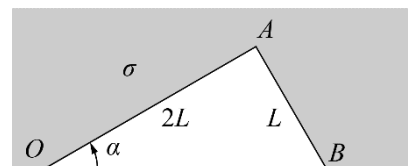


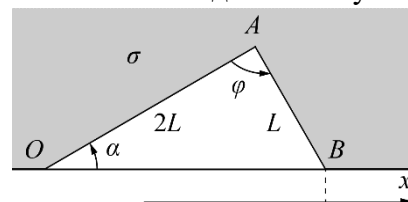
11.1. Треугольник и плёнка. Лёгкие стержни OA и AB соединены шарнирно между собой. Конек O стержня OA закреплён шарнирно на гладкой спице, а на конце B стержня AB прикреплено с помощью шарнира маленькое колечко массы m , которое может скользить по спице. Длины стержней различаются в два раза: $|AB| = L$, $|OA| = 2L$, все шарниры невесомы. Система снаружи (до закреплённой внешней границы) окружена двусторонней плёнкой с коэффициентом поверхностного натяжения σ . В области между спицей и стержнями плёнки нет. Силу тяжести не учитывайте.



- 1) Найдите величину угла α в положении равновесия.
- 2) Найдите период малых колебаний системы вблизи положения равновесия.

11.1. Возможное решение. Способ 1 (энергетика).

1) В состоянии равновесия энергия системы должна быть минимальна. В данном случае энергия системы – это энергия натянутой плёнки, которая пропорциональна площади плёнки: с учётом того, что плёнка двусторонняя, $E_{\text{пл}} = 2\sigma S_{\text{пл}}$. Ясно, что минимум этой энергии отвечает положению стержней, в котором максимальна площадь треугольника OAB . Её удобно вычислять по двум сторонам (OA и AB) и углу φ между ними:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} L \cdot 2L \cdot \sin(\varphi) = L^2 \sin(\varphi).$$

Эта площадь максимальна при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то есть когда стержни перпендикулярны друг другу, и поэтому в прямоугольном треугольнике OAB $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Итак, в состоянии равновесия

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ.$$

2) Потенциальная энергия определена с точностью до константы, поэтому мы можем считать энергию системы в положении равновесия равной нулю. Тогда энергия системы в положении, в котором колечко сдвинулось вдоль стержня в точку с координатой x , отсчитываемой от положения равновесия (см. рисунок), равна

$$E(x) = 2\sigma[L^2 - S_{OAB}(x)] = 2\sigma L^2\{1 - \sin[\varphi(x)]\}.$$

Длина стороны OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов, $(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos[\varphi(x)] \Rightarrow \cos[\varphi(x)] \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L}x$.

Отметим, что в этом выражении мы пренебрегли слагаемым порядка $\frac{x^2}{L^2}$ (колебания малые).

В том же приближении $\sin[\varphi(x)] \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1 - \frac{5x^2}{8L^2}$. Значит, $E(x) \approx \frac{5\sigma x^2}{4} = \frac{kx^2}{2}$. Здесь

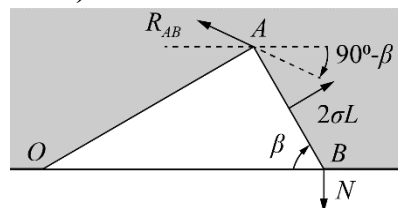
введено обозначение $k = \frac{5\sigma}{2}$. Мы получили в точности такое же выражение, как для груза на пружине – малые колебания колечка будут происходить по гармоническому закону с

периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

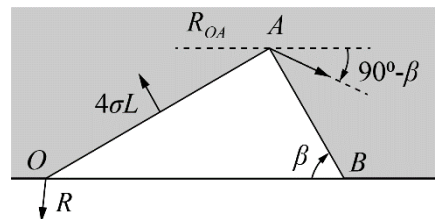
Ответы: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

11.1. Возможное решение задачи. Способ 2 (статика и динамика).

1) Рассмотрим равновесие стержня AB , на который действуют три силы. Это равнодействующая сил поверхностного натяжения, которая перпендикулярна стержню и приложена к его середине. Поскольку стержень невесом, из условия равенства моментов относительно колечка находим проекцию силы реакции шарнира на направление, перпендикулярное стержню: $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp} L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$. Наконец, из условия баланса проекций сил на стержень, находим параллельную стержню составляющую силы реакции шарнира



$R_{AB\parallel} = N \sin(\beta) = \sigma L \operatorname{tg}(\beta)$. Таким образом, величина этой силы $R_{AB} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)}$, и она направлена под углом $(2\beta - 90^\circ)$ к стержню, и под углом $(90^\circ - \beta)$ к горизонтали. Сила, действующая на шарнир A со стороны стержня AB, в соответствии с III законом Ньютона, равна по величине и противоположна по направлению найденной силе $\vec{R}_{AB}$, а также и силе, действующей на шарнир A со стороны стержня OA (шарнир A находится в равновесии под действием этих двух сил). И, конечно, сила $\vec{R}_{OA}$, действующая со стороны шарнира A на стержень OA, оказывается равна по величине и противоположна по направлению найденной нами силе: $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$.



Теперь мы можем рассмотреть равновесие стержня OA под действием $\vec{R}_{OA}$, равнодействующей сил поверхностного натяжения и силы реакции шарнира O. Записав условие равновесия моментов относительно O, находим перпендикулярную стержню компоненту $\vec{R}_{OA}$:

$$4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp} L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L.$$

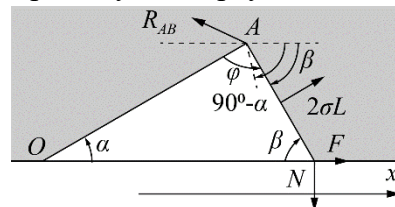
Но из найденного ранее получаем другое выражение для этой величины:

$$R_{OA\perp} = \frac{\sigma L}{\cos(\beta)} \cos(90^\circ - \beta) = \sigma L \cdot \operatorname{tg}(\beta).$$

Из сопоставления этих выражений видим, что в состоянии равновесия $\operatorname{tg}(\beta) = 2$. Из теоремы синусов $\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, и поэтому $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$.

Отметим, что из полученных углов ($\sin(\alpha) = \cos(\beta)$) видно, что третий угол в треугольнике OAB – прямой!

2) Рассмотрим теперь неравновесное положение колечка, в котором оно имеет координату x , отсчитываемую от положения равновесия (см. рис.). Далее будем считать, что обозначения всех углов относятся именно к смещённому положению колечка. Поскольку нам нужно описывать малые гармонические колебания, то все силы нужно вычислять с точностью до первого порядка по x/L . Например, длина OB в этом положении $|OB| = L\sqrt{5} + x$, и, в соответствии с теоремой косинусов,



$$(L\sqrt{5} + x)^2 = L^2 + 4L^2 - 4L^2 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) \approx -\frac{\sqrt{5}}{2L} x.$$

Соответственно, с этой точностью $\sin(\varphi) \approx \sqrt{1 - \frac{5x^2}{4L^2}} \approx 1$. По теореме синусов

$$\sin(\beta) = \frac{2L}{L\sqrt{5} + x} \sin(\varphi) \approx \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5L} x \Rightarrow \cos(\beta) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5L} x.$$

11 класс

Поскольку стержни и шарниры невесомые, то сумма приложенных к каждому из них сил и моментов сил равна нулю. Шайба в положении покоя просто передавала действующую на неё силу нормальной реакции спицы на стержень AB . Поскольку шайба массивная, и теперь движется с ускорением, то действующая с её стороны на стержень AB сила имеет компоненту F вдоль спицы. Повторим рассуждения о стержне AB для новой ситуации. Условие равновесия моментов сил относительно шарнира A даёт уравнение (1):

$$2\sigma L \frac{L}{2} - NL \cos(\beta) + FL \sin(\beta) = 0 \Rightarrow NL \cos(\beta) - FL \sin(\beta) = \sigma L.$$

Условие равновесия моментов относительно колечка прежнее: $2\sigma L \frac{L}{2} - R_{AB\perp} L = 0 \Rightarrow R_{AB\perp} = \sigma L$. Условие баланса сил в проекции на стержень AB теперь превратилось в

$$R_{AB\parallel} = N \sin(\beta) + F \cos(\beta).$$

Условие равновесия моментов сил, действующих на стержень OA относительно O , тоже не изменилось: $4\sigma L \frac{L}{2} - R_{OA\perp} L = 0 \Rightarrow R_{OA\perp} = 2\sigma L$. С учётом $\vec{R}_{OA} = -\vec{R}_{AB}$ можно вычислить эту компоненту через силы, действующие на AB (важно обратить внимание на то, что направление, перпендикулярное OA , составляет с горизонталью угол $(90^\circ - \alpha)$, а стержень AB – угол β):

$$R_{OA\perp} = 2\sigma L = R_{AB\parallel} \cos(90^\circ - \alpha - \beta) + R_{AB\perp} \cos(180^\circ - \alpha - \beta).$$

С учётом того, что $(180^\circ - \alpha - \beta = \varphi)$, и выражений для сил, получаем уравнение (2):

$$N \sin(\beta) + F \cos(\beta) = \sigma L \frac{2 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \approx \sigma L \left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2L} x \right).$$

Исключая из (1) и (2) силу N , и используя полученные выше приближённые формулы для углов, находим, что

$$F \approx \sigma L \left[\left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2L} x \right) \cos(\beta) - \sin(\beta) \right] \approx \frac{5}{2} \sigma \cdot x.$$

Соответствующая компонента силы, действующей со стороны стержня AB на колечко, имеет противоположный знак. Таким образом, уравнение движения колечка при $x \ll L$ имеет вид:

$$m\ddot{x} \approx -\frac{5}{2} \sigma \cdot x.$$

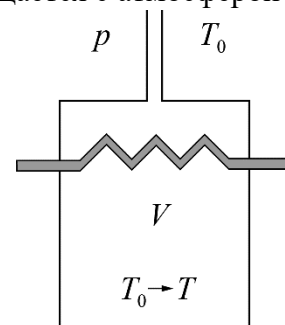
Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{5\sigma}{2m}}$. Период

колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

Ответы: $\alpha = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,6^\circ$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{5\sigma}}$.

11 класс

11.2. Охлаждение. Сосуд объёмом V с теплообменником внутри сообщается с атмосферой через тонкую длинную трубку. Исходно температура в нём T_0 равна температуре атмосферного воздуха. По теплообменнику прокачивают охлаждающую жидкость до тех пор, пока температура воздуха во всём сосуде не уменьшится до T ($T < T_0$). Сколько тепла от воздуха передано теплообменнику? Атмосферное давление P . Поток тепла через стенки сосуда и трубку можно пренебречь.



Внутренняя энергия воздуха

$U = (5/2)\nu RT$, где ν – число молей, T – температура, а R – газовая постоянная.

11.2. Возможное решение. При включении теплообменника температура вблизи него падает, остывший воздух сжимается, становится тяжелее и опускается вниз, а на его место входит более тёплый атмосферный воздух. При вхождении воздуха совершается положительная работа атмосферного давления.

Из уравнения состояния идеального газа находим, что число молей воздуха в сосуде увеличится от начального $\nu_0 = PV/RT_0$ до $\nu = PV/RT$ при конечной температуре T .

Если ΔV объём атмосферного воздуха, вошедшего в сосуд, то начальный объём ν молей воздуха при заданных внешних условиях:

$$V + \Delta V = \nu RT_0/P = VT_0/T, \text{ а } \Delta V = V(T_0/T - 1).$$

Тогда работа атмосферного давления при вхождении воздуха в сосуд:

$$A = P\Delta V = PV(T_0/T - 1).$$

По первому началу термодинамики работа идёт на изменение внутренней энергии и передачу теплоты (в данном случае теплообменнику):

$$A = \Delta U + Q \text{ или } Q = A - \Delta U.$$

Используем выражения для работы и изменения внутренней энергии:

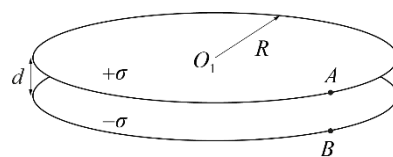
$$Q = A - \Delta U = PV(T_0/T - 1) - (5/2)\nu R(T - T_0).$$

Используя выражение $\nu = PV/RT$, окончательно найдём искомое тепло

$$Q = (7/2)PV(T_0/T - 1).$$

11 класс

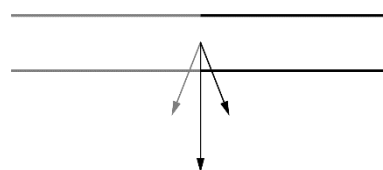
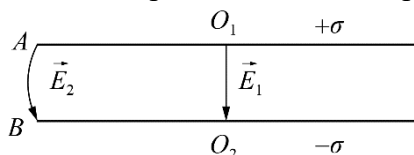
11.3. Плоский конденсатор. Две круглые непроводящие пластины радиуса R располагаются параллельно на малом расстоянии $d \ll R$ друг от друга, образуя плоский конденсатор. Пластины заряжены равномерно с поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$. Точки O_1 и O_2 — центры пластин. Точки A и B находятся на краях пластин. Отрезки O_1O_2 и AB перпендикулярны плоскостям пластин. Найдите разности потенциалов между парами точек: 1) O_1 и O_2 ; 2) A и B ; 3) O_1 и A .



11.3. Решение задачи. 1. Напряжённость электрического поля в зазоре между центрами пластин соответствует напряжённости между двумя бесконечными плоскостями $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Тогда разность потенциалов между центрами пластин $\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$.

2. Рассмотрим поле $\vec{E}_2$ в зазоре на границе пластин.



Так как зазор мал, пластины можно считать полуплоскостями. Для нахождения поля $\vec{E}_2$ между ними мысленно добавим ещё две полуплоскости. Они будут создавать напряжённость поля, имеющую такую же нормальную (т. е. перпендикулярную плоскостям) компоненту, а суммарная напряжённость поля от всех четырёх полуплоскостей будет равна E_1 . Таким образом получаем, что нормальная компонента напряжённости электрического поля двух полуплоскостей равна половине E_1 , или

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Приведённое рассуждение применимо для любой точки отрезка AB , отсюда разность потенциалов между краями пластин:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$

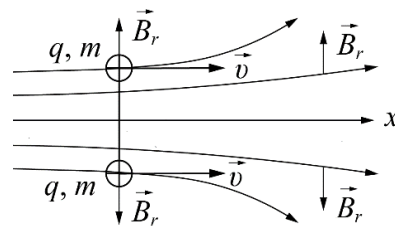
3. Из потенциальности электрического поля следует:

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_A + \varphi_{O_2} - \varphi_B + \varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}$$

Из соображений симметрии $\varphi_{O_1} - \varphi_A = \varphi_B - \varphi_{O_2}$. Комбинируя эти выражения, получаем

$$\varphi_{O_1} - \varphi_A = \frac{1}{2} \left((\varphi_{O_1} - \varphi_{O_2}) - (\varphi_A - \varphi_B) \right) = \frac{\sigma d}{4\varepsilon_0}.$$

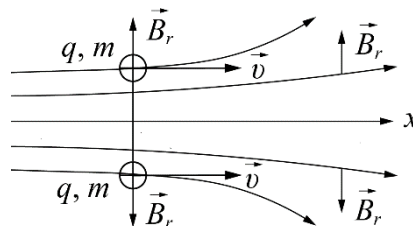
11.4. Гантель в магнитном поле. В аксиально-симметричном магнитном поле находится гантель – лёгкий непроводящий стержень с заряженными шариками на концах. Массы и заряды шариков одинаковы и равны m и q . Гантель перпендикулярна оси симметрии (оси x), а её центр находится на этой оси (см. рис.). Проекция магнитного поля на радиальное (перпендикулярное оси) направление на расстоянии равном радиусу гантели везде одинакова и равна B_r . Осева компонента поля изменяется вдоль оси. В момент времени t_0 гантели сообщают скорость v_0 вдоль оси x . Силу тяжести не учитывайте.



- 1) На какое наибольшее расстояние $L_{\max}$ от начального положения удаляется центр гантели?
- 2) Чему равна максимальная окружная (перпендикулярная оси симметрии) скорость вращения шариков гантели в процессе движения?
- 3) Через какое время после t_0 угловая скорость вращения гантели окажется наибольшей?

11.4. Возможное решение. Вызываемые осевой проекцией магнитного поля силы направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены и не сказываются на движении гантели.

В начальный момент силы, связанные с радиальной проекцией магнитного поля, оказываются тангенциальными, то есть перпендикулярными оси и радиальному направлению. Это приводит к росту угловой скорости вращения вокруг оси симметрии, но при этом нет сил, смещающих центр гантели поперёк оси или вызывающих поворот плоскости вращения. В самом деле, при скорости v шариков вдоль оси и окружной скорости u возникающие из-за радиальной проекции магнитного поля B_r силы перпендикулярны скорости шариков и имеют осевую составляющую



$F_x = -quB_r$ и тангенциальную (окружную) $F_t = qvB_r$. Соответственно

$$m \frac{dv}{dt} = -quB_r; \quad m \frac{du}{dt} = qvB_r.$$

Пока v не уменьшится до нуля, окружная и угловая скорости растут. Поскольку работа магнитной силы равна нулю, то кинетическая энергия остаётся неизменной и максимальная окружная скорость $u_{\max} = v_0$.

При смещении центра гантели на x от начальной точки

$$m \frac{du}{dt} = qvB_r = qB_r \frac{dx}{dt},$$

откуда $mu = qB_r x$. Для максимального смещения $L_{\max}$ имеем:

$$mu_{\max} = qB_r L_{\max} \quad \text{и} \quad L_{\max} = \frac{mv_0}{qB_r}.$$

После подстановки $u = \frac{qB_r x}{m}$ в выражение $m \frac{dv}{dt} = -quB_r$ получим уравнение гармонических колебаний

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x$$

11 класс

с круговой частотой $\omega = \frac{qB_r}{m}$ и периодом $T = \frac{2\pi m}{qB_r}$. Первый раз от момента начала движения максимальная скорость вращения будет достигнута через четверть периода $t_1 = \frac{\pi m}{2qB_r}$. Затем максимальное значение скорости вращения будет достигаться через каждые полпериода. Таким образом, для моментов времени, в которые достигается максимальная скорость вращения, справедлива формула

$$t_n = \frac{\pi m}{2qB_r} (2n - 1),$$

где n - натуральное число.

11.5. Круг Снелла. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой были изображены тонкая собирающая линза, круг и его изображение в линзе. От времени чернила выпцвели, и на чертеже остались видны лишь круг и его изображение, но известно, что круг целиком располагался в плоскости, проходящей через главную оптическую ось линзы, и что круг и его изображение располагались по разные стороны от плоскости линзы.

Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения:

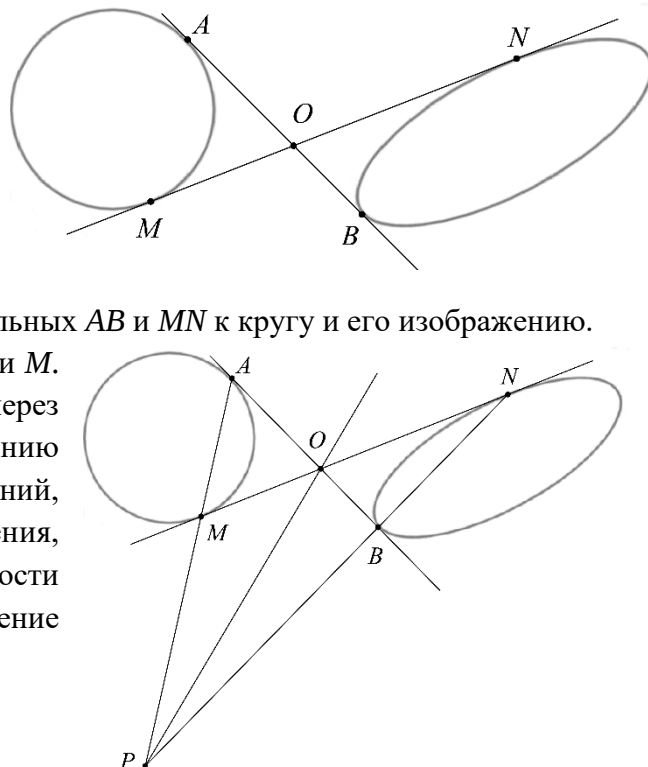
- 1) оптического центра O линзы;
- 2) плоскости линзы;
- 3) фокусов F_1 и F_2 линзы.



11.5. Возможное решение. Поскольку плоскость линзы находится между источником и его изображением, то изображение является действительным, причём фокальные плоскости линзы также находятся между ними – в противном случае изображение оказалось бы «разорванным» на действительную и мнимую часть.

Точечный источник и его изображение в линзе лежат на прямой, проходящей через оптический центр O . Если прямая, проходящая через оптический центр, касается круга, то на этой прямой находится изображение лишь одной его точки. Это означает, что данная прямая касается и изображения круга. Из этого следует, что оптический центр линзы O находится в точке пересечения общих внутренних касательных AB и MN к кругу и его изображению.

Рассмотрим луч, проходящий через точки A и M . После преломления в линзе он проходит через точки пересечения касательных к изображению круга B и N . Поэтому в точке пересечения линий, проходящих через точки круга и его изображения, находится точка P , принадлежащая плоскости линзы. Проведя прямую OP , найдём положение плоскости линзы.



11 класс

Отметим, что для построения плоскости линзы можно провести через O любые две прямые, пересекающие круг и его изображение (например, CL и DE), выбрать на этих прямых точки, принадлежащие кругу, используя найденный центр линзы определить изображения этих точек (L и E), а затем провести через эти пары точек прямые до пересечения, чтобы определить положение точки в плоскости линзы.

Однако при таком подходе важно не перепутать изображения этих точек с другими точками пересечения прямых CO , DO с линией изображения («ложные точки» E_1 и L_1). Для правильного выбора достаточно заметить, что для действительных изображений в собирающей линзе увеличение расстояние от предмета до линзы приводит к уменьшению расстояния от линзы до изображения. Поэтому изображениям «дальних» от O точек пересечения круга с прямыми (C и D) отвечают «ближние» к O точки пересечения этих прямых с эллипсом-изображением.

Закачивая наше построение, определим главную оптическую ось линзы O_1O_2 как прямую, проходящую через точку O перпендикулярно OP . Наконец, для определения положения фокусов линзы рассмотрим лучи, идущие параллельно главной оптической оси через точку M и её изображение N . По другую сторону от линзы эти лучи проходят через точки N и M соответственно, пересекая оптическую ось в точках фокусов F_1 и F_2 . Как видно, фокальные плоскости действительно оказались между кругом и его изображением.

