

10.1. Магнетики. Как-то раз в руках у экспериментатора Глюка оказались стопка из шести мощных одинаковых магнитов, разделённых одинаковыми картонными прокладками, и высокоточный термометр. Дело оставалось за малым – провести какой-нибудь эксперимент. Не придумав ничего лучше, Глюк включил лабораторную электроплитку и прикрепил стопку магнитов к её боковой поверхности, затем стал измерять температуру крайнего (дальнего от плитки) магнита. Спустя некоторое время его температура перестала изменяться и оказалась равной $t_1 = 23^\circ\text{C}$, а температура соседнего магнита оказалась равной $t_2 = 29^\circ\text{C}$. Также Глюк измерил радиус магнита $r = 2,0$ см и его высоту (толщину) $h = 1,0$ см.



Определите температуру остальных магнитов и температуру плитки.

Считайте, что:

- магниты обладают очень хорошей теплопроводностью, поэтому температура магнита одинакова во всех его точках;
- температура воздуха одинакова во всех точках вблизи магнитов и равна $t_{\text{oc}} = 20^\circ\text{C}$;
- между магнитом и плиткой картонная прокладка отсутствует;
- теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур цилиндра и воздуха и пропорциональна площади контакта магнита с воздухом;
- поток тепла через картонный диск пропорционален разности температур его поверхностей и пропорционален площади диска.

10.1. Возможное решение. Перенумеруем цилиндры, присвоив номер 1 самому дальнему от поверхности плитки цилиндру. Пусть t_n – превышение температуры цилиндра с номером n над температурой воздуха. Тогда q – поток тепла от первого цилиндра в окружающую среду определяется выражением

$$q = kt_1S.$$

Здесь S – площадь поверхности первого цилиндра, находящейся в контакте с воздухом, k – коэффициент пропорциональности. Площадь поверхности, контактирующей с воздухом, для остальных цилиндров вдвое меньше (радиус цилиндра вдвое больше его высоты) и для этих цилиндров

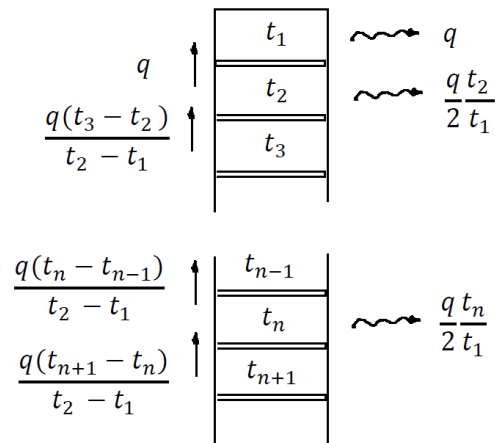
$$q_n = kt_n \frac{S}{2} = q \frac{t_n}{2t_1}.$$

Для потока тепла через картонную прокладку от второго цилиндра к первому q_{21} справедливо выражение

$$q_{2,1} = \alpha(t_2 - t_1)$$

При этом $q_{2,1} = q$, так как температуры цилиндров не меняются. Аналогично для потока тепла через картон от цилиндра с номером $(n + 1)$ к цилиндру с номером n

$$q_{n+1,n} = \alpha(t_{n+1} - t_n) = q_{2,1} \frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1} = q \frac{t_{n+1} - t_n}{t_2 - t_1}$$



Для цилиндра с номером n условие равенства потоков приходящего и уходящего тепла (уравнение теплового баланса) выглядит так

$$\frac{q(t_{n+1} - t_n)}{t_2 - t_1} = \frac{q(t_n - t_{n-1})}{t_2 - t_1} + \frac{q t_2}{2 t_1}.$$

После преобразований получаем

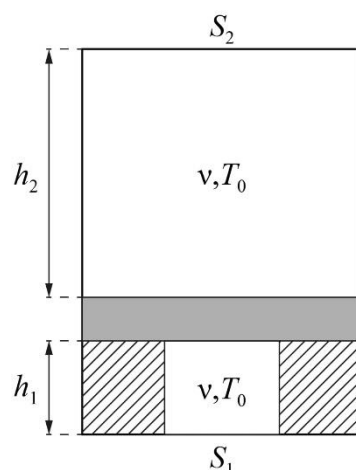
$$\begin{aligned} \frac{t_{n+1} - 2t_n + t_{n-1}}{t_2 - t_1} &= \frac{t_n}{2t_1}, \\ t_{n+1} &= \frac{t_n}{2} \left(3 + \frac{t_2}{t_1} \right) - t_{n-1}. \end{aligned}$$

Используя эту рекуррентную формулу, зная значения $t_1 = 3^\circ\text{C}$ и $t_2 = 9^\circ\text{C}$, получаем:

$$t_3 = 24^\circ\text{C}, t_4 = 63^\circ\text{C}, t_5 = 165^\circ\text{C}, t_6 = 432^\circ\text{C}.$$

С учётом того, что t_n – разница температур цилиндра и воздуха окончательный ответ для значений температуры такой: третий цилиндр - 44°C , четвертый - 83°C , пятый - 185°C , шестой и плита - 452°C .

10.2. Тяжёлый поршень. В вертикальном закрытом сосуде переменного сечения имеются два отделения цилиндрической формы: нижнее с площадью сечения $S_1 = S$ и высотой $h_1 = h$, верхнее с площадью сечения $S_2 = 3S$ и высотой $h_2 = 3h$. Нижнее отделение плотно и герметично закрыто подвижным теплопроводящим поршнем (поршень не приклеен, но газ не проникает в пространство между поршнем и опорами), который может с минимальным трением перемещаться внутри верхнего отделения. В обоих отделениях находится одно и то же количество ν газа при температуре T_0 . Газ во всём сосуде медленно нагревают. Когда температура газа достигает величины $2T_0$ поршень отрывается от опор.



1. Чему равна масса поршня?
2. На какой высоте h' от нижнего основания сосуда окажется поршень в равновесии? Температура всего газа поддерживается равной $2T_0$.
3. Газ в сосуде начинают медленно охлаждать. При какой температуре T поршень снова опустится на опоры?

Примечание: температура газа над и под поршнем всегда поддерживается одинаковой.

10.2. Возможное решение.

1. Поршень отрывается, когда сила давления газа под поршнем становится равной сумме сил давления газа над поршнем и силы тяжести поршня: $p_1 S_1 = p_2 S_2 + mg$. Давление газа можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow p = \nu RT / V$. Из этих уравнений получим:

$$mg = p_1 S_1 - p_2 S_2 = \frac{\nu R 2T_0}{h_1} - \frac{\nu R 2T_0}{h_2} = 2\nu RT_0 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{h}.$$

Отсюда масса поршня равна $m = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{gh}$.

2. Заметим, что как только поршень оторвётся от упоров, газ под поршнем начнёт давить сразу на всю его площадь, и сила давления скачком увеличится. Так как между поршнем и стенками есть малая сила трения, то через некоторое время поршень остановится в положении равновесия. Запишем условие равновесия:

$$p'_1 S_2 - p'_2 S_2 = mg \Rightarrow \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{S_1 h_1 + 3S_1 (h' - h_1)} - \frac{\nu R \cdot 2T_0 \cdot 3S}{3S_1 (4h_1 - h')} = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{h}.$$

$$\frac{3}{(3h' - 2h_1)} - \frac{1}{(4h_1 - h')} = \frac{2}{3h}.$$

Отсюда

$$\frac{14h - 6h'}{-3(h')^2 + 14hh' - 8h^2} = \frac{2}{3h}.$$

Решая квадратное уравнение, получим: $h' = \frac{23 \pm \sqrt{181}}{6} h$.

Корень со знаком плюс не подходит, так как он больше $4h$. Окончательно:

$$h' = \frac{23 - \sqrt{181}}{6} h \approx 1,6h.$$

3. Пусть теперь газ охладился до температуры T . Запишем условие равновесия с учётом того, что $h = h_1$, и непосредственно перед соприкосновением с опорами газ давит на всю площадь поршня как сверху, так и снизу:

$$\frac{\nu RT \cdot 3S_1}{S_1 h_1} - \frac{\nu RT \cdot 3S_1}{3S_1 \cdot 3h_1} = \frac{4}{3} \frac{\nu RT_0}{h_1} \Rightarrow \frac{8T}{3} = \frac{4T_0}{3} \Rightarrow T = \frac{T_0}{2}.$$

10.3. Мягкая посадка. Космический корабль должен приземлиться на лишённую атмосферы планету и коснуться её поверхности со скоростью, не превышающей $v_{\text{п}}$, которую могут погасить амортизаторы. На высоте h над поверхностью планеты командир корабля включил тормозной реактивный двигатель, создающий силу тяги, направленную вверх.

Какой по величине в этот момент была скорость v корабля, направленная вертикально вниз, если оказалось, что в процессе посадки он истратил минимальное количество топлива? (Если таких скоростей несколько, то укажите их все).

Массовый расход μ топлива и скорость u истечения газов относительно корпуса корабля считайте постоянными (командир может выбирать любое значение расхода μ). Изменение массы корабля не учитывайте, ускорение свободного падения равно g .

10.3. Возможное решение. Пусть M – масса космического корабля, μ – массовый расход топлива, u – скорость истечения газов относительно корабля, v – начальная скорость корабля, a – ускорение корабля (направлено вверх).

Поскольку μ и u постоянны, то и реактивная сила тяги $F = \mu u$ тоже постоянна, следовательно, корабль движется равноускорено.

Пусть его конечная скорость равна $v_{\text{к}}$. Введем ось y , направленную вертикально вверх, тогда ускорение корабля $a_y = \frac{v^2 - v_{\text{к}}^2}{2h}$. Время от начала торможения до полной остановки равно $t = \frac{v - v_{\text{к}}}{a_y} = \frac{2h}{v + v_{\text{к}}}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y :

$$Ma_y = \mu u - Mg \Rightarrow \mu = \frac{M(a_y + g)}{u}.$$

Общий расход топлива за время торможения равен

$$\begin{aligned} m_{\text{топл}} = \mu t &= \frac{M}{u} \cdot \left(\frac{v^2 - v_{\text{к}}^2}{2h} + g \right) \cdot \frac{2h}{v + v_{\text{к}}} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right) = \\ &= \frac{M}{u} \cdot \left((v + v_{\text{к}}) - 2v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right). \end{aligned}$$

Из неравенства Коши известно, что если произведение двух величин равно константе, то их сумма достигает минимума при равенстве величин. В нашем случае произведение $(v + v_{\text{к}}) \cdot \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}}$ является константой, значит, минимальная масса потраченного топлива достигается при $v + v_{\text{к}} = \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}}$, тогда $v + v_{\text{к}} = \sqrt{2gh}$.

Подставим найденное значение $v = \sqrt{2gh} - v_{\text{к}}$ в формулу для массы потраченного топлива: $m_{\text{топл}} = \frac{M}{u} \cdot \left(v - v_{\text{к}} + \frac{2gh}{v + v_{\text{к}}} \right) = \frac{M}{u} \cdot \left(\sqrt{2gh} - 2v_{\text{к}} + \frac{2gh}{\sqrt{2gh}} \right) = \frac{M}{u} \cdot 2(\sqrt{2gh} - v_{\text{к}})$. Значит:

1) $m_{\text{топл}}$ будет минимальной при максимальной конечной скорости $v_{\text{к}} = v_{\text{п}}$, следовательно, $v = \sqrt{2gh} - v_{\text{п}}$;

2) Полученный нами ответ справедлив при $v_{\text{п}} \leq \sqrt{2gh}$; в противном случае будет отрицательный расход топлива и отрицательная начальная скорость, что противоречит физическому смыслу.

Рассмотрим отдельно случай, когда $v_{\text{п}} \geq \sqrt{2gh}$. При этом корабль может совершать свободное падение с нулевым расходом топлива. Например, при нулевой начальной скорости он приблизится к поверхности со скоростью $v = \sqrt{2gh}$, которая меньше предельной посадочной.

Во втором случае из закона сохранения энергии $v = \sqrt{v_{\text{к}}^2 - 2gh}$ и, учитывая, что

$0 \leq v_k \leq v_n$, получим: $v \leq \sqrt{v_n^2 - 2gh}$.

Окончательный ответ:

Если $v_n < \sqrt{2gh}$, то $v = \sqrt{2gh} - v_n$, при этом двигатели работают, и расход не нулевой.

Если $v_n \geq \sqrt{2gh}$, то $v \leq \sqrt{v_n^2 - 2gh}$, при этом двигатели не работают, и расход топлива равен нулю.

10.4. И снова Снеллиус. В архиве Снелла нашли чертеж. От времени чернила частично выцвели и остались видны только 4 точки, две из которых являются точечными действительными источниками S_1 и S_2 , а оставшиеся две (α и β) – их изображения. Из описания к чертежу следовало, что изображения созданы одной линзой. Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) все возможные положения линзы, её тип и фокусное расстояние.

Примечания: 1. На отдельном листе приведены в увеличенном масштабе два экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этом листе. 2. Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

10.4. Возможное решение. Рассмотрим первый случай. Пусть правое изображение (β) – это изображение источника S_1 , а левое (α) – источника S_2 . Проведем луч $S_1\alpha$ и $S_2\beta$. (см. рис. 1) Эти лучи идут без преломления, проходя через оптический центр линзы, и значит, точка их пересечения является оптическим центром линзы. Рассмотрим луч S_1S_2 : после преломления в линзе он (или его продолжение) должен пройти и через изображения α и β . Значит, плоскость линзы проходит через точку пересечения прямых S_1S_2 и $\alpha\beta$. Построим линзу и перпендикулярно ей главную оптическую ось.

Из чертежа видно, что оба источника оказались с одной стороны от линзы, а изображения – с разных сторон. Такое возможно только в случае собирающей линзы, причём одно изображение будет действительным, а второе – мнимым.

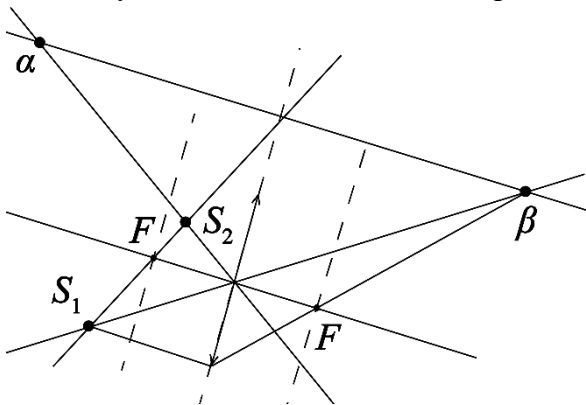


Рис. 1.

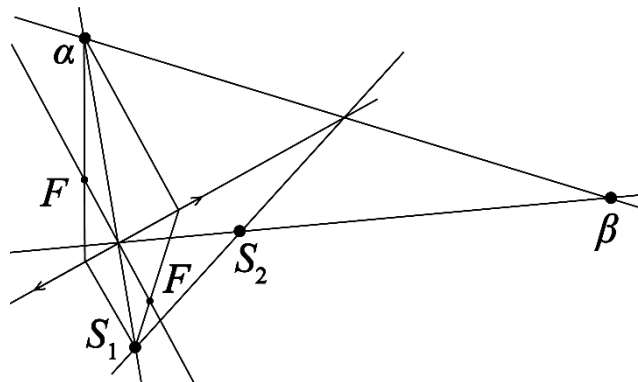


Рис. 2.

Для определения положения фокусов линзы проведём из S_1 луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдёт в β , пройдя через фокус. Аналогичным образом найдём второй фокус.

Аналогично рассмотрим второй случай. Положение линзы, главной оптической оси и фокусов линзы приведено на рис. 2.

10.5. Суммарная мощность. В цепи, изображённой на рисунке 1, суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, равна 7 Вт. Определите суммарную мощность, выделяющуюся на резисторах в цепи, изображённой на рисунке 2.

Характеристики всех элементов цепей **не заданы**, но элементы, обозначенные на схемах одинаково, имеют одинаковые характеристики. Источники можно считать идеальными.

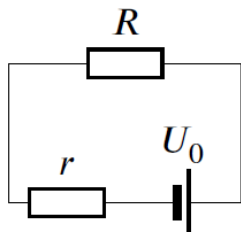


Рис. 1

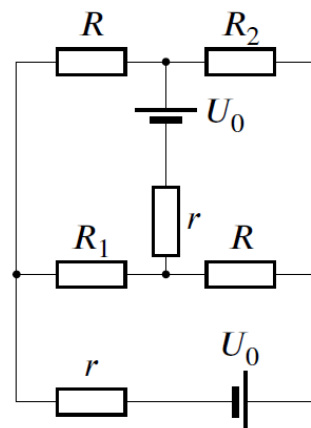


Рис. 2

10.5. Возможное решение. Вариант №1. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи $P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2 / (r + R)$.

Рассмотрим вторую цепь. Пусть I_0 – сила тока через нижний источник, I_1 – через правый резистор R , I_2 – через верхний источник. Тогда силы тока через резисторы R_1 , R_2 и левый резистор R равны, соответственно $I_1 - I_2$, $I_0 - I_1$ и $I_0 + I_2 - I_1$.

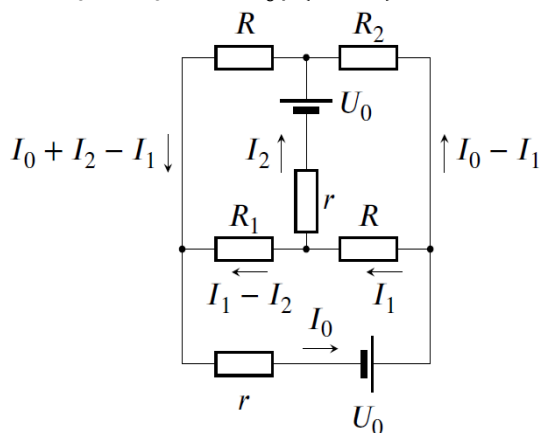
Мощность, выделяющаяся во второй цепи, равна суммарной мощности, вырабатываемой источниками $P = U_0 \cdot I_0 + U_0 \cdot I_2$.

С другой стороны, обойдя схему по двум источникам можем записать:

$$2U_0 = I_0 \cdot r + I_1 \cdot R + I_2 \cdot r + (I_0 + I_2 - I_1) \cdot R = (I_0 + I_2) \cdot (R + r).$$

Отсюда, следует, что

$$I_0 + I_2 = \frac{2U_0}{R + r} \Rightarrow P = U_0 \cdot (I_0 + I_2) = \frac{2U_0^2}{R + r} = 2P_0 = 14 \text{ Вт.}$$



1.4. Возможное решение. Вариант №2. Общая мощность, выделяющаяся на резисторах, равна мощности всех источников в цепи. В первой цепи

$$P_0 = U_0 \cdot I = U_0^2 / (r + R).$$

Воспользуемся принципом суперпозиции (метод контурных токов) и рассмотрим вторую цепь следующим образом:

уберём верхний источник и расставим токи.

Теперь вернём верхний источник и уберём нижний. Из-за симметрии расположения резисторов получим следующее распределение сил тока: накладывая эти картины распределения друг на друга, получаем, что силы тока через резисторы R_1 и R_2 во второй цепи равны нулю, и эти резисторы можно не учитывать.

Сила тока, текущего в цепи, равна $I' = \frac{2U_0}{2(r+R)} = \frac{U_0}{r+R} = I$. Отсюда находим мощность, выделяющуюся в цепи:

$$P = 2U_0 \cdot I = 2P_0 = 14 \text{ Вт}.$$

